

УДК (532.546 + 539.3) : 534.1

© 1989

А. Г. Егоров

## ЗАТУХАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТОНКОСЛОИСТЫХ НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Методом осреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами рассматривается распространение монохроматических волн в тонкослоистых насыщенных пористых средах. Основное внимание уделяется трансформационному механизму затухания таких волн. В этом направлении обобщаются и уточняются известные результаты [1].

Предложенный в рамках теории Френкеля — Био [2, 3] трансформационный механизм [1] затухания упругих волн в насыщенных пористых средах позволил объяснить аномальную величину затухания на низких частотах. В основу исследований [1] был положен приближенный метод самосогласованного поля. Возможен и, по мнению авторов, предпочтителен иной подход, опирающийся на достаточно разработанную процедуру осреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами [4, 5]. Результаты, полученные на этом пути, представляются более обоснованными с математической точки зрения и позволяют установить границы применимости формул работы [1]. Наиболее простой моделью, пригодной для изучения трансформационного механизма затухания, является модель слоистой среды, представляющая, разумеется, и самостоятельный интерес.

1. Пусть характеристики насыщенной пористой среды зависят лишь от одной координаты  $x$ . Изучим вначале простейший случай, когда направление распространения волны совпадает с осью  $x$ . При этом продольные волны независимо от поперечных описываются, согласно [2, 3], следующей системой уравнений

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu_0}{k} E_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\beta_0} R \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{vmatrix}, \quad E_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{\beta_0}{\beta} \begin{vmatrix} 1 & 1 - \varepsilon_0 \\ 1 - \varepsilon_0 & (1 - \varepsilon_0)^2 + \beta(\lambda + 2\mu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{vmatrix}$$

$$\beta = m\beta_1 + (1 - m - \varepsilon_0)\beta_2, \quad \varepsilon_0 = \beta_2(\lambda + 2\mu/3)$$

$$p_1 = (\kappa m)^{-1}, \quad p_2 = \rho/\rho_1 = (\rho_1 m + \rho_2(1 - m))/\rho_1$$

Здесь компоненты  $u_1, u_2$ , вектор-функции  $u$  — среднее смещение жидкой фазы относительно твердой и смещение твердой фазы соответственно,  $\rho$  — плотность,  $\beta$  — сжимаемость,  $m$  — пористость,  $k$  — проницаемость,  $\mu_0$  — вязкость жидкой фазы,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе для пустого скелета, индекс указывает фазу. Безразмерный параметр  $\kappa \ll 1$  очевидным образом связан с коэффициентами присоединенных масс в теории Био.

Все характеристики среды —  $p_1, p_2, k, \beta, \varepsilon_0, \lambda, \mu$  — считаются быстро осциллирующими функциями координаты  $x$ . Иначе говоря, рассматриваются тонкослоистые среды. Это означает, что пространственный масштаб  $D$  изменения характеристик среды значительно меньше характерной длины  $\lambda = f \sqrt{\beta_0 \rho_1}$  монохроматической волны первого рода. Здесь  $f = 2\pi\omega$  — частота,  $\beta_0$  — характерное значение  $\beta(x)$ . Конкретный вид зависимости от  $x$  указанных выше параметров среды будет уточнен впослед-

ствии. Они могут быть периодическими, почти периодическими, случайными функциями  $x$ . Для справедливости следующих ниже выкладок существенно лишь, чтобы эти функции «одинаково вели себя» во всех сколь угодно отдаленных частях пространства ([5], с. 378).

Решение уравнения (1.1), отвечающее распространению монохроматических волн, отыскивается в виде

$$u = U(y) \exp [i\omega (t - \sqrt{\beta_0 \rho_1} \xi x)] \quad (1.2)$$

где величина  $\omega$  — фиксирована,  $y = x/D$  — «быстрая» координата, а  $\xi$ ,  $U$  — искомые величина и вектор-функция соответственно. От функции  $U$  и ее производных требуется более медленный, чем у линейной функции, рост на бесконечности [5]

$$U^{(j)}(y)/|y| \rightarrow 0 \quad (|y| \rightarrow \infty), \quad j = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

В случае, например, периодического характера зависимости параметров среды от  $y$  это условие выполняется автоматически после естественного требования периодичности  $U$ .

