

УДК (532.5 + 539.3) : 534.1

© 1989

А. П. Поддубняк

## ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ АКУСТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ОГРАНИЧЕННОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА УПРУГОЙ СФЕРОЙ

Получены асимптотические высокочастотные оценки амплитуд зеркального и не-зеркального отражений с выделением вклада переизлучения звука в окружающую среду поверхностными упругими волнами релеевского типа. Найдены условия, определяющие усиление рассеяния в обратном направлении.

Теоретическое объяснение эффекта обратного отражения [1] при падении ограниченного звукового пучка на плоскую границу раздела жидкость — упругое твердое тело дано в различных ситуациях многими авторами (например, [2]). Как и незеркальное отражение плоской звуковой волны ограниченными упругими телами (пластины, цилиндры, стержни и оболочки, заключенные в экран), наиболее глубоко изученное в работах [3—9], этот эффект есть следствие выполнения условий пространственно-временного резонанса между падающей акустической волной и нормальными поверхностными волнами, возбужденными в упругом твердом теле при полном внутреннем отражении.

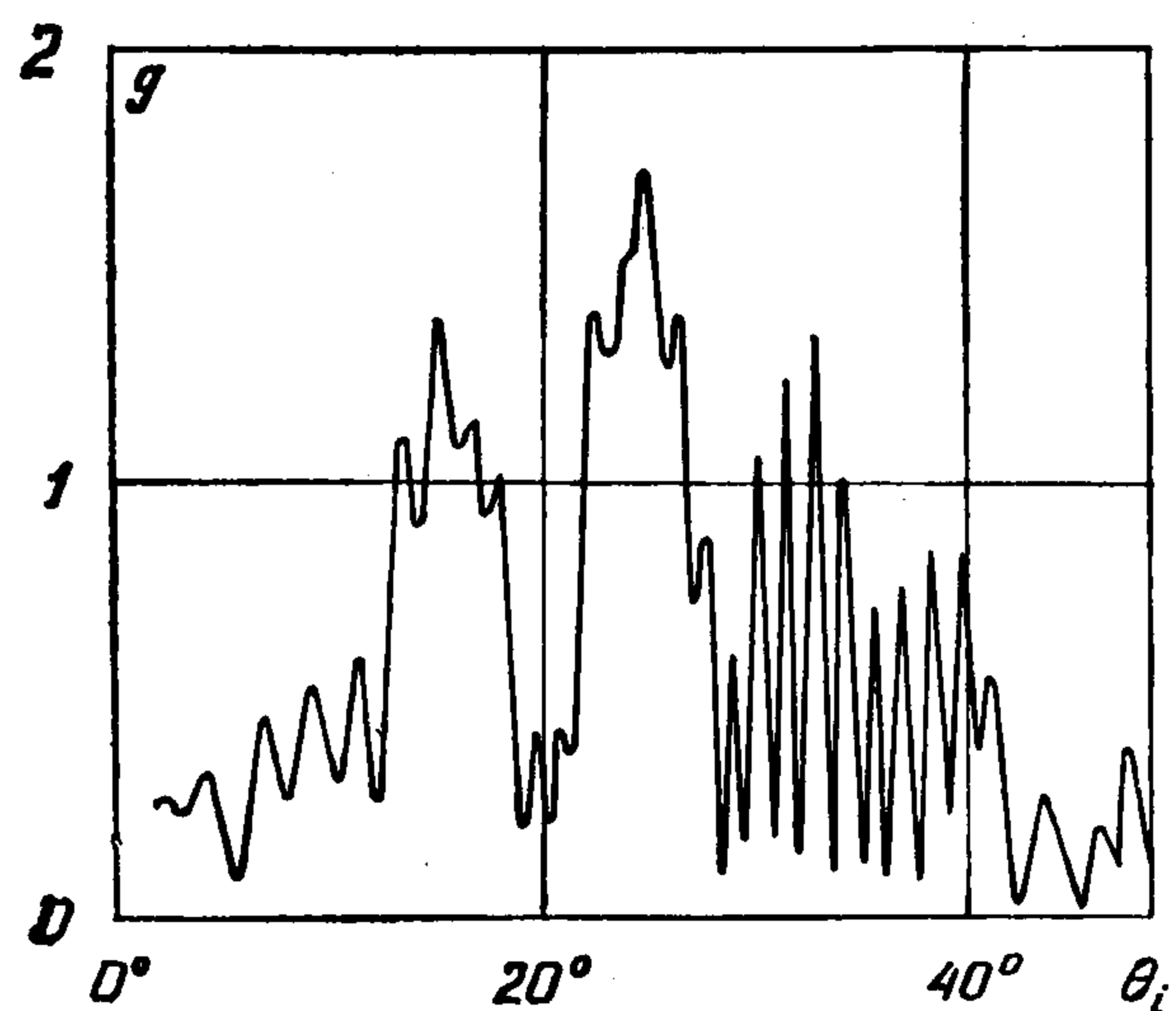
Представляет интерес выявить и описать обратное отражение ограниченного звукового пучка, падающего на криволинейную границу раздела двух сред. Селектирование вкладов поверхностных волн в эхосигнал от упругих цилиндров экспериментально проводилось [10, 11] путем озвучивания остронаправленным пучком узкой части поверхности объекта вблизи критических углов возбуждения поверхностных акустических волн. Было выполнено [12] аналитическое описание такого процесса при аналогичных условиях возбуждения волн в случае сферических и цилиндрических упругих отражателей. Однако переизлученные поверхностными волнами эхосигналы рассматривались лишь в области геометрической тени объектов. Незеркальное отражение, поступающее в обратном направлении непосредственно от озвученного участка границы раздела без предварительного захода в теневую область, не анализировалось.

