

УДК (532.5 + 539.3) : 534.1

© 1989

Р. В. Гольдштейн, А. В. Марченко

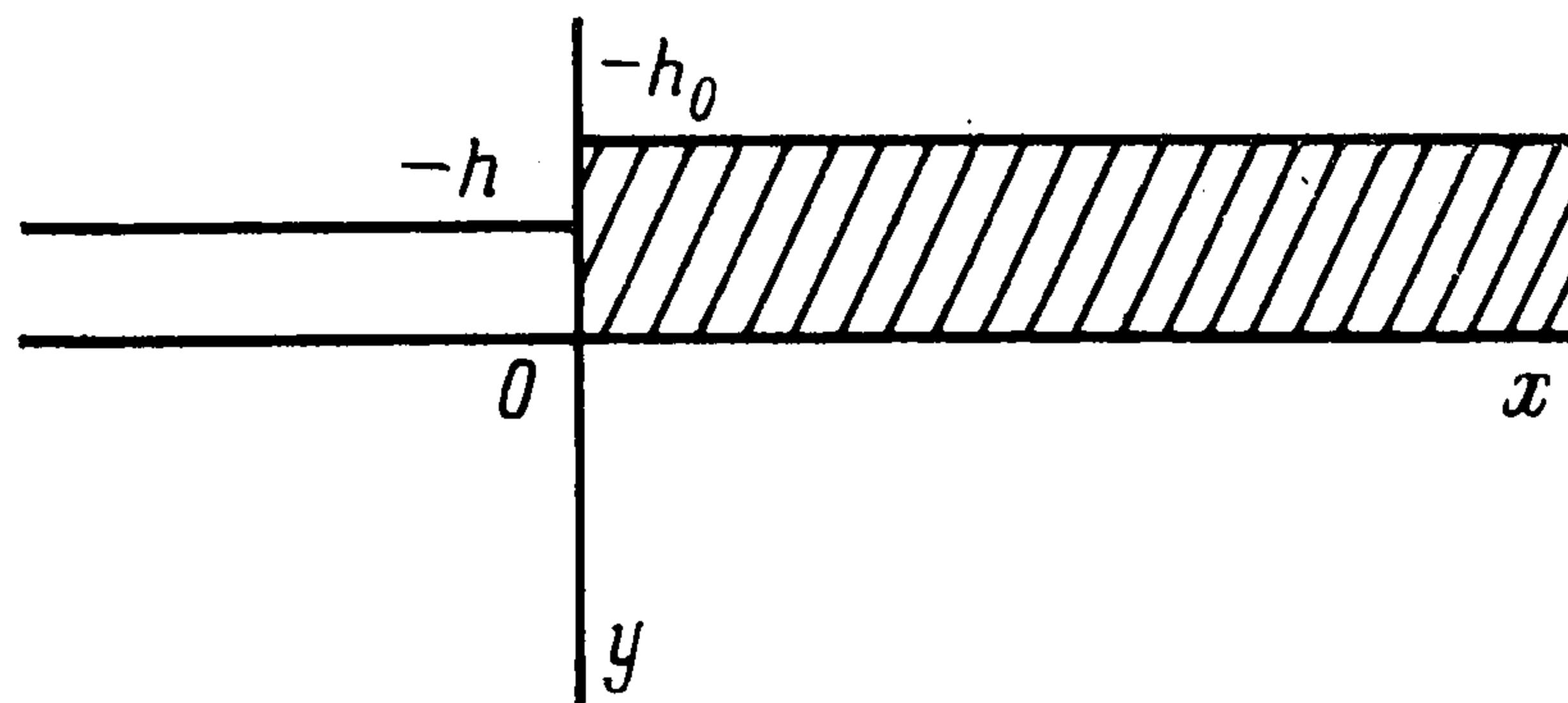
## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА КРОМКЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Рассматривается дифракция плоских поверхностных гравитационных волн на кромке ледяного покрова, лежащего на поверхности несжимаемой жидкости бесконечно большой глубины. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной. Определяются коэффициенты отражения и прохождения волны при ее взаимодействии с ледяным покровом. Строится поле волн в жидкости при условии, что на кромку ледяного покрова действуют периодическая сосредоточенная сила и сосредоточенный момент. Показано, что с увеличением длины падающей волны коэффициент отражения стремится к нулю, а коэффициент прохождения к единице.

Задачи о рассеянии гидроакустических волн на неоднородностях тонкой упругой пластины, покрывающей всю поверхность жидкости, исследовались в работах [1—4]. Рассматривалась задача о дифракции волны на кромке лежащего на поверхности стратифицированной жидкости ледяного покрова, моделируемого твердой крышкой [5]. Методом Питерса исследовалась [6] дифракция поверхностных волн от места спада двух ледовых полей разной толщины. Было показано, что при увеличении длины падающей волны коэффициент отражения стремится к нулю, а коэффициент прохождения к единице.

