

УДК 532.5 : 534.1

© 1989

М. А. Миронов, И. А. Сазонов

К ПРОБЛЕМЕ ВОЛН ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ СО ЗНАКОПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ ПРОФИЛЯ

Методом преобразования Фурье решается задача Коши для плоскопараллельного потока с профилем скорости, не меняющим знака кривизны. Показано, что в идеальной жидкости, несмотря на невозможность существования дискретной собственной моды (теорема Релея), образуется возмущение (вычет в полюсе подынтегрального выражения обратного преобразования Фурье), похожее на затухающую собственную моду. Отличие от собственной моды состоит в разрывности вычета в критическом слое. Полное поле возмущения оказывается при этом непрерывным, так как разрыв вычета компенсируется разрывом еще одной компоненты полного поля (негармонической по времени) — интегралом по берегам разреза. При учете вязкости среды полюс подынтегрального выражения смещается на малую величину, пропорциональную $\nu^{1/2}$ (ν — кинематическая вязкость), вычет в нем становится непрерывной функцией и соответствует собственной затухающей моде для уравнения Орра — Зоммерфельда. До вязких времен, пропорциональных $\nu^{-1/3}$, различия в решении задачи Коши для вязкой и невязкой среды малы.

Согласно теореме Релея в плоскопараллельном потоке идеальной жидкости, так как кривизна профиля скорости потока нигде не меняет знак, невозможны никакие затухающие или нарастающие собственные моды [1]. Нейтральные моды в потоках со знакопостоянной кривизной могут существовать только в случае, если кривизна профиля в их критическом слое равна нулю (такие моды легко рассчитать, например, в кусочно-линейных профилях [2]). При сколь угодно малом изменении кривизны профиля в критическом слое эта мода становится либо нарастающей, если кривизна всего профиля становится знакопеременной, либо согласно теореме Релея она обязана исчезнуть, если кривизна остается знакопостоянной. При численных расчетах течений вязкой жидкости со знакопостоянной кривизной профиля (в частности, пограничного слоя) получают затухающие моды, в том числе и такие, фазовая скорость и коэффициент затухания которых перестают зависеть от вязкости при больших числах Рейнольдса [3], т. е. при исчезающе малой вязкости в реальных жидкостях со знакопостоянной кривизной профиля остаются затухающие моды, запрещенные теоремой Релея.

Ниже рассматривается проблема исчезновения собственных мод в идеальной жидкости при незначительных деформациях профиля скорости, а также проблема применимости теоремы Релея к реальным жидкостям. Рассматриваются только моды дискретного спектра (кроме них в сдвиговых потоках идеальной жидкости всегда существуют моды непрерывного спектра, удовлетворяющие уравнению Релея в обобщенном смысле; эти моды принципиально нейтральны, и их существование не противоречит теореме Релея [4—7]).

1. Собственная мода (волна) в плоскопараллельном потоке с профилем скорости $U(z)$ — это гармоническое возмущение, удовлетворяющее уравнению Релея и граничным условиям (для простоты будем рассматривать потоки, неограниченные по z , что для изучаемых здесь вопросов принципиально; роль граничных условий для таких потоков будут выполнять условия убывания возмущения на бесконечности)

$$(\omega/k - U)(\varphi'' - k^2\varphi) + U''\varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

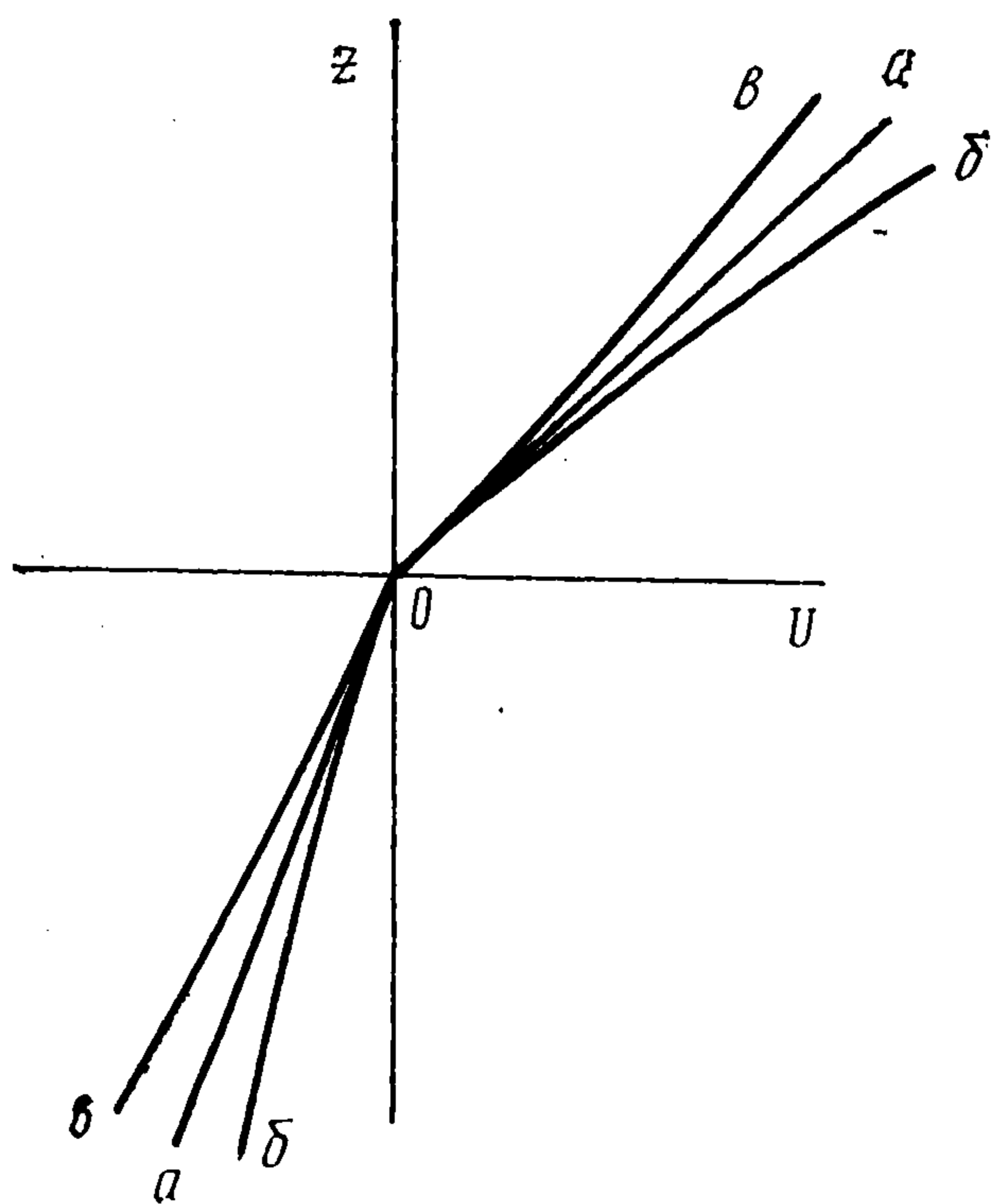
Здесь $\varphi(x, z, t) = \varphi(z) \exp(ikx - i\omega t)$ — малое возмущение функции тока основного течения, k — горизонтальное волновое число, $\varphi' = \partial\varphi/\partial z$.