1. Пусть на упругий объект сферической формы, находящийся в идеальной сжимаемой жидкости, набегают звуковой пучок, эффективное поперечное сечение которого вблизи границы раздела сред представляется в виде узкого кругового кольца шириной  $v_i$ . Акустическое давление падающего пучка выражается формулой

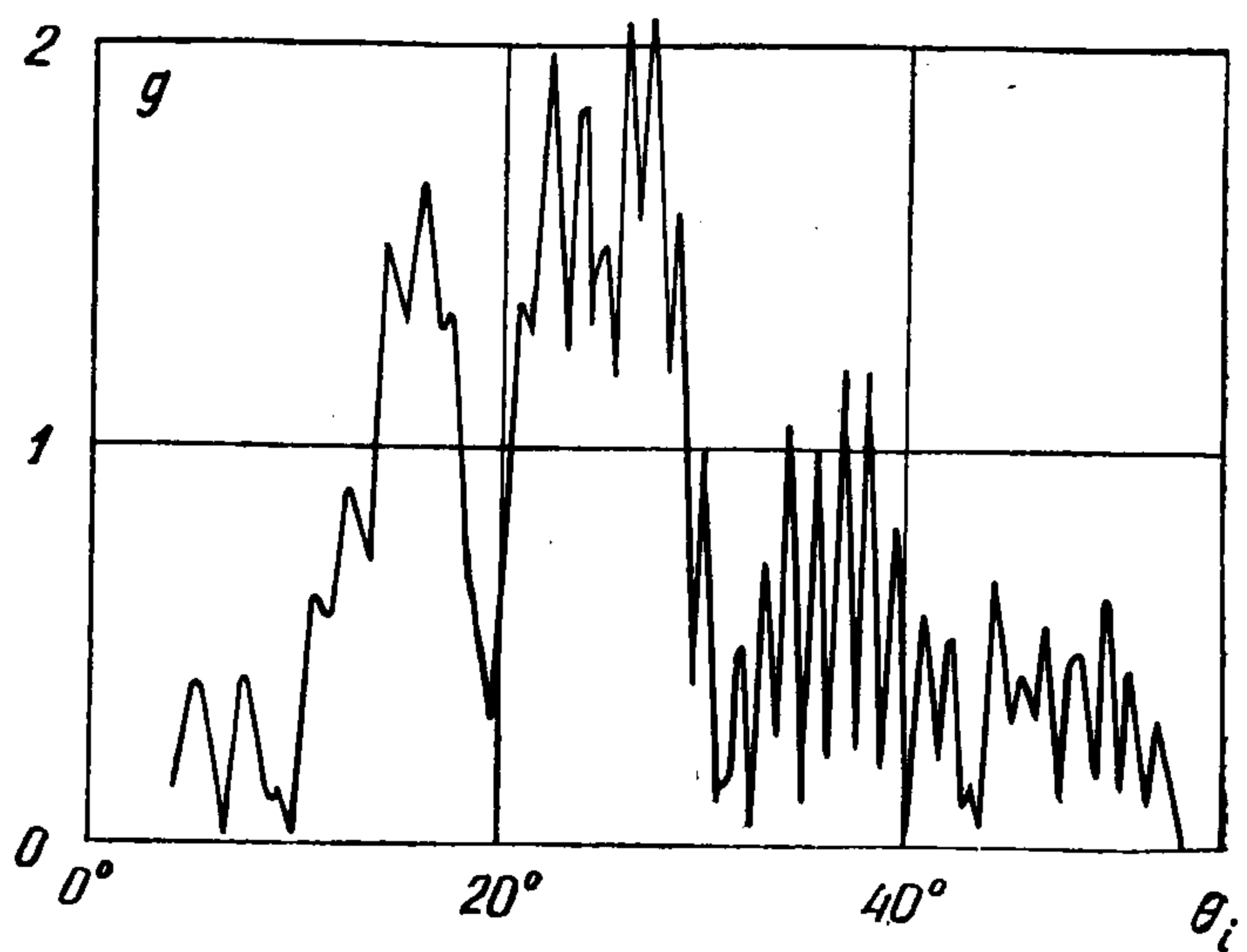
$$p_{inc}(r, \theta, \omega) = e^{ikr \cos \theta} H(\xi_+ - \xi) H(\xi - \xi_-) \quad (1.1)$$

