Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 532.5 : 534.1

С. А. Габов, А. Г. Свешников, А. К. Шатов

РАССЕЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ НА ПРЕПЯТСТВИИ, ПЛАВАЮЩЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

В двумерной постановке решается задача рассеяния волны, распространяющейся вдоль границы раздела двух жидкостей, полубесконечным препятствием, плавающим на этой границе. Решение строится методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса в рамках линейной потенциальной теории [1]. Излагаются основные закономерности процесса рассеяния и отражения волн препятствием и дается асимптотический анализ поля в дальней зоне.

1. Предположим, что полупространство $z < 0$ заполнено однородной тяжелой несжимаемой жидкостью плотности ρ_1, а полупространство $z > 0$ — аналогичной жидкостью плотности ρ_2, причем $\rho_1 > \rho_2$. Пусть на границе раздела $z = 0$ жидкостей плавают весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний границы раздела между собой не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало. Наличие таких частиц на границе раздела жидкостей позволяет рассматривать эту границу как весомую поверхность с поверхностной плотностью распределения массы $\sigma \geqslant 0$, причем σ как функция точек границы раздела может обращаться в нуль в некоторых ее частях.

Ограничимся двумерной постановкой и будем рассматривать случай, когда плавающее вещество содержится лишь на полуплоскости $\{x > 0, z = 0\}$ и имеет постоянную плотность σ_0. Полуплоскость $\{x < 0, z = 0\}$ представляет собой свободную границу раздела. Всем величинам, относящимся к нижней жидкости, припишем индекс 1, а к нижней — 2.

Пусть вдоль свободной границы раздела из бесконечности на «весомую» границу набегает установившаяся внутренняя волна вида

$$u_j^\circ = u_j^\circ(x, z)\exp(-i\omega t) = (-1)^{j+1} A \exp(-a|z| + iax - i\omega t), \quad j = 1, 2$$

$$a = \omega^2(\rho_1 + \rho_2)/[g(\rho_1 - \rho_2)]$$

Здесь u_j° $(j = 1, 2)$ — потенциалы скоростей, g — ускорение силы тяжести.

Рассмотрим задачу о дифракции внутренней волны u_j° на весомой части границы. Представим амплитуду потенциала скоростей U_j в виде суммы потенциалов падающей внутренней волны и волн, возникающих в результате дифракции: $U_j = u_j^\circ(x, z) + u_j(x, z)$. Для потенциалов u_j, описывающих поле скоростей рассеянных волн, возникает следующая краевая задача сопряжения гармонических функций:

$$\Delta u_j = 0, \quad j = 1, 2; \ z \neq 0$$

$$\partial u_1/\partial z = \partial u_2/\partial z, \quad \forall x \in R^1, \quad z = 0$$

$$
\begin{gathered}
\omega^2 (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2 + \sigma(x)\, \partial u_1/\partial z) - g(\rho_1 - \rho_2)\, \partial u_1/\partial z = \\
= - aA\omega^2 \sigma(x) \exp(iax), \qquad z = 0 \qquad |u_j| \to 0, \qquad |z| \to \infty \\
\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 = \mathrm{const} > 0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Кроме того, функции u_j должны быть ограничены в окрестности точки $(x, z) = (0, 0)$ (точки разрыва $\sigma(x)$), а их градиент — удовлетворять оценке $|\nabla u_j| \leqslant C\,|\ln r|$ при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \to 0$ («условия на ребре»).

Динамическое условие (третье равенство (1.1)) выводится на основании второго закона Ньютона для весомой поверхности и интеграла Бернулли (см. по этому поводу [2]).

Если функции $u_j(x, z)$ $(j = 1, 2)$ — решение задачи (1.1), то функция $v(x, z) = u_1(x, z) + u_2(x, -z)$, определенная при $z \leqslant 0$, удовлетворяет следующим условиям. Она является гармонической функцией при $z < 0$, $\partial v(x, 0)/\partial z = 0$ и $v(x, z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Отсюда в силу соответствующей теоремы единственности для гармонических функций следует, что $v(x, z) \equiv 0$ при $z < 0$ и тем самым $u_2(x, z) = -u_1(x, -z)$ при $z > 0$. В соответствии с этим решение задачи (1.1) сводится к отысканию функции $u_1(x, z)$, определенной при $z \leqslant 0$ и являющейся решением следующей задачи, вытекающей из (1.1):