Уравнение (1.1) при учете (1.2) приводится к виду

$$(RU')' - iqE_0U - i\xi\varepsilon ((RU)' + RU') + \varepsilon^2 (PU - \xi^2RU) = 0 \quad (1.4)$$

$$\varepsilon = D\omega \sqrt{\beta_0 \rho_1}, \quad q = D^2\omega\beta_0\mu_0/k$$

Физический смысл коэффициента  $\varepsilon$  пояснен выше,  $q$  — квадрат отношения характерного масштаба среды к характерной длине затухания волны второго рода.

В соответствии с методом осреднения [4] решение задачи (1.4) отыскивается в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \dots$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} + \dots \quad (1.5)$$

От функций  $u_{j1}$ ,  $u_{j2}$  требуется выполнения условий вида (1.3). При этом  $u_{j2}(y)$  определяются с точностью до несущественной здесь произвольной постоянной. Заметим, что в силу равенства нулю главного члена разложения (1.5) относительного смещения жидкой и твердой фазы (1.5) выделяет для изучения наиболее интересный случай распространения волн в среднем первого рода.

Подстановка (1.5) в левую часть уравнения (1.4) с последующим приравниванием в ней нулю коэффициентов при различных степенях  $\varepsilon$  приводит к последовательности так называемых задач на ячейке для определения  $u_{j1}$ ,  $u_{j2}$ ,  $\xi_j$ :

$$(r_{12}u_{01}' + r_{22}u_{02}')' - i\xi_0 r_{22}' = 0$$

$$(r_{11}u_{01}' + r_{12}u_{02}')' - iqu_{01} - i\xi_0 r_{12}' = 0 \quad (1.6)$$

$$(r_{12}u_{11}' + r_{22}u_{12}')' - i\xi_1 r_{22}' - i\xi_0 [(r_{12}u_{01}' + r_{22}u_{02}') + (r_{12}u_{01} + r_{22}u_{02})'] - \xi_0^2 r_{12} + p_2 = 0, \dots$$

Здесь выписаны лишь три первых уравнения из бесконечной их цепочки. Именно их достаточно для нахождения  $\xi_0$ .

Действительно, выразив из первого уравнения  $u_{02}'$  через  $u_{01}'$

$$u_{02}' = i\xi_0 (1 - Ar_{22}^{-1}) - r_{12}r_{22}^{-1}u_{01}' \quad (1.7)$$

с неизвестной пока постоянной  $A$  и подставив это выражение во второе уравнение, найдем, что  $u_{01} = -i\xi_0 Ag(y)$ , где  $g$  — единственное удовлет-

воряющее условиям вида (1.3) решение задачи

$$(\bar{r}_{12} + rg')' - iqq = 0 \quad (\bar{r}_{12} = r_{12}r_{22}^{-1}, r = r_{11} - \bar{r}_{12}) \quad (1.8)$$

Взяв среднее от обеих частей (1.7) и воспользовавшись равенством  $\langle u_{02}' \rangle = 0$ , следующим из условий, наложенных на  $u_{02}$ , найдем, что  $A = \langle r_{22}^{-1} - g'\bar{r}_{12} \rangle$ , после чего  $u_{02}$  определится из (1.7) простым интегрированием. Угловые скобки здесь и далее означают среднее по пространству. Беря, наконец, среднее от обеих частей третьего равенства в (1.6), найдем, воспользовавшись условиями, наложенными на  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ , и выражениями, полученными выше для  $u_{01}$ ,  $u_{02}$ , что

$$\xi_0^2 = \langle p_2 A \rangle = \langle p_2 \rangle \langle r_{22}^{-1} - g'\bar{r}_{12} \rangle \quad (1.9)$$

Итак, величина  $\xi_0$ , а вместе с ней  $u_{01}$ ,  $u_{02}$ , определяется полностью соотношениями (1.8), (1.9). Использование последующих уравнений цепочки (1.6) позволяет в принципе найти  $\xi_1$ ,  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  и т. д.

В настоящей работе, однако, ограничимся изучением главного члена  $\xi_0$  разложения (1.5) волнового числа  $\xi$ . Отметим лишь, то если среда такова, что волновые числа монохроматических волн, распространяющихся в направлениях возрастания и убывания  $x$ , совпадают, то  $\xi_1 = 0$  и  $\xi = \xi_0 + O(\varepsilon^2)$ . Указанное условие изотропности вполне естественно и, например, для периодических сред выполняется всегда, когда параметры среды являются четными функциями  $x$ .