$$\xi = r \sin \theta, \quad \xi_{\pm} = \xi_i \pm \frac{1}{2}v_i$$

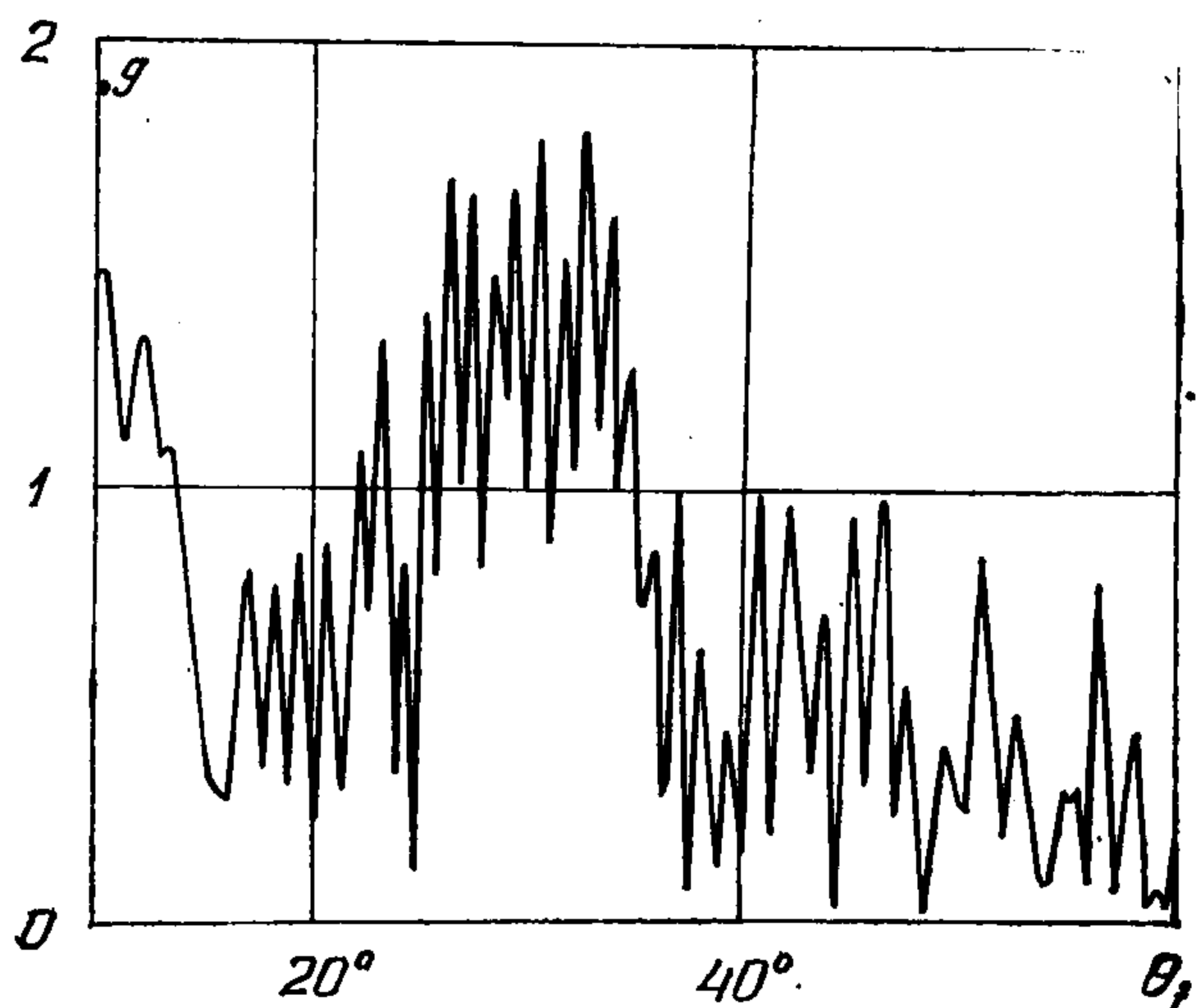
где постоянная нормирования принята равной единице, временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен,  $\xi_i$  — параметр удара центральных лучей пучка,  $r, \theta$  — сферические координаты с началом отсчета в центре объекта,  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  — частота колебаний,  $c$  — скорость звука в жидкости,  $H(x)$  — функция Хевисайда. Набегающая волна озвучивает поверхность сферы  $r = a$  по кольцу  $0 \leq \theta_- \leq \pi - \theta \leq \theta_+$ ,  $\theta_{\pm} = \theta_i \pm \theta_0/2$ , где  $\theta_i$  — прицельный угол пучка,  $\theta_0$  — угловая ширина этого кольца. Комплексную амплитуду акустического давления в рассеянной волне



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

находим в виде разложения по парциальным волнам [12]:

$$p_{sc}(r, \theta, \omega) = i \sum_{l=0}^{\infty} \left( l + \frac{1}{2} \right) f_l^{\circ}(x) h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta), \quad x = ka \quad (1.2)$$

$$f_l^{\circ}(x) = i \frac{j_l^{\circ}(x) F_l(x) - x j_l^{\circ\prime}(x)}{h_l^{(1)}(x) F_l(x) - x h_l^{(1)\prime}(x)} \quad (1.3)$$

$$j_l^{\circ}(x) = \int_{\pi-\theta_+}^{\pi-\theta_-} e^{ix \cos \alpha} P_l(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (1.4)$$

Здесь  $h_l^{(1)}(x)$  — сферическая функция Ганкеля первого рода,  $P_l(\cos \theta)$  — полином Лежандра,  $f_l^{\circ}(x)$  — парциальная амплитуда рассеяния,  $F_l(x)$  — функция податливости препятствия, зависящая от волновых размеров и физико-механических параметров объекта [13]. В волновой зоне ( $r \rightarrow \infty$ ) звуковое давление характеризуется амплитудой рассеяния  $f(\theta, k)$ :

$$p_{sc}(r, \theta, \omega) = r^{-1} e^{ikr} f(\theta, k) \quad (1.5)$$

$$f(\theta, k) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l \left( l + \frac{1}{2} \right) f_l^{\circ}(x) P_l(\cos \theta)$$

Рассмотрим зависимости модулей амплитуд рассеяния от прицельного угла пучка  $\theta_i$  для погруженной в воду стальной сферы [13] с волновым радиусом  $x = 314,36$  при значениях угла развертки пучка  $\theta_0$ , равных 4, 8 и 20° (фиг. 1, 2, 3, соответственно). Амплитуды рассеяния вычислены в локационном направлении с выделением потенциального рассеяния, соответствующего случаю акустически жесткой неподвижной сферы:  $g(\pi, k) = \| f(\pi, k) - f^{(r)}(\pi, k) \| / (2a)$ . Пучки хорошо коллимированы, поскольку даже при  $\theta_0 = 4^\circ$  по ширине озвученного кольца на поверхности сферы ук-