Согласно теореме Релея [1], мод с комплексным ω не существует, если функция U'' знакопостоянна. Эта теорема приводит к странным на первый взгляд результатам. Рассмотрим волны в профиле, близком к кусочно-линейному с одним изломом:

$$U(z)' = \begin{cases} \gamma_1 z + \sigma \gamma_1 k z^2 / 2 + o(\sigma), & z > 0 \\ \gamma_2 z + \sigma \gamma_1 k z^2 / 2 + o(\sigma), & z < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\gamma_1 = U'(+0), \quad \gamma_2 = U'(-0), \quad \sigma = U''/(k\gamma_1)$$

Здесь γ_1, γ_2 — градиенты скорости течения выше и ниже излома (пусть $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$), σ — малый безразмерный параметр, характеризующий кривизну профиля вне излома;



Фиг. 1

излом профиля соответствует быстрому, практически скачкообразному изменению градиента скорости течения на очень малом масштабе, меньшем всех рассматриваемых в работе масштабов. Семейство профилей, описываемых выражением (1.3), изображено на фиг. 1: а) $\sigma = 0$, б) $\sigma > 0$, в) $\sigma < 0$.

Если кривизна профиля отсутствует ($\sigma = 0$) в течение (1.3), существует единственная мода дискретного спектра

$$\varphi = \exp(-k|z| + ikx - i\omega_0 t) \quad (1.4)$$

(для определенности положим $k > 0$) с законом дисперсии

$$\omega_0 = (\gamma_1 - \gamma_2)/2 \quad (1.5)$$

Хотя при $\sigma = 0$ кривизна профиля не меняет знак: $U'' = (\gamma_1 - \gamma_2) \delta(z)$, существование волны (1.4), (1.5) не противоречит теореме Релея, так как она нейтральна, и в ее критическом слое $z_c = \omega/(k\gamma_1)$ кривизна профиля равна нулю.

При $\sigma < 0$ кривизна профиля (1.3) знакопеременна, собственная мода в таком профиле становится нарастающей и ее можно найти методом последовательных приближений в виде разложения по степеням σ . В частности, для мнимой части частоты этот метод дает линейную зависимость от σ при малых σ (см. п. 2).

При $\sigma > 0$ кривизна профиля (1.3) знакопостоянна и согласно теореме Релея в нем нет собственных мод.

Таким образом, при $\sigma < 0$ (неустойчивый профиль) существует нарастающая мода, с уменьшением кривизны ее инкремент убывает, при переходе к кусочно-линейному профилю мода становится нейтральной, а при дальнейшем изменении кривизны она пропадает. Такое поведение моды при малом изменении параметра σ представляется несколько необычным, как если бы в осцилляторе при отрицательном и нулевом трении существовало соответствующее нарастающее или нейтральное собственное колебание, а при переходе к сколь угодно малому положительному трению собственное колебание осциллятора пропадало.

Отыскание собственных мод в сдвиговых потоках относится к числу задач о модах в слоистых волноводах, подробно исследованных в акустике и радиофизике и сводящихся к решению уравнения вида $\varphi'' + f(z, \omega)\varphi = 0$ с однородными граничными условиями (для уравнения (1.1) $f = U''/(\omega/k - U) - k^2$). В начальных задачах об акустических или электромагнитных волноводах собственные моды — это вычеты в полюсах спектра решения [6, 8]. Таким образом, исчезновение моды наводит на мысль об исчезновении полюса в спектре решения начальной задачи при $\sigma > 0$. Ниже будет показано, что в сдвиговых потоках вычет в полюсе и мода, вообще говоря, не эквивалентны и исчезновение моды не означает исчезновение полюса.