1. Рассмотрим потенциальные движения тяжелой несжимаемой жидкости большой глубины, находящейся при  $x > 0$  под ледяным покровом. Потенциал скоростей частиц жидкости обозначим  $\varphi$ .

В стационарном случае ледяной покров погружен в жидкость на глубину  $h$ , которую можно определить из закона Архимеда:  $h = h_0 \rho_i / \rho_w$ , где



Фиг. 1

$\rho_i, \rho_w$  — плотности льда и жидкости,  $h_0$  — толщина льда. Проведем горизонтальную ось  $x$  по нижней поверхности ледяного покрова в состоянии покоя. Ось  $y$  проведем вертикально вниз (фиг. 1). Пусть  $\eta$  — отклонение свободной поверхности жидкости от горизонтального положения равновесия.

Введем безразмерные переменные (отмеченные штрихами):

$$\varphi' = \varphi (a \sqrt{g\lambda})^{-1}, \quad x' = x\lambda^{-1}, \quad y' = y\lambda^{-1}, \quad t' = t\sqrt{g/\lambda}$$

где  $a$  — амплитуда падающей волны,  $\lambda$  — деленная на  $2\pi$  длина падающей волны.

Полная система уравнений с линеаризованными граничными условиями, описывающая рассматриваемый процесс, в безразмерных переменных

выглядит следующим образом (далее штрихи опущены):

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0; \quad x < 0, \quad -\Delta < y; \quad x > 0, \quad 0 < y, \quad \Delta \equiv h\lambda^{-1} \quad (1.1)$$

$$p = p_a = \text{const}; \quad x < 0, \quad y = -\Delta \quad (1.2)$$

$$\eta_t = \Phi_y; \quad x < 0, \quad y = -\Delta; \quad x > 0, \quad y = 0 \quad (1.3)$$

$$p = p_i + p_a; \quad x > 0, \quad y = 0 \quad (1.4)$$

$$\Phi \rightarrow 0; \quad y \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Здесь  $p$  — давление в жидкости,  $p_a$  — атмосферное давление,  $p_i$  — добавочное давление за счет ледяного покрова.

Запишем интеграл Коши — Лагранжа

$$\varepsilon\Phi_t - \varepsilon y + p/(\rho_w g \lambda) + \Delta = f(t), \quad \varepsilon \equiv a\lambda^{-1} \quad (1.6)$$

Полагая  $f(t) = p_a / (\rho_w g \lambda) + \Delta$ , граничные условия (1.2), (1.3) с использованием (1.6) можно переписать в виде

$$\Phi_{tt} - \Phi_y = 0, \quad y = -\Delta, \quad x < 0 \quad (1.7)$$

Добавочное давление, вносимое ледяным покровом в жидкость, представим в виде:  $p_i = p_u + \rho_i h_0 g$ , где  $p_u$  — давление, обусловленное упругостью льда. Давление  $p_u$  можно определить из уравнения колебаний тонкой упругой пластины [7], которой в данной задаче моделируется ледяной покров

$$\frac{p_u}{\rho_w g \lambda} = -\varepsilon \Delta \eta_{tt} - \varepsilon D \eta_{xxxx}, \quad D = \frac{E h_0^3}{12(1 - \tilde{\nu}^2) \rho_w g \lambda^3} \quad (1.8)$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда.

Граничные условия (1.3), (1.4) с использованием (1.8) можно записать в виде

$$\Phi_{tt} - \Phi_y - \Delta \Phi_{ytt} - D \Phi_{yxxxx} = 0; \quad x > 0, \quad y = 0 \quad (1.9)$$

Далее будут рассматриваться длинные по сравнению с толщиной льда волны и поэтому полагается  $\Delta = 0$ . Предполагается, что зависимость всех функций от времени выражается в безразмерном виде множителем  $e^{it}$ . При учете вышесказанного, а также соотношений (1.7), (1.9) систему (1.1)—(1.5) можно записать в виде

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (1.10)$$

$$\Phi + \Phi_y = 0; \quad -\infty < x < 0, \quad y = 0 \quad (1.11)$$

$$\Phi + \Phi_y + D \Phi_{yxxxx} = 0; \quad 0 < x < \infty, \quad y = 0 \quad (1.12)$$

$$\Phi \rightarrow 0; \quad y \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

Точное решение задачи (1.10)—(1.13), как будет видно из дальнейшего, неоднозначно и зависит от четырех постоянных:  $A_{\pm}$ ,  $k_{\pm}$ .