$$
\begin{gathered}
\Delta u = 0, \quad (x, z) \in R_-^2 \equiv \{(x, z)\colon x \in R^1,\ z < 0\} \\
u_z - au = 0, \quad z = 0,\ x < 0 \\
u_z - bu = Aa(b - a)\exp(iax), \quad z = 0,\ x > 0 \\
|u| \to 0, \quad z \to -\infty \\
|u| \leqslant C, \quad |\nabla u| \leqslant C_1 |\ln r|, \quad r \to 0 \\
b = \omega^2(\rho_1 + \rho_2)/[\sigma_0(\omega_s^2 - \omega^2)], \quad \omega_s^2 = g(\rho_1 - \rho_2)/\sigma_0
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

Здесь и далее опущен индекс у функции u_1.

2. Решение задачи (1.2) может быть построено путем ее сведения к задаче Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами [3, 4]. Используем несколько иной, но по сути дела эквивалентный путь. Решение задачи (1.2) построим как предел при $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \to 0$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. решений $u_\varepsilon(x, z)$ уравнения $\Delta u_\varepsilon + \varepsilon^2 u_\varepsilon = 0$, удовлетворяющих всем условиям из (1.2), причем в правой части второго условия вместо $\exp(iax)$ стоит функция $\exp(ikx)$, где $k = \sqrt{a^2 + \varepsilon^2}$, и третье условие заменено более сильным условием: $|u_\varepsilon| + |\nabla u_\varepsilon| \leqslant C\exp(-\delta(\varepsilon) r)$ при $r \to \infty$, где $\delta(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to 0$. Задачу определения функции $u_\varepsilon(x, z)$ назовем вспомогательной.

Решение вспомогательной задачи может быть построено методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса [5] и имеет вид:

$$
\begin{gathered}
u_\varepsilon(x, z) = \frac{Ak(b - a)}{\pi i F(k)} \int \frac{\exp[\gamma(\alpha) z - i\alpha x]}{G(\alpha)(\alpha^2 - k^2)}\, d\alpha \\
F(k) = L_+(k), \quad G(\alpha) = (\gamma(\alpha) + |b|)/L_-(\alpha), \quad \omega > \omega_s \\
F(k) = -M_+(k)(k + \alpha_0), \quad G(\alpha) = (\alpha + \alpha_0)/[M_-(\alpha)(\gamma(\alpha) + b)], \\
\omega < \omega_s \\
F(k) = P_+(k)(a - b), \quad G(\alpha) = 1/P_-(\alpha), \quad \omega = \omega_s \\
\alpha_0 = \sqrt{b^2 + \varepsilon^2}
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

(при $\omega = \omega_s$ величина $b = \pm\infty$ и граничное условие в (1.2) принимает вид $u = -A\exp(ikx)$. Кроме того, второе из условий на ребре должно быть заменено условием $|\nabla u| \leqslant Cr^{-1/2}$, $r \to 0$).

Интегрирование здесь и далее ведется по всей вещественной оси.

Опишем обозначения, использованные при записи формул (2.1). Через $\gamma(\alpha)$ обозначена ветвь функции $\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}$, которая при $\alpha = 0$ принимает значение, равное $-i\varepsilon$. Для выделения этой ветви на плоскости α проведены разрезы: от точки $\alpha = \varepsilon$ вертикально вверх, а от точки $\alpha = -\varepsilon$ — вертикально вниз, т. е. точки ветвления $\alpha = \pm\varepsilon$ соединяются разрезом через бесконечно удаленную точку.

Функции $L_\pm(\alpha)$ и $M_\pm(\alpha)$, входящие в (2.1), являются факторизациями в произведение следующих функций:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= [\gamma(\alpha)+a]\,[\gamma(\alpha)+|b|\,] = L_+(\alpha)\,L_-(\alpha) \\ M(\alpha) &= [\gamma(\alpha)+a]/[\gamma(\alpha)+b] = M_+(\alpha)\,M_-(\alpha) \end{aligned} \tag{2.2}$$

причем такими, что $L_-(\alpha) = L_+(-\alpha)$, $M_-(\alpha) = M_+(-\alpha)$ и $L_+(\alpha) \sim C_1\alpha$, $M_+(\alpha) \sim C_2$ при $\operatorname{Im}(\alpha) > -\delta(\varepsilon)$, $|\alpha| \to \infty$.