2. Причина исчезновения моды при $\sigma > 0$ исчерпывающим образом разъясняется при решении начальной задачи. Пусть в момент $t = 0$ поле скоростей совпадает с (1.4). В последующие моменты времени поле удовлетворяет условиям (1.2) и нестационарному уравнению Релея, отличающемуся от (1.1) заменой ω на $i\partial/\partial t$. Для упрощения решения удобно задачу Коши заменить эквивалентной задачей с источником: пусть при $t < 0$ возмущение отсутствует, а в момент $t = 0$ на жидкость действует вертикально направленная внешняя сила, приложенная к излому профиля

$$f_z = 2ik^{-2} \delta(z) \delta(t) e^{ikx} \quad (2.1)$$

В этом случае можно искать решение отдельно в верхней ($z > 0$) и отдельно в нижней ($z < 0$) областях, в которых легче получить частные решения уравнения Рэлея, но на изломе ($z = 0$) потребовать выполнения условий «сшивки»: непрерывности φ и скачка давления с учетом (2.1)

$$[p]_{z=0} = 2ik^{-2} \delta(t) e^{ikx}, \quad p = (ik^{-1}\partial/\partial t - U)\varphi' + U'\varphi \quad (2.2)$$

Здесь $[]_{z=h}$ — скачок функции в слое $z = h$, p — давление.

Воспользуемся методом одностороннего преобразования Фурье по времени ([9], с. 325)

$$\Phi(z, \omega) e^{ikx} = \int_0^{\infty} \varphi(x, z, t) e^{i\omega t} dt$$

Спектр функции тока $\Phi(z, \omega)$ удовлетворяет в верхней и нижней областях уравнению Рэлея (1.1), условиям (1.2) и условиям «сшивки» для спектров

$$[\Phi]_{z=0} = 0, \quad [(\omega/k - U)\Phi' + U'\Phi]_{z=0} = -2i \quad (2.3)$$

Частные решения уравнения (1.1) в верхней $\Phi_{+1,2}$ и нижней $\Phi_{-1,2}$ областях найдем методом последовательных приближений, используя разложение по малому параметру σ

$$\begin{aligned} \Phi_{+1,2} &= \Phi_{+1,2}^{(0)} + \Phi_{+1,2}^{(1)} + \dots, \quad \Phi_{-1,2} = \Phi_{-1,2}^{(0)} + \Phi_{-1,2}^{(1)} + \dots \\ \Phi_{+1,2}^{(0)} &= e^{\mp kz}, \quad \Phi_{+1,2}^{(1)} = \pm 1/2 \sigma \Phi_{+1,2}^{(0)} F[\pm 2(kz - \omega/\gamma_1)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Phi_{-1,2}^{(1)} = \pm 1/2 \sigma \gamma_1 \gamma_2^{-1} \Phi_{+1,2}^{(0)} F[\pm 2(kz - \omega/\gamma_2)], \quad F(\zeta) = e^{\zeta} \text{Ei}(-\zeta) - \ln \zeta$$

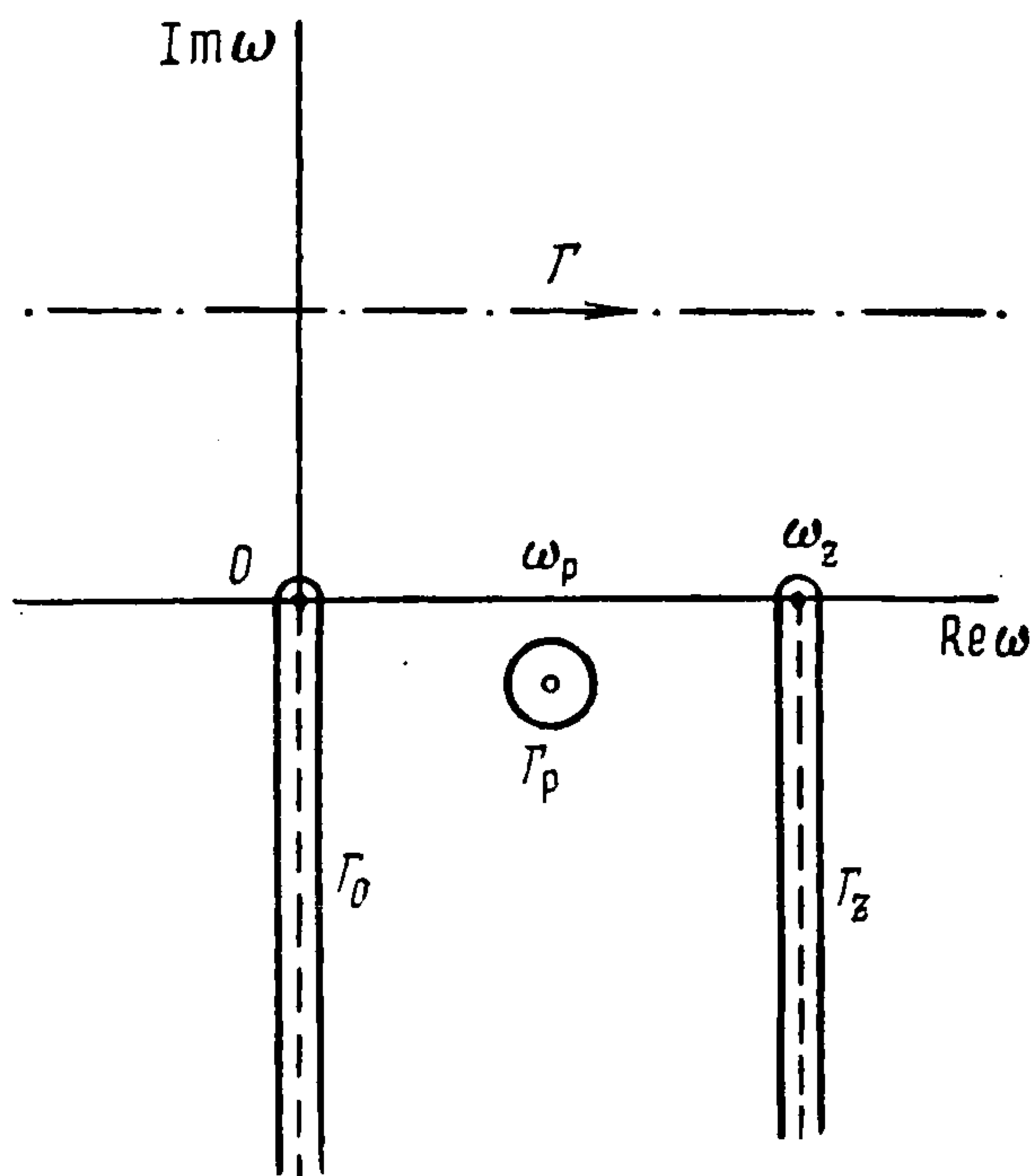
«Сшивая» Φ_{+1} и Φ_{-2} с учетом (2.3), найдем спектр решения и, применяя обратное преобразование Фурье, запишем решение задачи в интегральной форме