ладывается 3,5 длин падающей волны. Сканирование прицельным углом пучка от малых значений до больших при фиксированной ширине пучка последовательно выявляет области усиленного обратного отражения волн шепчущей галереи продольного ( $\theta_i \approx 15^\circ$ ) и поперечного ( $\theta_i \approx 26^\circ$ ) типа, а также релеевских волн ( $\theta_i \approx 27,4^\circ$ ). Выбранный волновой размер сферы приблизительно соответствует размещению релеевской спектральной линии одной из парциальных амплитуд рассеяния ( $l = 142$ ). Поэтому колебания амплитуды рассеяния в области критического угла возбуждения поверхностной волны релеевского типа носят резонансный характер. Они обусловлены переходом звукового пятна при сканировании по прицельному углу через четверть-волновые зоны Френеля и отсутствием вклада других типов волн. В области критических углов возбуждения волн шепчущей галереи амплитуды рассеяния претерпевают значительное влияние от преломленных волн продольного, поперечного и смешанного, продольно-поперечного типов, переотраженных на поверхности сферы изнутри кратное число раз.

Заметим, что при падении на сферу плоской волны обратное рассеяние происходит за счет многократных огибаний периферических волн и переотражений объемных волн. Узконаправленное озвучивание деформируемого твердого тела ограниченным пучком обнаруживает усиленное незеркальное отражение непосредственно от возбужденной части поверхности при выполнении условий пространственно-временного синхронизма между падающим пучком и переизлученными волнами.

2. Известно, что формирование узконаправленного звукового пучка в пределах линейной акустики возможно лишь при достаточно высоких частотах временного спектра  $x \gg 1$ . Очевидно, что полоса углового спектра также должна быть высокочастотной, т. е. должны возбуждаться парциальные волны с большими значениями угловых моментов  $l$ . При этих условиях возможен асимптотический анализ решения задачи рассеяния.

Применим к ряду (1.2) формулу Пуассона [14]. Тогда получим

$$p_{sc}(r, \theta, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m p_{sm}(r, \theta, \omega), \quad p_{sm}(r, \theta, \omega) = \\ = i \int_0^{\infty} \lambda X(\lambda) h_{\lambda-1/2}^{(1)}(kr) P_{\lambda-1/2}(\cos \theta) e^{2im\lambda} d\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.1)$$

где  $X(\lambda)$  — интерполирующая функция [14], переходящая при  $\lambda = l + 1/2$  в  $f_l^\circ(x)$ ,  $P_{\lambda-1/2}(z)$  — функция Лежандра первого рода.

Путем асимптотического вычисления интегралов можно показать, что ряд (2.1) описывает процессы многократного (с кратностью  $|m| \geq 1$ ) рассеяния, вызванные огибанием звуковых волн замкнутой поверхности объекта и переотражением упругих волн при прохождении звука внутрь препятствия.

Рассмотрим нулевой член в этих формулах с учетом ограниченности падающего пучка. Используя соотношения (1.5), в волновой зоне находим

$$p_{s0}(r, \theta, \omega) = r^{-1} e^{ikr} f_0(\theta, k) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.2)$$

$$f_0(\theta, k) = \frac{1}{k} e^{\pi i/4} \int_0^{\infty} \lambda X(\lambda) e^{-\pi i \lambda/2} P_{\lambda-1/2}(\cos \theta) d\lambda$$

Введем безразмерный параметр удара  $\xi = \lambda/x$  ( $\lambda \gg 1$ ,  $x \gg 1$ ;  $0 < \xi < 1$ ). Вычислив по методу перевала [15] входящие в функцию  $X(\lambda)$  неполные сферические функции Бесселя  $j_{\lambda-1/2}^\circ(x)$  (см. формулу (1.4) при  $l = \lambda - 1/2$ ), находим

$$f_0(\theta, k) = f_{01}(\theta, k) + f_{02}(\theta, k) \quad (2.3)$$

$$f_{01}(\theta, k) = \frac{x^2}{k} \int_{\sin \theta_-}^{\sin \theta_+} \exp[-2ix(\sqrt{1-\xi^2} - \xi \arccos \xi)] \tau(\xi) P_{x\xi-1/2}(\cos \theta) \xi d\xi$$

$$f_{02}(\theta, k) = \frac{x}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \theta_i} \exp(-ix \cos \theta_i) \sum_{\nu=\pm 1} \exp[-\pi i(\nu+1)/4] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \sqrt{\xi} \sqrt{1-\xi^2} \exp\langle -ix \{ \sqrt{1-\xi^2} + \xi [\arcsin \xi - \nu(\pi - \theta_i)] \} \rangle \times$$

$$\times \tau(\xi) \Phi_{\nu}(\xi) \Psi(\xi) P_{x\xi^{-1/2}}(\cos \theta) \xi d\xi$$

$$\tau(\xi) = -\frac{F_{x\xi^{-1/2}}(x) + ix\sqrt{1-\xi^2}}{F_{x\xi^{-1/2}}(x) - ix\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \Phi_{\nu}(\xi) = \frac{\sin[1/2x\theta_0(\sin \theta_i - \nu\xi)]}{\sin \theta_i - \nu\xi}$$

$$\Psi(\xi) = \frac{F_{x\xi^{-1/2}}(x) + ix \cos \theta_i}{F_{x\xi^{-1/2}}(x) + ix\sqrt{1-\xi^2}}$$

где  $\tau(\xi)$  описывает высокочастотные отраженные, переотраженные и поверхностные акустические волны. Так, например, для случая сплошной упругой сферы имеем

$$\tau(\xi) = R_{12}(\xi) + f_2(\xi)/(1 - f_1(\xi)) \quad (2.4)$$

где  $R_{12}$  — коэффициент отражения звуковых волн от поверхности раздела сред, а функции  $f_1, f_2$  [16] отвечают вкладам волн, переотраженных внутри рассеивателя.