Рассматриваются три задачи:

а) дифракция плоской волны на кромке ледяного покрова; волна приходит со стороны чистой воды ( $x < 0$ );

б) дифракция плоской волны на кромке ледяного покрова; волна приходит со стороны жидкости, находящейся подо льдом ( $x > 0$ );

в) определение движения жидкости, если на кромку ледяного покрова действуют периодические сосредоточенные сила и момент.

Сосредоточенные сила и момент в безразмерном виде определяются следующими формулами [1]:

$$f = -i\Phi_{yxxx}, \quad m = -i\Phi_{yxx}$$

В качестве характерных величин силы и момента взяты

$$D_f = \frac{Eh_0^3 a}{12(1-\nu^2)\lambda^3}, \quad D_m = \frac{Eh_0^3 a}{12(1-\nu^2)\lambda^2}$$

В задачах а) и б) постоянные  $A_{\pm}$ ,  $k_{\pm}$  определяются из условий

$$\varphi \rightarrow e^{-(ix+y)} + R_1 e^{ix-y}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (1.14)$$

$$\varphi \rightarrow e^{k(ix-y)} + R_2 e^{-k(ix+y)}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\varphi \rightarrow T_1 e^{-k(ix+y)}, \quad x \rightarrow +\infty; \quad (1.15)$$

$$\varphi \rightarrow T_2 e^{ix-y}, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$f \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0; \quad x \rightarrow +0, \quad y \rightarrow 0 \quad (1.16)$$

$R_{1,2}$ ,  $T_{1,2}$  — коэффициенты отражения и прохождения волны.

В задаче в) постоянные  $A_{\pm}$ ,  $k_{\pm}$  определяются из условий

$$\varphi \rightarrow R_3 e^{-k(ix+y)}, \quad x \rightarrow +\infty; \quad \varphi \rightarrow T_2 e^{ix-y}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (1.17)$$

$$f \rightarrow -iF', \quad m \rightarrow -iM'; \quad x \rightarrow +0, \quad y \rightarrow 0 \quad (1.18)$$

$M'$  и  $F'$  связаны с размерными величинами действующих сил и моментов формулами  $M = -iM' D_m$ ,  $F = -iF' D_f$ .

2. Решение рассматриваемых задач будем искать в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} p(k) e^{ikx - |k|y} dk \quad (2.1)$$

Решение в форме (2.1) тождественно удовлетворяет уравнению (1.10) и условию (1.13). Вследствие того что во всей области движения нет источников и стоков, интеграл (2.1) должен сходиться в каждой точке полупространства  $y > 0$ . Отсюда имеем

$$p(k) < O(k^{-2}), \quad |k| \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

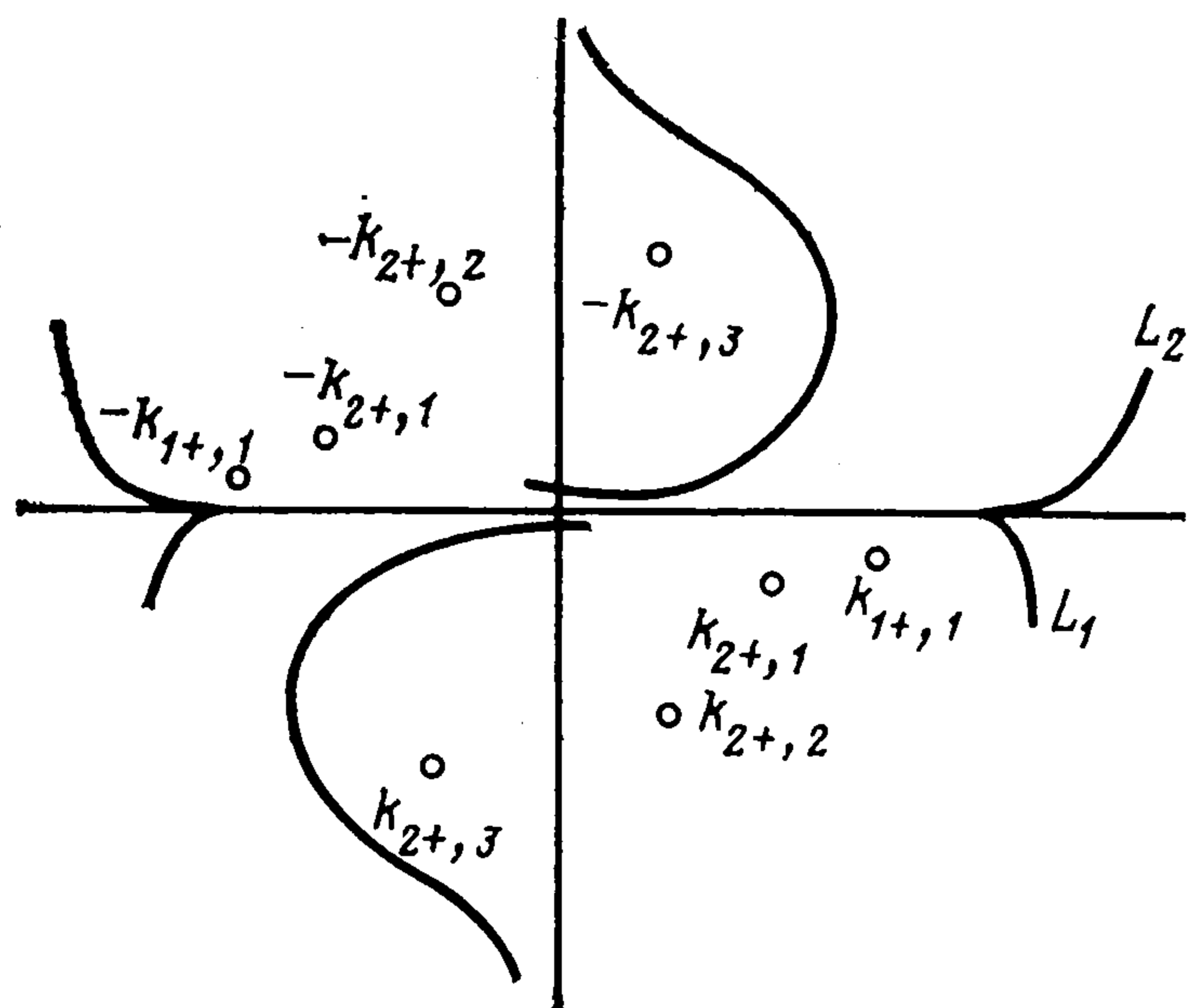
В формуле (2.1) контур интегрирования можно деформировать в области аналитичности функции  $p(k)$  в плоскости  $k$ . Подставляя (2.1) в (1.11), (1.12), получаем