$$\varphi(x, z, t) = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Phi_{+1}(z, \omega)}{\Phi_{+1}(0, \omega)} \frac{e^{-i\omega t}}{iW(\omega)} d\omega, \quad z > 0$$

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \omega_0 + 1/2 \omega k^{-1} (\Phi_{+1}'/\Phi_{+1} - \Phi_{-2}'/\Phi_{-2}) \approx \\ &\approx \omega_0 - \omega + 1/2 \omega \sigma [\exp(-2\omega/\gamma_1) \text{Ei}(2\omega/\gamma_1) - \\ &\quad - \gamma_1 \gamma_2^{-1} \exp(2\omega/\gamma_2) \text{Ei}(-2\omega/\gamma_2)] + O(\sigma^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $z < 0$ в (2.5) следует заменить $\Phi_{+1}(z, \omega)/\Phi_{+1}(0, \omega)$ на $\Phi_{-2}(z, \omega)/\Phi_{-2}(0, \omega)$. В дальнейшем будем рассматривать лишь область $z > 0$.

Контур Γ проходит выше всех особенностей подынтегрального выражения. Эти особенности таковы: логарифмическая точка ветвления $\omega = 0$,



Фиг. 2

обусловленная функциями $\Phi_{+1}(0, \omega)$ и $W(\omega)$; логарифмическая точка ветвления $\omega = \omega_z$, обусловленная функцией $\Phi_{+1}(z, \omega)$ ($\omega_z = kU(z) = k\gamma_1 z + o(\sigma)$); полюс $\omega = \omega_p$, обусловленный нулем функции $W(\omega)$. На плоскости с разрезами, проведенными от точек ветвления вертикально вниз, подынтегральная функция в (2.5) однозначна (фиг. 2); на этой плоскости ветви функций Ei и \ln следует выбирать такими, чтобы они принимали вещественное значение соответственно при отрицательных и положительных значениях своего аргумента. При указанном выборе ветвей возмущение (2.5) совпадает с возмущением (1.4) в момент времени

$t = 0$.

С учетом выбора ветвей найдем полюс ω_p методом последовательных приближений

$$\begin{aligned} \omega_p = \omega_r + i\omega_i; \quad \omega_r = \omega_0 + \frac{1}{2}\sigma\omega_0 + [\exp(-2\omega_0/\gamma_1) \operatorname{Re} Ei(2\omega_0/\gamma_1) - \\ - \gamma_1\gamma_2^{-1} \exp(2\omega_0/\gamma_2) Ei(-2\omega_0/\gamma_2)] + O(\sigma^2) \\ \omega_i = -\sigma\omega_0 \exp(-2\omega_0/\gamma_1) + O(\sigma^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $t > 0$ подынтегральная функция в (2.5) удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости. Деформируем исходный контур вниз, при этом он «зацепится» за особенности подынтегральной функции и разобьется на три части: контур Γ_p , обходящий полюс, контур Γ_0 , обходящий нулевую точку ветвления по берегам разреза, и контур Γ_z , обходящий точку ветвления ω_z по берегам разреза (фиг. 2). Результат интегрирования по каждому контуру обозначим соответственно $\varphi_p, \varphi_0, \varphi_z$.

Функцию φ_p найдем при помощи теоремы о вычетах и запишем в однозначном виде с учетом выбора ветвей ($z > 0$)

$$\begin{aligned} \varphi_p = \exp(-kz + ikx - i\omega_p t) \{1 + \frac{1}{2}\sigma [\operatorname{Re} F(2kz - 2\omega_0/\gamma_1) - \\ - \gamma_1\gamma_2^{-1} \exp(2\omega_0/\gamma_2) Ei(-2\omega_0/\gamma_2) - \\ - 2\pi i [\exp(2kz - 2\omega_0/\gamma_1) - 1] \theta(z_c - z)] + o(\sigma)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Возмущение φ_p — гармоническое по t и x , нарастающее при $\sigma < 0$ и убывающее при $\sigma > 0$.