Предположим, что озвучивание сферы осуществляется по части ее поверхности вблизи критического угла возбуждения рэлеевских волн. Тогда соотношение (2.4) примет вид

$$\tau(\xi) \approx R_{12}(\xi) \approx -R^*(\xi)/R(\xi), \quad R(\xi) = B(\xi) + N_s A(\xi) \quad (2.5)$$

$$A(\xi) = i \frac{c \sqrt{\xi_L^2 - 1}}{c_L \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{1}{x \sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \frac{c(2 - \xi^2) \sqrt{\xi_L^2 - 1}}{c_L \sqrt{(1 - \xi^2)^3}} - \right.$$

$$\left. - i(2\xi - 2\xi_T^2 + \frac{\xi_L^2 - 2}{2(\xi_L^2 - 1)}) \right] + O(x^{-2}), \quad B(\xi) = (1 - 2\xi_T^2)^2 - 4\xi_T^2 \xi - \frac{2c_T}{x_T c} \times$$

$$\times \left[ \left( 1 + \xi_T^2 - \frac{2\xi_T^2}{\xi_L^2 - 1} \right) \sqrt{\xi_T^2 - 1} + \frac{c_T}{c_L} \left( \xi_T^2 + \frac{2}{\xi_T^2 - 1} \right) \sqrt{\xi_L^2 - 1} \right] + O(x^{-2})$$

$$N_s = \frac{\rho}{\rho_s}, \quad \xi_A = \frac{c_A}{c} \xi > 1 \quad (A = L, T), \quad \zeta = \frac{c_T}{c_L} \sqrt{\xi_L^2 - 1} \sqrt{\xi_T^2 - 1}$$

где  $\rho, \rho_s$  — плотность окружающей жидкости (газа) и материала сферы,  $c_L, c_T$  — скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой сфере, звездочкой отмечена комплексно сопряженная величина.

Полюс функции  $\tau(\xi)$  (полюс Редже рэлеевского типа) определяется решением дисперсионного уравнения  $R(\xi) = 0$ , причем для больших  $x$  это решение может быть получено методом последовательных приближений [17]:

$$\xi = \xi_R = \frac{c}{c_T} [\eta_T + \beta x^{-1} + O(x^{-2})] = \sin \bar{\theta}_R, \quad \bar{\theta}_R = \theta_R + i\nu_R$$

$$\beta = -\frac{1}{8\eta_T} \left\{ 2 \frac{c_T}{c} \left[ \frac{c_T}{c_L} \left( \eta_T^2 + \frac{2}{\mu_T^2} \right) \mu_L - \left( 1 + \eta_T^2 - \frac{2\eta_T^2}{\mu_L^2} \right) \mu_T \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{N_s}{\mu} \left[ \frac{c\mu_L(2 - \eta^2)}{2c_L\mu^3} - 2i \left( \frac{c_T}{c_L} \mu_L \mu_T - \eta_T^2 - \frac{\eta_L^2 - 2}{4\mu_L^2} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left[ 1 - 2\eta_T^2 + \frac{c_T}{c_L} \mu_L \mu_T + \frac{1}{2} \eta_T^2 \left( \frac{c_L \mu_T}{c_T \mu_L} + \frac{c_T \mu_L}{c_L \mu_T} \right) - \frac{iN_s c^2}{8c_L c_T \mu} \left( \frac{c_L^2}{c_T^2 \mu_L} + \frac{\mu_T}{\mu^2} \right) \right]^{-1}$$

$$\eta_A = \frac{c_A}{c} \eta, \quad \mu_A = \sqrt{\eta_A^2 - 1} \quad (A = L, T), \quad \mu = \sqrt{1 - \eta^2} \quad (2.6)$$

где  $\eta = \xi_R^{\infty}$  — решение дисперсионного уравнения для случая плоской границы раздела акустическая жидкость — упругое полупространство,

$\xi_R^\infty = \bar{c}/\bar{c}_R$ ,  $\bar{c}_R$  — комплексная скорость релеевской волны [18],  $\bar{\theta}_R$  — комплексный критический угол возбуждения поверхностной упругой волны на сфере в жидкости. В частности, при  $N_s \ll 1$  находим

$$\eta_T = \varepsilon_T + \alpha_T, \quad \varepsilon_T = \frac{c_T}{c_R^\infty} \approx \frac{1 + \nu_s}{0,862 + 1,14\nu_s}, \quad \varepsilon_L = \frac{c_L}{c_R^\infty}$$

$$\alpha_T = -\frac{iN_s c_L \gamma_L}{8c\varepsilon_T \gamma} \left[ 1 - 2\varepsilon_T^2 + \frac{c_T}{c} \gamma_L \gamma_T + \frac{1}{2} \varepsilon_T^2 \left( \frac{c_L \gamma_T}{c_T \gamma_L} + \frac{c_T \gamma_L}{c_L \gamma_T} \right) \right]^{-1} \quad (2.7)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{c}{c_R^\infty}, \quad \gamma_A = \sqrt{\varepsilon_A^2 - 1} \quad (A = L, T)$$

Здесь  $c_R^\infty$  — скорость волны Релея для упругого полупространства, граничащего с вакуумом [18],  $\nu_s$  — коэффициент Пуассона материала.