Заметим, что мнимая часть  $\xi_0$ , вообще говоря, отлична от нуля. Поэтому затухание рассматриваемой здесь волны в среднем первого рода имеет место уже в члене нулевого порядка малости. Для однородной среды  $\xi_0^2 = p_2 r_{22}^{-1}$  — вещественное число и ситуация существенно иная. Здесь, как можно убедиться [2, 3], нормированный на  $\omega \sqrt{\beta_0 \rho_1}$  коэффициент затухания  $\alpha$  имеет второй порядок малости

$$\frac{\alpha}{\omega \sqrt{\beta_0 \rho_1}} = \varepsilon^2 \frac{1}{2q \sqrt{p_2 r_{22}}} (1 - p_2 \bar{r}_{12})^2 + O\left(\frac{\varepsilon^4}{q^2}\right)$$

Таким образом, наличие неоднородности приводит к значительному возрастанию коэффициента затухания. Для количественной оценки этого эффекта необходимо обратиться к решению задачи (1.8) на ячейке с последующим вычислением волнового числа  $\xi_0$  по формуле (1.9).

2. Рассмотрим вначале вслед за Б. Я. Гуревичем и С. Л. Лопатниковым [1] случай, когда параметры среды мало отличаются от своих средних по пространству значений. При этом уравнение (1.8) упрощается заменой в нем функции  $r$  и  $q$  их пространственными средними и задача нахождения  $\xi_0$  достаточно просто решается для различных моделей среды. Действительно, приняв, что

$$\bar{r}_{12} = \langle \bar{r}_{12} \rangle + \delta G(y) \quad \langle G^2 \rangle = 1$$

и учитывая, что функция

$$\exp[-(1+i)v|y-y_0|]/[2(1+i)v\langle r \rangle]$$

является при  $v = (\langle q \rangle / [2\langle r \rangle])^{1/2}$  фундаментальным решением уравнения (1.8), в котором  $r$  и  $q$  заменены своими средними, получим

$$\langle g'\bar{r}_{12} \rangle = \delta^2 \langle r \rangle^{-1} \left\langle 1 - \frac{(1+i)v}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(y) G(y_0) \exp[-(1+i)v|y-y_0|] dy_0 \right\rangle \quad (2.1)$$

Обозначим  $G_I$ ,  $-G_R$  — нормированные на  $\delta^2 \langle r \rangle^{-1}$  мнимую и вещественную части величины  $\langle g' \bar{r}_{12} \rangle$ . Эти величины ввиду малости среднеквадратичного уклонения  $\delta$  с точностью до сомножителя, зависящего лишь от средних характеристик среды, совпадают с декрементом затухания  $\phi$  и дисперсией скорости  $v$  распространения волны

$$\phi = \pi \langle r_{22}^{-1} \rangle^{-1} \langle r \rangle^{-1} \delta^2 G_I \quad (v_\infty - v)/v_\infty = 1/2 \langle r_{22}^{-1} \rangle^{-1} \langle r \rangle^{-1} \delta^2 G_R, \quad (2.2)$$

$$v_\infty = (\langle \rho \rangle^{-1} \langle \lambda + 2\mu + (1 - \varepsilon_0)^2 \beta^{-1} \rangle)^{1/2}$$

Здесь  $v_\infty$  — скорость распространения волн бесконечно большой частоты.

Конкретизируем функцию  $G$  и получающиеся для нее из (2.1) значения  $G_I$ ,  $G_R$ .

*Модель 1.*  $G(y) = \sqrt{2} \cos y$ . Тогда

$$G_I = 2v^2/(1 + 4v^4), \quad G_R = 1/(1 + 4v^4) \quad (2.3)$$

*Модель 2.*  $G(y)$  — эргодическое стационарное случайное поле с корреляционной функцией, равной  $\langle G(y_0 + y) G(y) \rangle = \exp(-|y_0|)$ . Имеем

$$G_I = v/(1 + 2v + 2v^2), \quad G_R = (1 + v)/(1 + 2v + 2v^2) \quad (2.4)$$

*Модель 3.*  $G(y) = G_j$  при  $j \leq y < j + 1$ ,  $j$  — целое,  $G_j$  — независимые реализации случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В этом случае

$$G_I = \text{Im} \left[ \frac{e^{-(1+i)v} - 1}{(1+i)v} \right], \quad G_R = \text{Re} \left[ \frac{1 - e^{-(1+i)v}}{(1+i)v} \right] \quad (2.5)$$