При $\sigma < 0$ возмущение φ_p удовлетворяет уравнению Релея и условиям (1.2) и является нарастающей собственной модой. Оно может быть возбуждено в чистом виде, например объемной вертикально направленной силой

$$f_z = -ik^{-3} (\varphi_p'' - k^2\varphi_p) \delta(t)$$

При $\sigma > 0$ полюс лежит ниже «подвижной» точки ветвления ω_z (меняющей свое положение с изменением z). При прохождении точки z через критический слой z_c разрез, проведенный от этой точки ветвления, пересе-

кает полюс, и полюс оказывается на другом берегу разреза. Соответственно вычет в этом полюсе испытывает скачок в точке $z = z_c$. Функция φ_p испытывает в критическом слое излом в членах первого порядка малости по σ и разрыв в членах второго порядка малости по σ :

$$\begin{aligned} [\varphi_p']_{z=z_c} &= \exp(-kz_c + ikx - i\omega_p t) \sigma k \pi i \\ [\varphi_p]_{z=z_c} &= -\exp(-kz_c + ikx - i\omega_p t) \sigma \omega_i \pi i \gamma_1^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Возмущение φ_p в случае $\sigma > 0$ не удовлетворяет уравнению Релея только в одной точке (в критическом слое) и в силу этого не является собственной модой, оно не может быть возбуждено в чистом виде без приложения постоянно действующих внешних сил.

При $\sigma > 0$ неаналитичность функции φ_p в критическом слое компенсируется неаналитичностью функции φ_z , так что их сумма оказывается аналитичной. Вычислить φ_z и φ_0 явно не удастся, однако можно показать, что на малых временах они порядка σ , а при $t \gg \gamma_1^{-1}$ их асимптотика убывает степенным образом ($z > 0$):

$$\begin{aligned} \varphi_z &= \begin{cases} \sigma \gamma_1^{-1} \exp(-kz + ikx) [it^{-1} \exp(-ikzt\gamma_1) + \\ + g \exp(-i\omega_p t) \text{Ei}(igt)], & |gt| \lesssim 1 \\ \sigma t^{-2} \gamma_1^{-1} g^{-1} \exp(-kz + ikzt\gamma_1 + ikx), & |gt| \gg 1 \end{cases} \quad (2.9) \\ g &= \omega_r - \gamma_1 kz = \gamma_1 k (z_c - z) \\ \varphi_0 &= -2\sigma t^{-2} \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} \exp(-kz + ikx) \end{aligned}$$

При вычислении асимптотики (2.9) использовалось быстрое убывание подынтегральной функции в (2.5) от точек ветвления вдоль разрезов при $t \gg \gamma_1^{-1}$. Сразу после воздействия (2.1) возмущения φ_z и φ_0 малы по сравнению с φ_p , однако при $\sigma > 0$ они затухают медленнее, чем φ_p , и становятся одного порядка с φ_p на временах $t_\sigma \sim (\sigma \gamma_1)^{-1}$ и при $t \gg t_\sigma$ все поле в основном определяется возмущениями φ_z и φ_0 . Таким образом, на временах $t \ll t_\sigma$ суммарное возмущение мало отличается от гармонического с временной зависимостью $\exp(-i\omega_p t)$, а при $\sigma > 0$ на временах $t \gg t_\sigma$ спадает степенным образом. Аналогичная зависимость для спадания возмущений, но не во времени, а по горизонтальной координате, получена в [10, 11].

Заметим, что разбиение на гармоническую и негармоническую части неоднозначно: меняя направление разреза ($\omega_z, -i\infty$), изменим и гармоническую и негармоническую часть решения (но не их сумму), в частности сместим точку разрыва вычета z_c (при чисто вертикальном разрезе точка разрыва удовлетворяет условию $U(z_c) = \omega_r k^{-1}$). Чем ближе разрез к вертикальной линии, тем быстрее убывает подынтегральное выражение в (2.5) вдоль берегов разреза, а следовательно, при меньших временах устанавливается асимптотика вида (2.9) для негармонической части.

Полученные результаты могут быть перенесены на профили более общего вида: пограничные слои, струи, следы (хотя в этих течениях отыскание полюсов представляет собой более сложную задачу, чем в случае модельного профиля (1.3)). Действительно, для любого реального профиля спектр возмущения содержит «подвижную» точку ветвления (перемещающуюся вдоль оси $\text{Re } \omega$ с изменением z). Наличие этой точки связано с особенностью в уравнении Релея — обращением в нуль коэффициента при старшей производной. Особенность поведения спектра в этой точке одинакова для всех профилей течения: $U''(\omega - \omega_z) \ln(\omega - \omega_z)$. (ω_z — частота, для которой слой с координатой z является критическим, т. е. $\omega_z k^{-1} = U(z)$). Разрез, проведенный от этой точки вертикально вниз, может пересекать при некоторых z полюса спектра, лежащие в нижней полуплоскости ω , при этих z вычеты в полюсах будут испытывать разрывы, и следовательно, не будут являться собственными модами (см. сноску в ра-

боте [12]). Таким образом, теорема Релея остается верной для мод, но не для полюсов.

Тем не менее, если кривизна профиля в критическом слое мала, вычет «похож» на слабо затухающую моду, так как имеет гармоническую зависимость от времени и является доминирующей компонентой полного возмущения длительное время спустя после возбуждения ($t \sim k/U''(z_c)$). Следует ожидать, что в различных волноводных задачах (о возбуждении гармонической во времени силой, о нелинейных взаимодействиях и т. п.) отличием полного возмущения от вычета можно пренебречь и рассматривать вычет как «полноценную» моду.