На основе соотношений (2.5)–(2.7) коэффициент отражения вблизи полюса Редже представим в виде

$$\tau(\xi) \approx R_{12}(\xi) \approx -\frac{R^*(\xi_R^*)}{R'(\xi_R)} \frac{\xi - \xi_R^*}{\xi - \xi_R} \quad (2.8)$$

где  $\xi_R^*$  — нуль функции  $R^*(\xi)$ , комплексно сопряженный с  $\xi_R$ .

Асимптотическое вычисление интегралов, входящих в функции  $f_{01}$ ,  $f_{02}$  из (2.3), также проведем по методу перевала. При этом, если полюс Редже достаточно удален от действительной оси комплексной плоскости переменного  $\zeta = \xi + i \operatorname{Im} \zeta$ , то главная часть асимптотики определяется вкладом от седловой точки  $\xi_s$ . При  $\operatorname{Im} \xi_R \ll 1$  ( $\nu_R \ll 1$ ) следует также рассмотреть случай, когда полюс Редже находится вблизи точки перевала, положение которой на действительной оси зависит от угла рассеяния  $\theta$  [19]. Так, для функции  $f_{01}$  при немалых  $\operatorname{Im} \xi_R$  с учетом того, что  $\xi_s = \sin[(\pi - \theta)/2]$ , получаем

$$f_{01}(\theta, k) \approx \frac{1}{2} a \exp \left[ -2ix \cos \left( \frac{\pi - \theta}{2} \right) \right] R_{12}(\xi_s) H \left( \theta_0 - \left| \frac{\pi - \theta}{2} - \theta_i \right| \right) \quad (2.9)$$

т. е. значение  $\theta$  удовлетворяет приближенному равенству  $\pi - \theta \approx 2\theta_i$  ( $\theta_0 \ll \theta_i$ ). Таким образом, формула (2.9) соответствует зеркальному отражению. Максимальное усиление зеркально отраженной волны согласно (2.6), (2.8) происходит при падении пучка под критическим углом Релея:  $\theta_i \approx \theta_R$ . К аналогичному выводу приходим и в случае, когда  $\nu_R \ll 1$ .

Рассмотрим теперь функцию  $f_{02}$ . При  $x \gg 1$ ,  $\lambda\theta \gg 1$  находим

$$f_{02}(\theta, k) \approx \frac{1}{\pi k} \sqrt{\frac{\sin \theta_i}{ix \sin \theta}} \exp(-ix \cos \theta_i) \sum_{\nu, \chi = \pm 1} \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} (\nu + \chi) \right] \times$$

$$\times \int_0^\infty f_\nu(\xi) \exp[-ixq_{\nu\chi}(\xi)] d\xi \quad (2.10)$$

$$f_\nu(\xi) = \xi \sqrt{1 - \xi^2} \Phi_\nu(\xi) \Psi(\xi) R_{12}(\xi)$$

$$q_{\nu\chi}(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} + \xi [\arcsin \xi - \nu(\pi - \theta_i) - \chi\theta]$$

Поскольку из уравнения  $q_{\nu\chi}'(\xi) = 0$  определяются лишь два положительных корня:  $\xi_\nu^0 = \nu \sin(\pi - \theta - \theta_i)$ , причем  $\pi - \theta \geq \theta_i$ , если  $\nu = 1$ ,  $\chi = -1$ , и  $0 \leq \pi - \theta \leq \theta_i$ , если  $\nu = -1$ ,  $\chi = 1$ , то для получения главных членов асимптотических разложений в (2.10) достаточно ограничиться рассмотрением членов при  $\nu = 1$ ,  $\chi = -1$  и  $\nu = -1$ ,  $\chi = 1$ . Вычисляя входящие сюда интегралы по методу перевала при условии, что

полюс Редже (2.6) может находиться вблизи седловой точки [19], получим

$$f_{02}(\theta, k) \approx \sum_{\nu=\pm 1} F_{\nu}(\theta, k) \quad (2.11)$$

$$F_{\nu}(\theta, k) = \exp \{ix [\cos(\pi - \theta_i) + \cos(\pi - \theta - \theta_i)]\} \times \\ \times \{a_{\nu} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} b_{\nu}) \exp(-xb_{\nu}^2) \operatorname{erfc}[-ib_{\nu} \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} b_{\nu})] + \\ + (\pi x)^{-1/2} T_{\nu}\} H[\nu(\pi - \theta - \theta_i)] \quad (2.12)$$

$$a_{\nu} = \frac{\sin \theta_R}{2k} \sqrt{\frac{\sin \theta_i}{ix \sin \theta \cos \theta_R}} (\cos \theta_R + \cos \theta_i) \Phi_{\nu}(\xi_R) \operatorname{res}_{\{\xi=\xi_R\}} R_{12}(\xi)$$

$$b_{\nu} = e^{-\pi i/4} \{\cos(\pi - \theta - \theta_i) - \cos \bar{\theta}_R - [\bar{\theta}_R - \nu(\pi - \theta - \theta_i)] \sin \bar{\theta}_R\}^{1/2}$$

$$T_{\nu} = hf_{\nu}(\xi_{\nu}) + \frac{a_{\nu}}{b_{\nu}}, \quad h = e^{-\pi i/4} \sqrt{2 \cos(\pi - \theta - \theta_i)}$$

При  $|b_{\nu}| \sqrt{x} \rightarrow \infty$  ( $\nu = \pm 1$ ), когда полюс Редже (2.5) удален от действительной оси ( $\nu_R \gg 1$ ) из (2.12) находим

$$F_{\nu}(\theta, k) \approx \frac{1}{kx} \sqrt{\frac{2 \sin \theta_i}{\sin \theta \cos(\pi - \theta - \theta_i)}} \exp(-ix \cos \theta_i) \times \\ \times f_{\nu}(\xi_{\nu}) H[\nu(\pi - \theta - \theta_i)] = O(x^{-2}), \quad \nu = \pm 1 \quad (2.13)$$

т. е. вклад в рассеянное поле (2.3) формируется за счет зеркального отражения (2.9).