$$\int_{L_1} p(k) (1 - |k|) e^{ikx} dk = 0; \quad x < 0, \quad \text{Im } k \leq 0 \quad (2.3)$$

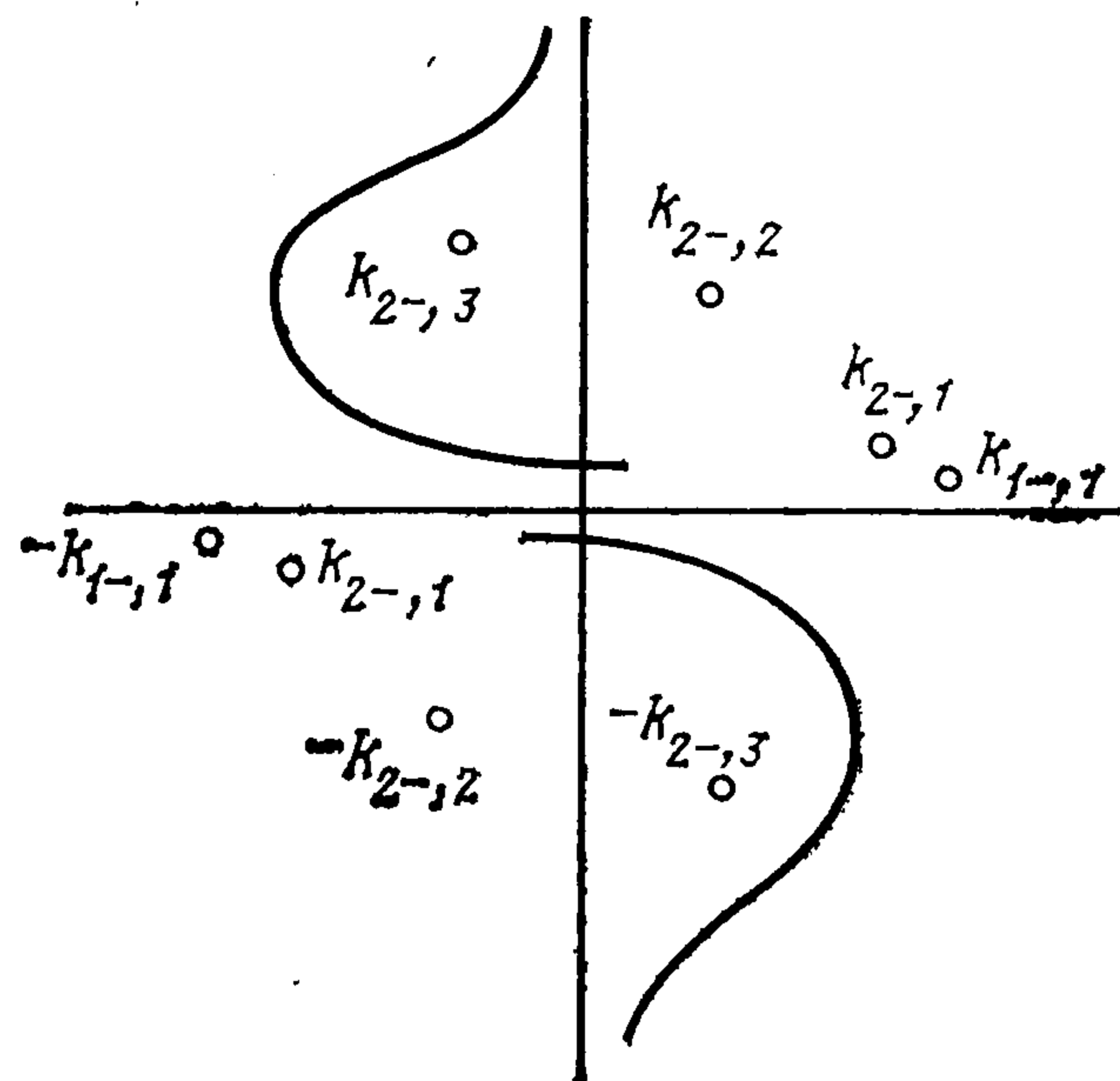
$$\int_{L_2} p(k) (1 - |k|(1 + Dk^4)) e^{ikx} dk = 0; \quad x > 0, \quad \text{Im } k \geq 0 \quad (2.4)$$