3. Теперь решим аналогичную задачу для вязкой жидкости: на поток вязкой жидкости с профилем (1.3) воздействует сила (2.1). Как и в случае идеальной жидкости, воспользуемся методом преобразования Фурье по времени. Спектр решения $\Phi_v^v(z, \omega)$ будет удовлетворять в каждой из областей $z > 0$ и $z < 0$ уравнению Орра — Зоммерфельда

$$[(\omega/k - U)(\partial^2/\partial z^2 - k^2) + U'' - i\nu k^{-1}(\partial^2/\partial z^2 - k^2)^2] \Phi^v = 0 \quad (3.1)$$

условиям (1.2) и условиям «сшивки» на изломе профиля, которые для вязкой жидкости принимают вид

$$[\Phi^v]_{z=0} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \Phi^v \right]_{z=0} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi^v \right]_{z=0} = 0, \quad \left[ikU' + \nu \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right]_{z=0} \Phi^v = 2k \quad (3.2)$$

они следуют из условий непрерывности обеих компонент скорости, завихренности и из условия скачка давления (2.2).

Уравнение (3.1) в области $z > 0$ имеют четыре частных решения, два из них назовем «невязкими» $\Phi_{+1,2}^v$ и два — «вязкими» $\Phi_{+3,4}^v$. Ни одно из этих решений не содержит точки ветвления, и в отличие от идеальной жидкости все они аналитичны во всей плоскости ω .

Асимптотику невязких решений при $|\delta_z| \gg R^{-1/3}$, где $R = \gamma_1/\nu k^2$ — число Рейнольдса, $\delta_z = (\omega - \omega_z)/\gamma_1$, запишем в виде суммы невязкого и вязкого слагаемых

$$\Phi_{+1,2}^v(\omega, z) = \Phi_{+1,2}(\omega, z) + \Delta\Phi_{+1,2}^v(\omega, z) \quad (3.3)$$

Здесь $\Phi_{+1,2}$ — частные решения уравнения Рэлея, описываемые выражениями (2.4), а асимптотика $\Delta\Phi_{+1,2}^v$ зависит от аргумента δ_z :

$$\Delta\Phi_{+1,2}^v = \begin{cases} 1/3 i \sigma R^{-1} [2 \exp(-2\delta_z) \text{Ei}(2\delta_z) + \delta_z^{-2} - \delta_z^{-1}] + O(\sigma R^{-2}), & \omega \notin S_z \\ -1/2 \sigma \Phi_{+3,4}^v, & \omega \in S_z \end{cases} \quad (3.4)$$

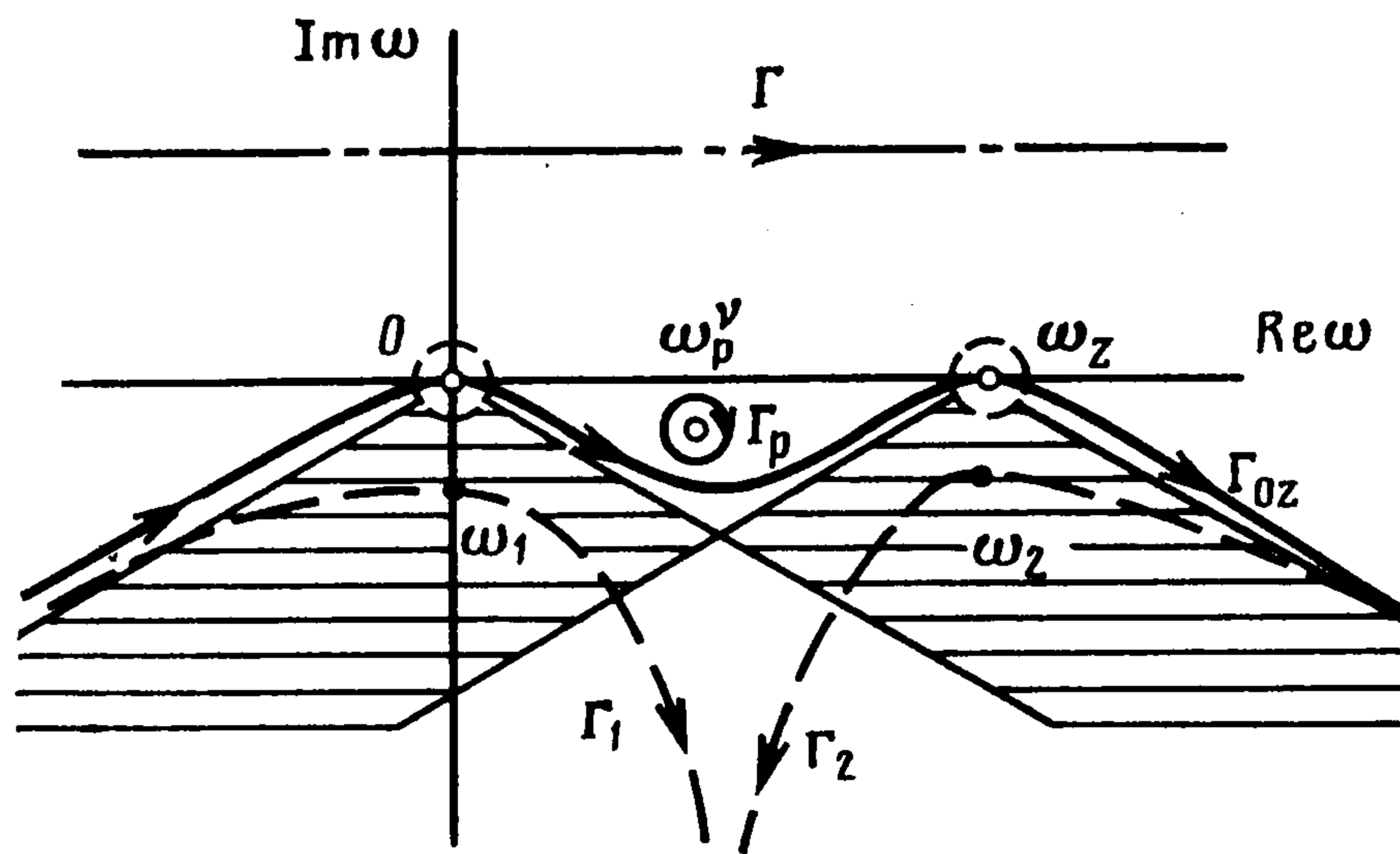
Здесь S_z — область, в которой $-5/6\pi < \arg \delta_z < -1/6\pi$. Выражение получено методом преобразования Фурье по координате z . В области $|\delta_z| \lesssim R^{-1/3}$ решения $\Phi_{+1,2}^v$ могут быть найдены методом малых возмущений и выражены через интегралы от функции Ганкеля индекса $1/3$. В дальнейшем потребуется лишь оценка вязких поправок в этой области