Факторизация функций (2.2) может быть получена на основе факторизации функции $P(\alpha) = \gamma(\alpha) + a$, $a > 0$, такой, что $P_-(\alpha) = P_+(-\alpha)$ [5]:

$$\begin{gathered} P_+(\alpha) = \sqrt{a - i\varepsilon}\exp\left\{\int_0^\alpha \left[\frac{\xi+k}{2} + \xi\Gamma_+(\xi) + k\Gamma_+(-k)\right]\frac{d\xi}{\xi^2-k^2}\right\} \\ \Gamma_+(\xi) = \frac{ia}{\pi\gamma(\xi)}\ln\frac{\gamma(\xi)-\xi+i\varepsilon}{\gamma(\xi)+\xi-i\varepsilon} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь и ниже $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, причем $-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2$.

Для получения решения задачи (1.2) в формулах (2.1) необходимо совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Для этого, в частности, требуется найти предельное выражение функции (2.3) при $\varepsilon \to 0$, которое оказывается равным

$$P_+(\alpha) = P_-(-\alpha) = \sqrt{\alpha + a}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_0^{\alpha/a}\ln\xi\,\frac{d\xi}{\xi^2-1}\right\} \tag{2.4}$$

В результате выполнения предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в интегралах (2.1) появляются полюсы на вещественной оси, и поэтому интегрирование следует проводить с обходом особых точек подынтегральных функций: отрицательные полюсы обходятся сверху, а положительные — снизу. При использовании формул (2.2)—(2.4) в интегралах (2.1) следует иметь в виду, что при $\varepsilon = 0$

$$k = a, \quad \alpha_0 = b, \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2} = \alpha\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\alpha$$

Формулы (2.1) после предельного перехода, как показывает непосредственная проверка, дают решение задачи (1.2) и на основе простых алгебраических преобразований, учитывающих формулы (2.2) — (2.4), могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{gathered} u(x,z) = \frac{Aa(b-a)}{\pi i F(a)}\int\frac{\exp[\alpha z\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\alpha - i\alpha x]}{G(\alpha)(\alpha\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\alpha - a)}\,d\alpha \\ G(\alpha) = \begin{cases} L_+(\alpha), & \omega > \omega_s \\ M_+(\alpha)(\alpha+b), & \omega < \omega_s \\ P_+(\alpha), & \omega = \omega_s \end{cases} \end{gathered} \tag{2.5}$$

множитель F определен в (2.1)

3. Для анализа полного волнового поля $U = u^\circ + u$, где $u^\circ = u_1^\circ$, при $r = \sqrt{x^2+z^2} \to \infty$ введем полярную систему координат $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$, а в интегралах (2.5) при $x < 0$ перейдем к интегрированию по биссектрисам первого и второго квадрантов плоскости α, при $x > 0$ — по биссектрисам третьего и четвертого квадрантов. На этих биссектрисах подынтегральные функции экспоненциально убывают, и интегралы могут быть оценены путем интегрирования по частям. С точностью до членов $O(r^{-2})$ асимптотическая оценка интегралов по биссектрисам дает

$$u_d = \frac{A(b-a)}{\pi i F(a) G(0)} \frac{\sin\varphi}{r} \tag{3.1}$$

При описанном выше преобразовании контуров интегрирования необходимо учесть вычеты в простых полюсах $\alpha = \pm a$ и $\alpha = -b$. Полюсы $\alpha = -a$ и $\alpha = -b$ учитываются при $x > 0$. Вычет в точке $\alpha = -a$ при записи полного волнового поля при $x > 0$ «аннулирует» падающую волну u°, а вычет в полюсе $\alpha = -b$ учитывается при $b > 0$ (или $\omega < \omega_s$) и дает поверхностную волну

$$u_s = \frac{4AabM_+(b)}{(a+b)^2 M_+(a)} \exp(bz + ibx) \tag{3.2}$$

Тем самым полное волновое поле при $x > 0$ может быть записано в виде

$$U = u_d + p(\omega) u_s \tag{3.3}$$

где $p(\omega) = 1$ при $\omega < \omega_s$ и $p(\omega) = 0$ при $\omega \geqslant \omega_s$.