Качественный вид функций  $G_I(v)$ ,  $G_R(v)$  одинаков во всех трех случаях. Функция  $G_R$  монотонно убывает от единицы при  $v = 0$  до нуля при  $v = \infty$ ,  $G_I$  обращается в нуль при  $v = 0$ ,  $v = \infty$ . Обращает на себя внимание наличие точки  $v_0 \sim 1$  максимума функции  $G_I$ . В силу этого декремент затухания проявляет определенную «избирательность»: для волн частоты  $f$  он максимален на неоднородностях масштаба  $D_0 = (4\pi \langle r \rangle \langle k \rangle \cdot v_0 / \beta_0 \mu_0 f)^{1/2}$  и, наоборот, на неоднородностях масштаба  $D$  декремент затухания максимален у волн частотой  $f_0 = 4\pi \langle r \rangle \langle k \rangle v_0 / (\beta_0 \mu_0 D^2)$ .

Заметим, что при подсчете коэффициентов затухания принималась [1], модель среды отмеченная здесь как модель 2. Однако при этом существенно использовалось условие более сильное, чем условие малости  $\varepsilon$ . А именно наряду с малостью  $\varepsilon$  требовалась по существу и малость  $v^2 = \text{const } D^2 \omega$ . В соответствии с этим для модели 2 была получена формула [1]  $G_I = v$ , являющаяся, очевидно, асимптотическим при  $v \rightarrow 0$  представлением более общего соотношения, приведенного выше. На самом деле, условие малости  $v$  ( $v \ll v_0$ ) выполняется лишь для весьма малых частот. Так, для принятых в [1] значений параметров (в частности  $D = 0,2$  м,  $k = 10^{-12}$  м<sup>2</sup>) величине  $v_0$  соответствует частота  $f_0 = 40$  Гц.

3. Применимость полученных выше результатов ограничена случаем сред, пространственные размеры неоднородностей которых одинаковы либо близки друг к другу. В реальных пористых средах, по-видимому, имеется достаточно широкий спектр масштабов неоднородностей. Именно с этим можно связать различие между теоретическими результатами (2.3)—(2.5) и известными экспериментальными данными. Оно состоит в том, что экспериментально измеренный декремент затухания, как правило, постоянен ( $G_I = \text{const}$ ) в широком диапазоне частот. Введение в рассмотрение сред с богатым набором различных по размерам и одинаково часто встречающихся неоднородностей позволяет объяснить отмеченный факт.

Формализуем представление о таких средах на примере модели 3. Предварительно обобщим ее, определив  $G(y)$  следующим образом:  $G(y) = G_j$  при  $D_j \leq y < D_{j+1}$ ;  $D_{j+1} - D_j = d_j$ ,  $D_0 = 0$ ,  $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ . Ранее было принято  $d_j = 1$ . Здесь же  $d_j$  считаются независимыми реализациями случайной величины  $d$ . В этом случае формулы (2.5) в предположении независимости случайных величин  $G_j$  и  $d_j$  приобретут вид ( $E$  — знак математического ожидания)

$$G_R - iG_I = E(1 - e^{-(1+i)v d}) / [(1+i)vEd]$$

Пусть  $d$  принимает значения  $\Delta_{-N}, \dots, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$ . Можно считать, что  $\Delta_0 = 1$  и  $\Delta_j$  занумерованы в порядке возрастания. Предположим, во-первых, что объемные доли частиц различного размера одинаковы, так что  $d$  принимает значение  $\Delta_j$  с вероятностью  $\sigma/\Delta_j$ . Величина  $\sigma$  определяется условием нормировки. Второе предположение таково, что все масштабы  $\Delta_j$  эквивалентны в том смысле, что отношение  $\Delta_{j+k}/\Delta_j$  не зависит от номера  $j$ . Отсюда вытекает, что  $\Delta_j$  образуют геометрическую прогрессию,  $\Delta_j = (1 + \Delta)^j$ ,  $\Delta > 0$ , значение  $\Delta_j$  принимается с вероятностью  $\sigma(1 + \Delta)^{-j}$ , а  $\sigma = (1 + \Delta)^{-N} \Delta / (1 + \Delta - (1 + \Delta)^{-2N})$ .