Если же  $|b_{\nu}| \sqrt{x}$  — небольшая величина, то поведение функций  $F_{\nu}$  определяется в основном за счет экспоненты и функций в (2.12). Так, при  $|b_{\nu}| \sqrt{x} \rightarrow 0$  ( $\nu = \pm 1$ )

$$F_{\nu}(\theta, k) \approx \exp(-ix \cos \theta_i) [a_{\nu} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} b_{\nu}) \exp(-xb_{\nu}^2) + \\ + \sqrt{\pi/x} T_{\nu}] H[\nu(\pi - \theta - \theta_i)] \quad (2.14)$$

При этом, если полюс Редже (2.6) имеет малую мнимую часть, условия

$$b_{\nu}^2 \approx \alpha_{\nu} - i\beta_{\nu} + O(\nu_R^4) \rightarrow 0 \quad (\nu = \pm 1)$$

$$\alpha_{\nu} = \nu_R \{(1 + 1/6 \nu_R^2) [\nu(\pi - \theta - \theta_i) - \theta_R] \cos \theta_R - 1/3 \nu_R^2 \sin \theta_R\}$$

$$\beta_{\nu} = \cos(\pi - \theta - \theta_i) - (1 - 1/2 \nu_R^2) \cos \theta_R + (1 + 1/2 \nu_R^2) \times \\ \times [\nu(\pi - \theta - \theta_i) - \theta_R] \sin \theta_R$$

выполняются, если  $\pi - \theta \approx \theta_i + \theta_R$  при  $\nu = 1$  и  $\pi - \theta \approx \theta_i - \theta_R > 0$  при  $\nu = -1$ .

Анализ выражений (2.12), (2.14) показывает, что экспоненциальное увеличение модулей комплексных амплитуд происходит, если

$$\pi - \theta < \theta_i + \theta_R + \Delta\theta \quad (\nu = 1), \quad \pi - \theta > \theta_i - \theta_R - \Delta\theta \geq 0 \quad (\nu = -1) \\ \Delta\theta = 2\nu_R^2 \operatorname{tg} \theta_R / (6 + \nu_R^2) \quad (2.15)$$

причем для выполнения условия при  $\nu = -1$  необходимо, чтобы прицельный угол падающего пучка  $\theta_i$  несколько превышал критический угол поверхностной волны  $\theta_R$ . Заметим, что эффект возрастания амплитуд незначителен, поскольку при выполнении неравенств (2.15) величина  $|b_{\nu}| \sqrt{x}$  быстро растет, и формула (2.14) теряет смысл, т. е. становится справедливой асимптотика (2.13). При фиксированном  $x$  эффект усиления определяется функцией  $T_{\nu}$ . Значения  $|T_{\nu}|$  существенны, если  $\pi - \theta = \theta_i + \theta_R + \Delta\theta$  ( $\nu = 1$ ),  $\pi - \theta = \theta_i - \theta_R - \Delta\theta \geq 0$  ( $\nu = -1$ ) (2.16)

При этом

$$b_{\nu} \approx e^{-\pi i/4} \nu_R \sqrt{1/2 \cos \theta_R} = O(\nu_R) \quad (\nu = \pm 1)$$

Из соотношений (2.12) видно, что наибольшее усиление функции  $T$

получается, если  $\theta_i = \theta_R + \Delta\theta$ , поскольку тогда

$$a_1 \approx [\text{sh}(1/2 x \theta_0 v_R \cos \theta_R) / (v_R \sqrt{\cos \theta_R})] \text{res } R_{12}(\sin \bar{\theta}_R)$$

Таким образом, экспоненциальное усиление функции  $F_1$ , а следовательно, и  $f_{02}$ , осуществляется как следствие переизлучения релеевской волны для угла рассеяния  $\pi - \theta = 2\theta_i + \Delta\theta$ , т. е. в направлении зеркально отраженной волны. В то же время функция  $a_{-1}$  при  $\theta_i \approx \theta_R$  не является усиливающей. Однако из условий (2.16) следует, что равенство  $\theta_i = \theta_R + \Delta\theta$  соответствует углу рассеяния  $\theta = \pi$ , т. е. при этом формируется обратное (незеркальное) отражение. Значительное увеличение  $|f_{02}|$  вблизи  $\theta = \pi - \delta$  ( $0 < \delta \ll 1$ ) происходит за счет фокусирующего фактора, содержащегося в функции  $a_{-1}$  (2.12).

Заметим, что в данной ситуации асимптотические формулы (2.12) не выполняются. Поэтому поведение амплитуды рассеяния  $f_{02}(\theta, k)$  при  $\theta \rightarrow \pi$  рассмотрим отдельно.