Кривые  $L_1$  и  $L_2$  лежат соответственно в нижней и верхней полуплоскостях  $k$ . Отметим, что если бы в (2.3), (2.4) пределы интегрирования остались равными  $\pm\infty$ , как в (2.1), то интегралы (2.3), (2.4) расходились бы в обычном смысле. Для получения (2.3) надо вначале деформировать контур интегрирования в (2.1) в нижней полуплоскости  $k$  таким образом, чтобы концы  $L_1$  подходили к бесконечно удаленной точке по направлениям, отличным от действительной оси, а затем уже подставлять  $\varphi$  в граничное условие (1.11). Аналогичную процедуру надо провести в верхней полуплоскости  $k$  для получения (2.4).

При переходе в комплексную плоскость  $k$  необходимо определить функцию  $|k|$ . Определим ее как предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функций  $\kappa_{\pm}$ , аналитичных на двулистной римановой поверхности:  $\kappa_{\pm} = \sqrt{k^2 \pm i\varepsilon^2}$ , причем выбирается тот лист римановой поверхности, на действительной оси которого  $\text{Re } \kappa_{\pm} > 0$ . Обозначим  $|k|_{\pm} = \lim \kappa_{\pm}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отметим, что в плоскости  $k$  функции  $|k|_{\pm}$  могут принимать различные значения, однако на действительной оси они обязательно равны  $|k|$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнения (2.3), (2.4) будут удовлетворены тождественно, если предположить, что]

$p(k) (|k|_{\pm} - 1) \equiv \Phi_{-}(k)$ ,  $p(k) (|k|_{\pm} (k^4 + D^{-1}) - D^{-1}) \equiv \Phi_{+}(k)$  где  $\Phi_{+}$  и  $\Phi_{-}$  — функции, аналитичные в верхней и нижней полуплоскостях  $k$  соответственно. На бесконечности  $\Phi_{\pm}$  могут иметь особенности типа полюса конечного порядка. На действительной оси  $k$

$$\Phi_{+}/\Phi_{-} = [ |k| (k^4 + D^{-1}) - D^{-1} ] / (|k| - 1) \quad (2.5)$$

Для нахождения  $\Phi_{+}$  и  $\Phi_{-}$  проведем факторизацию функций в правой части соотношения (2.5).

Функции  $G_{1\pm} \equiv \kappa_{\pm} (\kappa_{\pm} - 1)$ ,  $G_{2\pm} \equiv \kappa_{\pm}^2 (\kappa_{\pm}^4 + D^{-1}) - D^{-1} \kappa_{\pm}$  имеют в комплексной плоскости  $k$  соответственно 4 и 12 корней. Для каждого корня есть корень с противоположным знаком. Каждая из функций  $G_{i\pm}$  имеет корни  $k = \pm \varepsilon e^{\pm i\pi/4}$ , которые лежат на разрезах римановой поверхности и в дальнейшем рассматриваться не будут.