Естественно рассмотреть предельный случай, когда  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  таким образом, что длины наибольшего ( $M = (1 + \Delta)^N$ ) и наименьшего ( $M^{-1}$ ) куска неоднородности остаются фиксированными. Можно убедиться, что при этом случайная величина  $d$  сходится слабо по распределению к случайной величине, имеющей плотность вероятностей функцию, равную нулю вне отрезка  $[M^{-1}, M]$  и  $((M - M^{-1})x^2)^{-1}$  внутри него. Следовательно

$$G_R - iG_I \rightarrow \frac{1}{(1+i)(M - M^{-1})v} \int_{M^{-1}}^M (1 - e^{-(1+i)v x}) \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{S((1+i)M^{-1}v) - S((1+i)Mv)}{2\pi \ln M}, \quad S(v) = \frac{1 - e^{-v}}{v} + \int_v^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} \quad (3.1)$$

В дальнейшем за предельными значениями функций  $G_R, G_I$  сохраняются прежние обозначения.

Графики функций  $G_I(v)$  при различных  $M$  представлены на фигуре. Налицо наличие такого интервала изменения аргумента  $v$ , внутри которого  $G_I$ , а значит, и декремент затухания практически постоянны. Этот интервал достаточно широк и включает в себя, например, при  $M = 10$  почти два порядка по  $v$ , что эквивалентно четырем порядкам по частоте. Он расширяется прямо пропорционально величине  $M$  с ростом последней, определяясь формально неравенством  $M^{-1} \ll v \ll M$ .

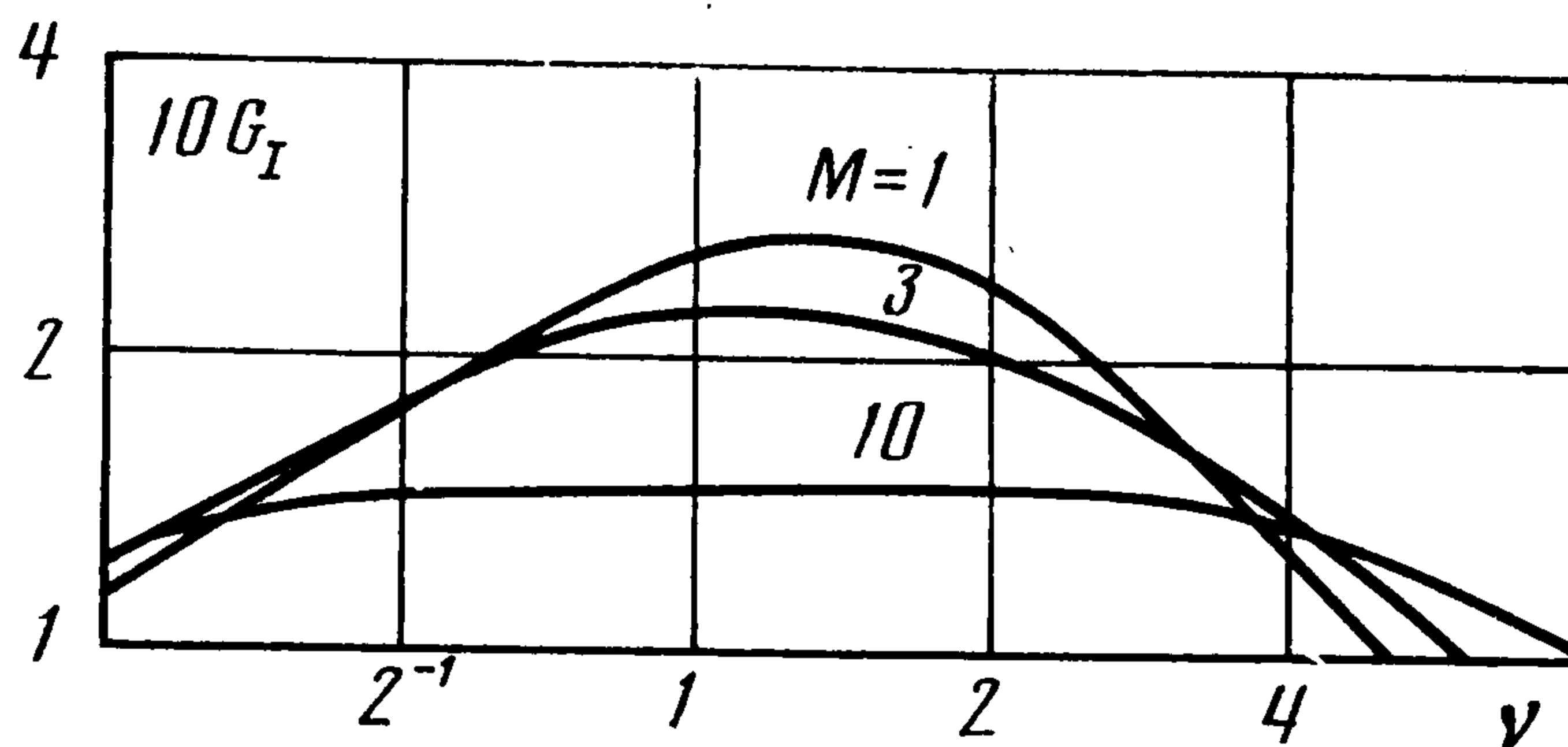
Пренебрегая в (3.1) членами порядка  $vM^{-1}, v^{-1}M^{-1}$  по сравнению с единицей, можно получить, что внутри указанного интервала