При $x < 0$ вклад в полное волновое поле дает лишь вычет в полюсе $\alpha = a$, который описывает отраженную волну:

$$u_R = A\,\Lambda(a) \exp(az - iax)$$

$$\Lambda(a) = \begin{cases} -L_-(a)/L_+(a), & \omega > \omega_s \\ (a-b) M_-(a)/[(a+b) M_+(a)], & \omega < \omega_s \\ -P_-(a)/P_+(a), & \omega = \omega_s \end{cases} \tag{3.4}$$

Таким образом, при $x < 0$ полное волновое поле может быть представлено следующим образом:

$$U = u^\circ + u_R + u_d$$

4. Приведенные выше формулы (3.1)—(3.5) описывают поведение решения задачи (1.2), которое, как показано выше, тесно связано с решением задачи (1.1). А именно решение задачи (1.2), определенное при $z \leqslant 0$, будучи нечетным образом продолжено на верхнюю полуплоскость $z > 0$, является решением поставленной задачи (1.1) о дифракции внутренней волны u_j°, $j = 1, 2$ на весомой части границы раздела. Это позволяет выписать соответствующие формулы для полного поля в задаче (1.1).

При $x > 0$ в соответствии с (3.3) имеет место равенство

$$U^j = u_d^j(x, z) + p(\omega) u_s^j(x, z), \quad j = 1, 2 \tag{4.1}$$

где функция $p(\omega)$ определена ранее, а u_d^j и u_s^j представляют собой функции, определенные на всей плоскости xz и полученные нечетным продолжением в область $z > 0$ функций u_d и u_s. Например,

$$u_d^j = \begin{cases} u_d(x, z), & j = 1, \quad z < 0 \\ -u_d(x, -z), & j = 2, \quad z > 0 \end{cases}$$

А при $x < 0$ на основе (3.5) получим

$$U_j = u_j^\circ + u_R^j + u_d^j, \; j = 1, 2 \tag{4.2}$$

где u_j° — падающая волна, определенная в п. 1, а u_R^j — нечетное продолжение на всю плоскость функции $u_R(x, z)$.

Формулы (4.1), (4.2) позволяют описать изучаемый процесс дифракции.

Внутренняя волна, описываемая функцией u_j°, распространяясь вдоль свободной границы раздела и достигая кромки плавающего материала, рассеивается на ней. В результате возникает отраженная внутренняя волна u_R^j (см. (4.2)), которая распространяется вдоль свободной границы раздела навстречу падающей волне и уходит в отрицательном направлении оси x на бесконечность. Кроме того, часть энергии падающей волны уходит на возбуждение чисто дифракционных волн, описываемых слагаемым u_d^j в (4.1), (4.2) и представляющих собой суперпозицию радиальных бегущих волн вида $A_\pm r^{-1} \exp(\pm i\varphi - i\omega t)$. В последнем можно убедиться, рассматривая явный вид (3.1) для функции u_d и представляя $\sin\varphi$ в виде линейной комбинации экспонент.

Как следует из формулы (4.1), в случае $\omega < \omega_s$ кроме описанных волн возникает еще одна внутренняя волна, которую в терминах теории рассеяния можно назвать «прошедшей» волной. Эта внутренняя волна распространяется в положительном направлении оси x вдоль весомой части границы раздела, причем длина ее (см. выражение для u_s) всегда меньше (так как $a < b$) длины внутренней волны на свободной границе раздела и неограниченно уменьшается при $\omega \to \omega_s - 0$. Амплитуда ее при $\omega \to \omega_s - 0$ также стремится к нулю, и при $\omega \geqslant \omega_s$ эта волна исчезает. Тем самым частота $\omega = \omega_s$ является своего рода пороговой, так как для частот, ее превышающих, распространение внутренних волн по весомой части границы раздела оказывается невозможным. Иначе говоря, коэффициент прохождения внутренних волн в полуплоскость $x > 0$, содержащую весомую часть границы раздела, при $\omega \geqslant \omega_s$ оказывается равным нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. *Габов С. А.* Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 16—21.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1968. 639 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
5. *Нобл. Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.IV.1988