При определении  $\kappa_{+}$  разрежем плоскость  $k$ , как показано на фиг. 2, а при определении  $\kappa_{-}$  — как показано на фиг. 3. При помощи критерия Раусса — Гурвица легко установить расположение корней  $G_{i\pm}$  на плоскости  $k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Именно  $G_{1+}$  имеет два корня  $\pm k_{1+,1}$ , близких к  $\pm 1$  и лежащих во втором и четвертом квадрантах,  $G_{1-}$  имеет два корня  $\pm k_{1-,1}$ , близких к  $\pm 1$  и лежащих в первом и третьем квадрантах. При  $\varepsilon = 0$  выполняется равенство  $k_{1\pm,1} = 1$ . Функция  $G_{2+}$  на рассматриваемом листе имеет корни  $\pm k_{2+,1}$ , лежащие во втором и четвертом квадрантах и при  $\varepsilon = 0$  принимающие действительные значения  $\pm k_{2+,1}$ , корни  $\pm k_{2+,2}$ ,  $\pm k_{2+,3}$ , положение которых указано на фиг. 2. Функция  $G_{2-}$  на рассматриваемом листе имеет корни  $\pm k_{2-,1}$ , лежащие в первом и третьем квадрантах и при  $\varepsilon = 0$  принимающие действительные значения  $\pm k_{2-,1}$ , корни  $\pm k_{2-,2}$ ,  $\pm k_{2-,3}$ , положение которых указано на фиг. 3.

Отметим, что при  $D \rightarrow 0$

$$k_{2,1} \rightarrow 1, \quad k_{2-,2} \rightarrow D^{-1} e^{i\pi/4}, \quad k_{2-,3} \rightarrow -k_{2+,2}$$

Введем функции

$$g_{i\pm} = G_{i\pm} / \Pi_{i\pm}, \quad \Pi_{1\pm} = k^2 - k_{1\pm,1}^2 \\ \Pi_{2\pm} = (k^2 - k_{2\pm,1}^2) (k^2 - k_{2\pm,2}^2) (k^2 - k_{2\pm,3}^2)$$

В предельном случае  $\varepsilon = 0$  функции  $g_{i\pm}$  не имеют на рассматриваемом листе нулей, ограничены и на бесконечности стремятся к единице. Эти

Функции могут быть факторизованы следующим образом [8]:

$$g_{i\pm} = g_{i\pm}^+ g_{i\pm}^-, \quad g_{i\pm}^\pm(k) = \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g_{i\pm}(\lambda)}{\lambda - k} d\lambda \right] \quad (2.6)$$

Здесь  $g_{i\pm}^+$ ,  $g_{i\pm}^-$  — функции, аналитичные в верхней и нижней полуплоскостях  $k$  соответственно.

На действительной оси, по теореме Сохоцкого, имеем

$$g_{i\pm}^\pm(k) = \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g_{i\pm}(\lambda)}{\lambda - k} d\lambda \right] G(k) \\ G(k) = \sqrt{g_{i\pm}(k)}, \quad k = \operatorname{Re} k \pm i0 \quad (2.7)$$

Из (2.6) следует, что

$$\frac{g_{1\pm}^\pm}{g_{2\pm}^\pm} = \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln [g_{1\pm}(\lambda)/g_{2\pm}(\lambda)]}{\lambda - k} d\lambda \right]. \quad (2.8)$$

Рассмотрим предельный случай  $D \rightarrow 0$ . Подставляя асимптотическое значение корней в определение  $g_{i\pm}$ , получаем, что  $g_{1\pm} \rightarrow g_{2\pm}$  при  $D \rightarrow 0$  и, следовательно,

$$g_{1\pm}^\pm \rightarrow g_{2\pm}^\pm, \quad D \rightarrow 0.$$

Перепишем соотношения (2.5) в виде

$$\frac{\Phi_+ \Pi_{1\pm}^+ g_{1\pm}^+}{\Pi_{2\pm}^+ g_{2\pm}^+} = \frac{\Phi_- \Pi_{2\pm}^- g_{2\pm}^-}{\Pi_{1\pm}^- g_{1\pm}^-} \equiv F_\pm \quad (2.9)$$

$$\Pi_{1+}^\pm = k \mp k_{1+,1}, \quad \Pi_{2+}^\pm = (k \mp k_{2+,1})(k \mp k_{2+,2})(k \mp k_{2+,3}) \quad \Pi_{1-}^\pm = k \pm k_{1-,1} \\ \Pi_{2-}^\pm = (k \pm k_{2-,1})(k \pm k_{2-,2})(k \pm k_{2-,3})$$

Из (2.2), (2.9) следует, что  $F_\pm$  аналитичны во всей плоскости  $k$ , а при  $|k| \rightarrow \infty$  выполняется условие  $F_\pm \lesssim O(k)$ . По теореме Лиувилля [9]. функции  $F_\pm$  полиномы первого порядка

$$F_+ \equiv A_+ (k - k_+), \quad F_- \equiv A_- (k - k_-)$$

Из (2.1) и из определения  $\Phi_\pm$  следует, что решение системы (1.10)—(1.13) можно записать в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{F_+ |k|_+ \exp(-|k|_+ y)}{\Pi_{1+}^+ \Pi_{2+}^- g_{1+}^+ g_{2+}^-} + \frac{F_- |k|_- \exp(-|k|_- y)}{\Pi_{1-}^+ \Pi_{2-}^- g_{1-}^+ g_{2-}^-} \right] \exp(ikx) dk \quad (2.10)$$

Формула (2.10) определяет непрерывную и ограниченную в области  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $y > 0$  функцию  $\varphi$ , зависящую от четырех постоянных  $A_\pm$ ,  $k_\pm$ .