$$G_I \approx \pi / (8 \ln M), \quad G_R \approx (1/2) (1 - (\ln v + c) / \ln M) \quad (3.2)$$

$$c = \gamma + 1/2 \ln 2 - 1 = 0,076$$

Интересно отметить, что в интервале постоянства  $G_I$  в силу второй из формул (3.2) имеет место весьма медленное (логарифмическое) возрастание скорости распространения волны с ростом частоты

$$v/v_\infty = \text{const} + \pi^{-2} \ln f \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Укажем также на два следующих из (3.2) тождества

$$\alpha \partial v / \partial f = \text{const}, \quad \alpha^{-1} \partial v / \partial f = \pi^{-2} v_{\infty} f^{-2} \quad (3.4)$$

выполняющихся, разумеется, в выделенном интервале изменения  $\nu$ . В первом из них фигурирует независящая от частоты константа среды. Особо выделим второе тождество (3.4), требующее от комплекса  $f^2 v_{\infty}^{-1} \alpha^{-1} \partial v / \partial f$  независимости ни от свойств среды, ни от частоты распространяющейся волны.

Аналогичные результаты справедливы и для другой модели среды с широким набором одинаково часто встречающихся неоднородностей различного размера. Она получается из модели 1 так же, как рассмотренная выше модель была получена из модели 3. А именно принимается, что

$$G(y) = \sqrt{\frac{2}{2N+1}} \sum_{n=-N}^N \cos\left(\frac{y}{(1+\Delta)^n} + \varphi_n\right)$$

с произвольными постоянными  $\varphi_n$ . Соответствующие такой зависимости значения  $G_I$ ,  $G_R$  имеют, как и раньше, предел при  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  и фиксированном  $(1+\Delta)^N = M$ . Оказывается, что и этот предел удовлетворяет соотношениям (3.2)–(3.4). В (3.2) необходимо лишь принять  $c = 1/2 \ln 2$ .

4. Отказ от упрощающего предположения о близости параметров среды к своим средним по пространству значениям приводит к серьезным трудностям. И дело здесь не столько в усложнении связи между искомыми характеристиками рассматриваемого процесса  $\psi$ ,  $\nu$  и величинами  $G_I$ ,  $G_R$  или в отсутствие аналитического решения задачи (1.8) на ячейке. Можно проверить, что, за исключением лишь весьма экзотических случаев, формулы (2.2) остаются достаточно точными. Задачу на ячейке можно решать численно. Основная трудность состоит в отсутствие информации либо заменяющих ее правдоподобных гипотез о корреляционных связях величин  $r$ ,  $\bar{r}_{12}$ ,  $q$ . Знание же их необходимо для конкретизации задачи на ячейке. Без проведения такой конкретизации можно надеяться лишь на получение качественных свойств и априорных оценок искомым величин.