$$\Phi_{+1,2}^v(\omega, z) = \Phi_{+1,2}^{(0)}(z) + O(\sigma R^{-1/3}) \quad (3.5)$$

Асимптотика вязких решений при $|\delta_z| \gg R^{-1/3}$ исследовалась методом эталонных уравнений [13] и может быть записана в виде

$$\Phi_{+3,4}^v \approx R^{-1/4} \delta^{-5/4} \exp\left(\mp R^{1/2} k \int Q^{1/2} dz\right) \left(1 \mp \frac{101}{48} i R^{-1/2} (-i\delta_z)^{-3/2} + O(R^{-1})\right), \\ Q(z) = i(kU - \omega)/\gamma_1 + R^{-1} \quad (3.6)$$

Решение Φ_{+3}^v растет при $|\delta_z| \rightarrow \infty$ в секторе $-5/6\pi < \arg \delta_z < 1/2\pi$, а решение Φ_{+4}^v — в секторе $-3/2\pi < \arg \delta_z < -1/6\pi$. Таким образом,



Фиг. 3

частные решения $\Phi_{+1,2}^v$ оказываются растущими при $|\delta_z| \rightarrow \infty$ в секторе S_z .

В нижней области $z < 0$ частные решения уравнения (3.1) ведут себя аналогичным образом, и их отдельно выписывать не будем.

Используя полученные выражения для асимптотик частных решений, решим краевую задачу (3.1), (3.2), (1.2), при этом получим

$$\Phi^v = \begin{cases} \Phi_{+1}^v (1 + O(\sigma) + O(R^{-1})) (\omega - \omega_p^v)^{-1}, & \omega \notin S_0 \\ (\Phi_{+1}^v + \frac{1}{2}\sigma\Phi_{+3}^v) (1 + O(\sigma) + O(R^{-1})) (\omega - \omega_p^v)^{-1}, & \omega \in S_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\omega_p^v = \omega_p - (1 + i) \sqrt{2\nu k^2 / \omega_0} \quad (3.8)$$

Здесь S_0 — область, в которой $-\frac{5}{6}\pi < \arg \omega < -\frac{1}{6}\pi$, ω_p — полюс для задачи о потоке идеальной жидкости (см. (2.6)). Спектр $z < 0$ в области $z < 0$ ведет себя аналогично, и его отдельно выписывать не будем.

Решение исходной задачи Коши запишем в виде обратного преобразования Фурье

$$\varphi^v(x, z, t) = (2\pi)^{-1} e^{ikx} \int_{\Gamma} \Phi^v(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.9)$$

Подынтегральная функция в случае вязкой жидкости не удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости ω при $t > 0$: она растет как $e^{2/3 |\omega|^{3/2} \operatorname{Re}^{1/2}}$ при $|\omega| \rightarrow \infty$ в областях $(S_0 \cup S_z) \setminus (S_0 \cap S_z)$ заштрихованных на фиг. 3. Из формул (3.4), (3.5), (3.7) видно, что вне секторов S_0 и S_z вязкие поправки дают малый вклад в спектр Φ^v .

Используя представление (3.3), разобьем поле на два слагаемых

$$\varphi^v = \varphi + \Delta\varphi^v$$

$$\varphi = (2\pi)^{-1} e^{ikx} \int_{\Gamma} \Phi_{+1} (1 + O(\sigma) + O(R^{-1})) (\omega - \omega_p^v)^{-1} e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.10)$$

$$\Delta\varphi^v = (2\pi)^{-1} e^{ikx} \int_{\Gamma} \Delta\Phi_{+1}^v (1 + O(\sigma) + O(R^{-1})) (\omega - \omega_p^v)^{-1} e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.11)$$

Интеграл (3.10) аналогичен интегралу (2.5), исследованному выше, он дает сумму полей φ_p , φ_z , φ_0 , полученных для идеальной жидкости, только частота гармонической части возмущения будет немного измененной согласно (3.8).

Оценим интеграл (3.11). Для этого исходный контур преобразуем в контур Γ_{0z} , проходящий вдоль внешней окрестности секторов S_0 и S_z (фиг. 3). Интегрирование по малым окрестностям точек $\omega = 0$ и $\omega = \omega_z$ таким, что $|\omega/\gamma_1| \lesssim R^{-1/2}$ и $|\delta_z| \lesssim R^{-1/2}$ соответственно, согласно оценке (3.5) дает величину порядка $\sigma R^{-2/3}$. Интегралы по оставшимся частям

контура можно вычислить приближенно, при этом также получим величину порядка $\sigma R^{-2/3}$, если только $|kz| \gg R^{-1/3}$. Таким образом, всюду, кроме окрестности излома профиля скорости потока, учет вязкости приводит к появлению слагаемых порядка $\sigma R^{-2/3}$. При $\sigma \gg R^{-1/3}$ эти слагаемые будут давать существенный вклад в общее поле лишь на временах $t_v = \gamma_1^{-1} R^{-1/3} = \nu^{-1/3} (kU')^{-2/3}$, при которых $\varphi_0, \varphi_z \sim \sigma R^{-2/3}$ (аналогичные оценки получены в [6, 7]).