3. Для анализа решения (2.10) и определения постоянных  $A_\pm$ ,  $k_\pm$  из условий (1.14)—(1.18) деформируем контур интегрирования в (2.10) при  $x < 0$  в кривую  $L_1$  и при  $x > 0$  в кривую  $L_2$ . Беря вычеты в особенностях подинтегральных функций, интегралы по  $L_1$  и  $L_2$  можно свести к интегралам по мнимым полуосям и привести (2.12) к виду

$$x < 0, \quad \varphi = -F_+ (1) \chi_+^- (1) \exp(ix - y) \\ + F_- (-1) \chi_-^- (-1) \exp(-ix - y) - I_- \quad (3.1)$$

$$x > 0, \quad \varphi = -F_+ (-k_{2-,1}) \alpha_1^+ \exp[k_{2-,1}(-ix - y)] + \\ + F_- (k_{2-,1}) \alpha_1^- \exp[k_{2-,1}(ix - y)] - [F_+ (k_{2+,2}) + \alpha_2^+ + \\ + F_- (-k_{2+,2}) \alpha_2^-] \exp[k_{2+,2}(-ix - y)] + [F_+ (k_{2-,2}) \alpha_3^+ + F_- (k_{2-,2}) \alpha_3^-] \times \\ \times \exp[k_{2-,2}(ix - y)] + I_+ \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\alpha_1^\pm &= \chi_\pm^+ (\mp k_{2-,1}) [(k_{2-,1} - k_{2-,2}) (k_{2-,1} - k_{2+,2}) (k_{2-,1} - k_{2-,3}) (k_{2-,1} - k_{2+,3})]^{-1} \\ \alpha_2^\pm &= \chi_\pm^+ (-k_{2+,2}) [(k_{2-,1} - k_{2+,2}) (k_{2-,2} - k_{2+,2}) (k_{2-,3} - k_{2+,2}) (k_{2+,3} - k_{2+,2})]^{-1}\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\alpha_3^\pm &= \chi_\pm^+ (k_{2-,2}) [(k_{2-,2} - k_{2-,1}) (k_{2-,2} - k_{2+,2}) (k_{2-,2} - k_{2-,3}) (k_{2-,2} - k_{2+,3})]^{-1}, \\ \chi_\pm^\pm &= g_{1\pm}^\pm \Pi_{1\pm}^\pm / (g_{2\pm}^\pm \Pi_{2\pm}^\pm)\end{aligned}$$

$$I_- = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} \frac{F_+ \chi_+^- + F_- \chi_-^-}{k^2 - 1} [(k-1)e^{ky} + (k+1)e^{-ky}] e^{ikx} dk$$

$$\begin{aligned}I_+ &= \frac{D}{2\pi i} \int_0^{i\infty} \frac{F_+ \chi_+^+ + F_- \chi_-^+}{k^2 (Dk^4 + 1)^2 - 1} [(k(Dk^4 + 1) - 1)e^{ky} + \\ &+ (k(Dk^4 + 1) + 1)e^{-ky}] e^{ikx} dk\end{aligned}$$

Из формул (3.2) определим сосредоточенные силы и моменты, действующие на кромку ледяного покрова

$$\varphi_{yxx}(y=0, x=+0) = A_+ r_1^+ + A_+ k_+ r_2^+ + A_- r_1^- + A_- k_- r_2^- \quad (3.4)$$

$$\varphi_{yxxx}(y=0, x=+0) = A_+ p_1^+ + A_+ k_+ p_2^+ + A_- p_1^- + A_- k_- p_2^-$$

$$r_1^\pm = k_{2-,1}^4 \alpha_1^\pm + k_{2+,2}^4 \alpha_2^\pm + k_{2-,2}^4 \alpha_3^\pm + K_4^\pm \quad (3.5)$$

$$r_2^\pm = k_{2-,1}^3 \alpha_1^\pm + k_{2+,2}^3 \alpha_2^\pm - k_{2-,2}^3 \alpha_3^\pm - K_3^\pm$$

$$p_1^\pm = -i [\pm k_{2-,1}^5 \alpha_1^\pm + k_{2+,2}^5 \alpha_2^\pm - k_{2-,2}^5 \alpha_3^\pm - K_5^\pm]$$

$$p_2^\pm = -i [k_{2-,1}^4 \alpha_1^\pm + k_{2+,2}^4 \alpha_2^\pm + k_{2-,2}^4 \alpha_3^\pm + K_4^\pm]$$

$$K_n^\pm = \frac{D}{2\pi i} \int_0^{i\infty} k^n J^\pm dk, \quad J^\pm = -\frac{2\chi_\pm^+}{k^2 (Dk^4 + 1) - 1}$$