Приведем некоторые такие общие результаты, касающиеся характера зависимости  $G_I$ ,  $G_R$ ,  $fG_I$  от частоты распространяющейся волны  $\nu$ . При реальных значениях параметров величины эти, как отмечалось выше, определяют декремент затухания, дисперсию скорости и коэффициент затухания соответственно. Доказательства опираются на следующие представления

$$\begin{aligned} \delta^2 G_I \langle r \rangle^{-1} &= \max_{\psi} \langle -q^{-1} ((r\psi')')^2 - q\psi^2 + 2\psi \bar{r}_{12} \rangle \\ \delta^2 G_R \langle r \rangle^{-1} &= \max_{\psi} \langle -r ((q^{-1}\psi')')^2 - r^{-1}\psi^2 + 2q^{-1} \bar{r}_{12} \psi' \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

Максимум берется по всем функциям, удовлетворяющим условиям вида (1.3). Представления (4.1) следуют непосредственно из (1.8), (1.9). При этом экстремали в (4.1) являются ничем иным, как мнимой и вещественной частью решения  $g(y)$  задачи на ячейке (1.8).

Обозначим фигурирующие в правых частях (4.1) функционалы через  $J_I(\psi, q)$ ,  $J_R(\psi; q)$ .

*Свойство 1.*

$$G_I(0) = G_I(\infty) = 0, \quad 0 \leq G_I \leq \langle r \rangle / \min(r)$$

Докажем лишь верхнюю оценку для  $G_I$ . Остальные свойства очевидным образом следуют из (4.1). Перепишем предварительно  $J_I$  в несколько ином виде

$$J_I = \langle -q^{-1} ((r\psi)')^2 + q\psi^2 - 2r(\psi')^2 + 2(\bar{r}_{12} - \bar{r}_{12}') \psi' \rangle$$

Здесь при интегрировании по частям были использованы свойства (1.3) функции  $\psi$ . Отбрасывая первое слагаемое в правой части этого равенства, оценим  $\max J_I$  сверху величиной

$$\max_{\psi} \langle -2r(\psi')^2 + 2(\bar{r}_{12} - \bar{r}_{12}') \psi' \rangle$$

Возникшая при этом задача отыскания максимума носит алгебраический характер. Решив ее, найдем

$$\max_{\psi} J_I \leq \frac{1}{2} \langle r^{-1} (r_{12} - \langle r_{12} \rangle)^2 \rangle$$

откуда и следует указанная оценка.

*Свойство 2.*  $G_R$  — положительная, монотонно убывающая функция частоты,  $G_R(\infty) = 0$  и

$$\langle r \rangle / \max(r) \leq G_R(0) \leq \langle r \rangle / \min(r)$$

Для доказательства монотонности  $G_2$  достаточно установить, что  $\max J_R(\psi; cq) \leq \max J_R(\psi; q)$  при  $c \geq 1$ . Справедливость этого неравенства становится очевидной, если заметить, что

$$\max_{\psi} J_R(\psi; cq) = \max_{\psi} J_R(c^{-1}\psi; cq) = \max_{\psi} \langle -r((q^{-1}\psi)')^2 - r^{-1}c^2\psi^2 + 2\psi'q^{-1}(\bar{r}_{12}') \rangle$$

и сравнить последнее выражение с  $\max J_R(\psi; q)$ .

*Свойство 3.*  $fG_I$  — положительная, монотонно убывающая функция частоты.

5. Обратимся к общему случаю распространения волны в тонкослоистой среде, когда волновой вектор образует отличный от нуля угол  $\varphi$  с осью  $x$ . Смещение частиц происходит в плоскости, образованной волновым вектором и осью  $x$ . Процедура осреднения в этом случае вполне аналогична проведенной ранее. Опуская ее, приведем лишь конечные результаты. Вначале, однако, завершая рассмотрение случая  $\varphi = 0$ , укажем, что для поперечных волн в принятых выше обозначениях с точностью до  $O(\varepsilon^2)$

$$\xi^2 = \langle p_2 \rangle \langle r_0^{-1} \rangle \quad (r_0 = \beta_0 \mu)$$

так что с указанной точностью при  $\varphi = 0$  поперечные волны не затухают.

В общем случае невозможно выделить отдельно продольную и поперечную волны. Вместо них имеется пара волн, вектор среднего смещения частиц в каждой из которых образует некий, вообще говоря, отличный от нуля и  $\pi/2$  угол  $\eta$  с волновым вектором. С точностью  $O(\varepsilon^2)$  этот угол и соответствующее волновое число определяются из следующей системы уравнений

$$\langle p_2 \rangle \xi^{-2} \cos \eta = \cos \eta (\langle r_0^{-1} \rangle^{-1} + a_2 \sin^2 2\varphi) + \sin \eta \sin 2\varphi (a_1 - a_2 \cos 2\varphi)$$