3. Если акустические сигналы принимаются при углах  $\theta \approx \pi$ , то выражение для  $f(\theta, k)$  из (1.5) удобно переписать в виде

$$f(\theta, k) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) e^{i\pi l/2} f_l^\circ(x) P_l(-\cos \theta) \quad (3.1)$$

Используя далее формулу Пуассона и выполнив, по аналогии к соотношениям (1.5), (2.1)–(2.3), асимптотическое вычисление интегралов, получим ( $J_0(z)$  — функция Бесселя)

$$f(\theta, k) \approx \pi i a_0 \text{sgn}(\text{Im } b) \exp(-x b v^2) \text{erfc}[-i b \sqrt{x} \text{sgn}(\text{Im } b)] + \sqrt{\pi/x} T_0 \quad (3.2)$$

$$b = e^{-\pi i/4} \sqrt{\cos \theta_i - \cos \bar{\theta}_R - (\bar{\theta}_R - \theta_i) \sin \bar{\theta}_R}$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{2x(\pi - \theta) \sin \theta_i \text{tg } \theta_R}{\sin \theta} \frac{v_R \sin \theta_R}{k} \frac{\cos \theta_R + \cos \theta_i}{\sin \theta_R + \sin \theta_i}} \times$$

$$\times \sin \left[ \frac{1}{2} x \theta_0 (\sin \bar{\theta}_R + \sin \theta_i) \right] (R^*(\xi_R^*)/R'(\xi_R)) J_0[x(\pi - \theta) \sin \bar{\theta}_R]$$

$$T_0 = \exp^{\pi i/4} \sqrt{2 \cos \theta_i} f(\sin \theta_i) + a_0/b$$

$$f(\sin \theta_i) = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{x(\pi - \theta) \sin \theta_i \sin 2\theta_i}{\sin \theta}} \sin(x\theta_0 \sin \theta_i) \times$$

$$\times R_{12}(\sin \theta_i) J_0[x(\pi - \theta) \sin \theta_i] \exp(-\pi i \cos \theta_i)$$

Анализ соотношения (3.2) показывает, что для  $\varepsilon_0 = |\theta_i - \theta_R| \neq 0$  при  $v_R > 0$  модуль амплитуды рассеяния имеет характер:  $|f(\theta, k)| \sim \sim \exp(-x v_R \varepsilon_0 \cos \theta_R)$ . Усиливающий эффект незеркального отражения получается при  $\theta_i \approx \theta_R$ ,  $v_R \ll 1$ ; тогда формула (3.2) принимает вид

$$f(\theta, k) \approx \frac{\pi i v_R}{k} \sqrt{\frac{2x(\pi - \theta) \cos \theta_R}{\sin \theta}} \sin \theta_R \sin(x\theta_0 \sin \theta_R) (R^*(\xi_R^*)/R'(\xi_R)) \times$$

$$\times J_0[(\pi - \theta) x \sin \theta_R] \exp[-ix(1 + 1/2 v_R^2) \cos \theta_R] \times$$

$$\times \left\{ \text{erfc}(u) + \frac{1}{\pi} \exp(-u^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-n^2/4)}{n^2 + 4u^2} [-2u + \exp(-2iu^2)] \times \right.$$

$$\left. \times (2u \text{ch } nu + in \text{sh } nu) \right\}, \quad u = 1/2 v_R \sqrt{x \cos \theta_R} \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) следует, что максимальное значение модуля амплитуды незеркального отражения, а также локационного сечения рассеяния будет тогда, когда по ширине озвучиваемого кольца на поверхности сферы

укладывается число волн, кратное четверти длины поверхностной волны Релея:

$$a\theta_0 \approx 1/2 (n + 1/2) \lambda_R \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \lambda_R = 2\pi a / \sin \theta_R$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Sasaki S.* Back reflection of ultrasonic wave obliquely incident to solid surface in water // *Japan. J. Appl. Phys.* 1963. V. 2. No. 3. P. 198.
2. *Rousseau M., Gatignol P.* Analyse asymptotique des faisceaux ultrasonores et problèmes d'interface // *J. Méc. Théor. et appl.* 1986. V. 5. Num. spéc. P. 273—293.
3. *Лямшев Л. М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 73 с.
4. *Лямшев Л. М.* Незеркальное отражение звука тонкой цилиндрической оболочкой // *Акуст. журн.* 1956. Т. 2. № 2. С. 188—193.
5. *Лямшев Л. М., Рудаков С. Н.* Отражение звука толстыми ограниченными пластинками в жидкости // *Акуст. журн.* 1956. Т. 2. № 2. С. 228—230.
6. *Лямшев Л. М.* Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // *Докл. АН СССР.* 1957. Т. 115. № 2. С. 271—273.
7. *Лямшев Л. М.* Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // *Акуст. журн.* 1958. Т. 4. № 2. С. 51—58.
8. *Лямшев Л. М., Рудаков С. Н.* Экспериментальное исследование незеркального отражения звука тонкими ограниченными стержнями в воде // *Акуст. журн.* 1958. Т. 4. № 3. С. 283—285.
9. *Лямшев Л. М.* Рассеяние звука упругими цилиндрами // *Акуст. журн.* 1959. Т. 5. № 1. С. 58—63.
10. *Goodman R. R., Bunney R. E., Marshall S. W.* Observation of circumferential waves on solid aluminium cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1967. V. 42. No. 2. P. 523—524.
11. *Bunney R. E., Goodman R. R., Marshall S. W.* Rayleigh and Lamb waves on cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1969. V. 46. No. 5. Pt 2. P. 1223—1233.
12. *Подстригач Я. С., Поддубняк А. П.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. Киев: Наук. думка, 1986. 262 с.
13. *Hocking R.* Analysis of echoes from a solid elastic sphere in water // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1962. V. 34. No. 10. P. 1582—1592.
14. *Nussenzveig H. M.* High-frequency scattering by an impenetrable sphere // *Ann. Phys.* 1965. V. 34. No. 1. P. 23—95.
15. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
16. *Поддубняк А. П.* Высокочастотные асимптотики отраженных и проходящих волн при рассеянии звука поллой упругой сферой с жидким наполнителем // *ПММ.* 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 954—961.
17. *Frisk G. V., Dickey J. W., Uberall H.* Surface wave modes on elastic cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1975. V. 58. No. 5. P. 996—1008.
18. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
19. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.

Львов

Поступила в редакцию  
19.VII.1988