Рассмотрим задачи *a*, *б*. Из (1.14), (1.15), (3.1), (3.2) имеем

$$k_- = k_{2-,1}, \quad A_- = -[(1 + k_{2-,1}) \chi_-^- (-1)]^{-1} \text{ (задача } a)$$

$$R_1 = -A_+ (1 - k_+) \chi_+^- (1), \quad T_1 = A_+ (k_{2-,1} + k_+) \alpha_1^+$$

$$k_- = -1, \quad A_- = [(1 + k_{2-,1}) \alpha_1^-]^{-1} \text{ (задача } б) \quad (3.6)$$

$$R_2 = A_+ (k_{2-,1} + k_+) \alpha_1^+, \quad T_2 = -A_+ (1 - k_+) \chi_+^- (1)$$

Постоянные  $A_+$ ,  $k_+$  находятся из соотношений (1.16), (3.4)

$$A_+ = (p_3 r_2^+ - r_3 p_2^+) (r_1^+ p_2^+ - p_1^+ r_2^+)^{-1}$$

$$k_+ = (r_1^+ p_3 - p_1^+ r_3) (r_3 p_2^+ - p_3 r_2^+)^{-1} \quad (3.7)$$

$$r_3 \equiv A_- r_1^- + A_- k_- r_2^-, \quad p_3 = A_- p_1^- + A_- k_- p_2^-$$

Исследуем асимптотику формул (3.6), (3.7) в предельном случае  $D \rightarrow 0$ , что соответствует рассмотрению волн очень большой длины. Используя асимптотический вид корней  $k_{2-,j}$  и предельное соотношение (2.9), из (3.3), (3.5) имеем  $\alpha_j^+ \rightarrow \alpha_j^-$ ,  $J^+ \rightarrow J^-$ , и поэтому  $r_j^+ \rightarrow r_j^-$ ,  $p_j^+ \rightarrow p_j^-$  при  $D \rightarrow 0$ . Из формул (1.16), (3.4) в пределе  $D \rightarrow 0$  получаем

$$k_+ \rightarrow 1, \quad A_+ \rightarrow -A_- \text{ (задача } a), \quad A_+ \rightarrow A_-, \quad k_+ \rightarrow -1 \text{ (задача } б)$$

Подставляя эти значения в (3.6), имеем  $R_{1,2} \rightarrow 0$ ,  $T_{1,2} \rightarrow 1$ . Это означает, что присутствие ледяного покрова на поверхности жидкости не влияет на распространение очень длинных волн.

Рассмотрим задачу *в*. Из (1.17), (3.1), (3.2) имеем

$$A_- = 0, \quad R_3 = A_+ (k_{2-,1} + k_+) \alpha_1^+, \quad T_3 = -A_+ (1 - k_+) \chi_+^- (1)$$

Постоянные  $A_+$ ,  $k_+$  находятся из соотношений (1.18), (3.4) и определяются формулами (3.7), в которых надо положить  $r_3 \equiv M'$ ,  $p_3 \equiv F'$ .

Авторы благодарят А. Г. Куликовского и Л. И. Слепяна за обсуждение результатов работы и ценные указания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на границе двух упругих пластин // ПММ. 1963. Вып. 3. С. 542—549.
2. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Вып. 6. С. 1037—1044.
3. Красильников В. Н. Рассеяние изгибных волн на неоднородностях упругой пластины // Акуст. журн. 1962. Вып. 8. № 2. С. 183—188.
4. Слепян Л. И., Фадеев В. М. Отражение, преломление и излучение волн в кусочно-однородной упругой среде, взаимодействующей с жидкостью // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 325—330.
5. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288 с.
6. Иванов И. В., Красильников В. Н. Отражение изгибно-гравитационных волн от места сая двух ледовых полей // Проблемы дифракции и распространения волн. Т. 4. Л.: Изд-во ЛГУ. 1965. С. 125—148.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
8. Теория солитонов: Метод обратной задачи Захаров В. Е. и др. / Под ред. Новикова С. П. М.: Наука, 1980. 320 с.
9. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.

Москва

Поступила в редакцию  
24.V.1988