$$\langle p_2 \rangle \xi^{-2} \sin \eta = \sin \eta (A^{-1} + 4a_1 \sin^2 \varphi - a_2 \sin^2 2\varphi) + \cos \eta \sin 2\varphi \cdot (a_1 - a_2 \cos 2\varphi)$$

$$a_1 = \langle r_0 \rangle - BA^{-1} - (AC - B^2) A^{-1}, \quad a_2 = \langle r_0 \rangle - \langle r_0^{-1} \rangle^{-1} - (AC - B^2) A^{-1}$$

$$B = \langle r_0 r_{22}^{-1} - \bar{r}_{12} r_0 g' \rangle, \quad C = \langle r_0^2 r_{22}^{-1} - \bar{r}_{12} r_0 h' \rangle$$

Здесь  $h(y)$  — решение уравнения

$$(\bar{r}_{12}r_0 + rh')' - iqh = 0$$

функция  $g(y)$  и величина  $A$  определены ранее.

Можно проверить, что эта система уравнений имеет при  $0 < \varphi < \pi/2$  два решения:  $(\xi_p^2, \eta_p)$  и  $(\xi_s^2, \eta_s)$ . Индексы  $p$  и  $s$  отнесены к тем из них, которые при  $\varphi \rightarrow 0$  описывают продольную и поперечную волны соответственно. В общем случае мнимые части  $\xi_p$  и  $\xi_s$  не равны нулю. Поэтому в отличие от случаев  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  затухание нулевого порядка малости, обеспечиваемое трансформационным механизмом, имеет здесь место для обоих типов волн. Его можно подсчитать в дополнительном предположении о малом отличии характеристик среды от своих средних по пространству значений. Отметим, что при таком допущении смещение частиц в  $p$ -волне происходит главным образом в направлении волнового вектора, в  $s$ -волне — в перпендикулярном ему направлении. Поэтому в данном случае естественно называть эти волны продольной и поперечной.

Определим функцию  $L(y)$  соотношениями

$$r_0(y) = \langle r_0 \rangle + \sigma L, \quad \langle L^2 \rangle = 1$$

аналогичными использованным выше для определения  $G$ , и введем наряду с  $G_I, G_R$  величины  $L_I, L_R, H_I, H_R$  по формулам

$$\begin{aligned} -L_R + iL_I &= \left\langle 1 - \frac{1}{2}(1+i)v \int L(y)L(y_0) \exp - [(1+i)v|y-y_0|] dy_0 \right\rangle \\ -H_R + iH_I &= \left\langle G(y)L(y) - \frac{1}{2}(1+i)v \int G(y)L(y_0) \exp - \right. \\ &\quad \left. - [(1+i)v|y-y_0|] dy_0 \right\rangle \end{aligned}$$

Так же как и для продольных волн при  $\varphi = 0$ , декремент затухания и дисперсия скорости распространения определялись функциями  $G_I, G_R$ , в рассматриваемом случае они определяются функциями  $G_I, L_I, H_I$  и  $G_R, L_R, H_R$  соответственно. Приведем здесь лишь соответствующие выражения для декрементов затухания

$$\begin{aligned} \vartheta_s &= \pi \langle r_0 \rangle \langle r \rangle^{-1} \sigma^2 L_I \sin^2 2\varphi, \quad \vartheta_p = \pi \langle r_{22}^{-1} \rangle \langle r \rangle^{-1} \times [\delta^2 G_I + \\ &\quad + 4\delta\sigma \langle r_0 \rangle \langle r_{22} \rangle^{-1} H_I \sin^2 \varphi + 4\sigma^2 (\langle r_0 \rangle \langle r_{22} \rangle^{-1} \sin^2 \varphi)^2 L_I] \end{aligned}$$

Они показывают, в частности, что выводы, сделанные ранее о декременте затухания продольных волн при  $\varphi = 0$ , сохраняют силу как для продольных, так и для поперечных волн в общем случае. Интересно отметить также, что максимум затухания поперечных волн достигается в случае, когда угол между направлениями напластования (ось  $x$ ) и распространения волны составляет  $45^\circ$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Б. Я., Лопатников С. Л. О затухании продольных волн в насыщенной пористой среде со случайными неоднородностями // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 6. С. 1335—1339.
2. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. Л. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
3. Biot M. A. Theory of propagation of elastic-waves in fluid-saturated Porous Solids. I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. № 2. P. 168—178.
4. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.