На временах $t \gg t_v$ для исследования асимптотики решения задачи можно воспользоваться методом перевала. Подынтегральная функция в (3.9) имеет две перевальные точки ω_1 и ω_2 ; при $t \gg t_v$ для них получаются приближенные выражения: $\omega_1 = -it^2 \gamma_1^3 R^{-1}$, $\omega_2 = \omega_z + \omega_1$. На этих же временах указанные точки смещаются в области $-\text{Im } \omega_{1,2} \gamma_1^{-1} \gg \gg R^{-1/3}$, в которых можно пользоваться асимптотическими приближениями для частных решений.

Преобразуем исходный контур в перевальные Γ_1 и Γ_2 (фиг. 3). Если при деформации контур пересекает полюс ω_p , то, как обычно, к результату интегрирования по перевальным контурам следует добавить вычет в этом полюсе. Метод перевала дает

$$\varphi^v \sim \exp(-t^3/t_v^3) \quad (3.12)$$

Таким образом, на временах t_v меняется характер убывания возмущения со степенного на экспоненциальный ($\sim \exp(-t^3/t_v^3)$); первый раз характер убывания возмущения с экспоненциального ($\sim \exp(\omega_i t)$) на степенной ($\sim t^{-2}$) меняется на временах t_σ .

На временах $t_3 = t_v^{3/2} t_\sigma^{-1/2} = \sigma^{1/2} \gamma_1^{-1/2} k^{-1} \nu^{-1/2}$ третий раз меняется характер убывания возмущения и становится экспоненциальным ($\sim \exp(\omega_i t)$). На этих временах точки перевала оказываются ниже полюса, и вычет в полюсе, как и на временах $t \ll t_\sigma$, становится самой существенной частью решения

$$\varphi_p^v \approx \begin{cases} \Phi_{+1}^v(\omega_p^v, z) \exp(ikx - i\omega_p^v t), & kz \gg R^{-1/3} \\ [\Phi_{+1}^v(\omega_p^v, z) + 1/2 \sigma \Phi_{+3}^v(\omega_p^v, z)] \exp(ikx - i\omega_p^v t), & kz \lesssim R^{-1/3} \end{cases} \quad (3.13)$$

Троекратное изменение асимптотики возможно только в случае, если эффекты, связанные с кривизной, «сильнее» вязких эффектов, т. е. когда $\sigma \gg R^{-1/2}$. В противном случае $t_v < t_\sigma$, и при $t \sim t_v$ происходит переход от φ_p к φ_p^v .

Возмущение φ_p^v по форме совпадает с φ_p с точностью до членов порядка σR^{-1} , кроме тех z , при которых полюс попадает в сектор S_z . В окрестности критического слоя $k|z - z_c| < \sqrt{3} \omega_i \gamma_1^{-1}$ и излома профиля скорости $|kz| \lesssim R^{-1/3}$ вязкость вносит существенный вклад в φ_p^v : возмущение φ_p^v здесь сильно осциллирует по z , причем частота и амплитуда осцилляций тем больше, чем меньше вязкость.

Возмущение φ_p^v удовлетворяет уравнению Орра — Зоммерфельда при всех z , а также условиям (1.2) и является собственной модой вязкого потока. При $\sigma \gg R^{-1/3}$ ее дисперсия и коэффициент затухания слабо зависят от вязкости (см. (3.8)). Для приближенного расчета дисперсии этой моды и ее формы (кроме окрестности критического слоя) можно использовать невязкий подход, рассмотренный в п. 2.

В заключение отметим, что в вязкой жидкости в отличие от идеальной профили $U(z)$ не могут быть произвольными. В частности, профиль (1.3) должен со временем изменяться, так что излом профиля скорости будет сглаживаться. Изменение кривиз-

ны профиля $\Delta U''(z, t)$ описывается уравнением, следующим из уравнений Навье — Стокса $d\Delta U''/dt = \nu \partial^2 \Delta U''/\partial z^2$. Для рассматриваемых в работе явлений важно, чтобы такое изменение было мало в окрестности критического слоя: $|\Delta U''(z_c, t)| \ll \sigma \gamma_1 k_e$. Расчет показывает, что это неравенство нарушается на временах! порядка $t_* \sim (\gamma_1/\gamma_2 - 1)^2 R/(\gamma_1 \ln \sigma^{-1})$, что много больше времени $t_\nu \sim R^{1/3}/\gamma_1$.

Авторы благодарят Г. И. Баренблатта и С. А. Рыбака за интерес к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц.-Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
2. Рэлей (Стретт) Дж. В. Теория звука. Т. 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1944. 476 с.
3. Landahl M. T. A wave-guide model for turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 3. P. 441—459.
4. Case K. M. Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluid. 1960. V. 3. № 2. P. 143—148.
5. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 107 с.
6. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102. № 2. С. 185—210.
7. Сазонов И. А. Возбуждение волн Ван Кампена — Кейза // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 115—119.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049—1055.
11. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974—986.
12. Landahl M. T. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flow // J. Fluid. Mech. 1980. V. 98. Pt 2. P. 243—251.
13. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.XI.1988