Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК (550.3 + 536.7):534


А. Б. Рощин, Л. М. Трускиновский

# МОДЕЛЬ СЛАБО НЕЛОКАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Рассматривается модель слабо нелокальной релаксирующей среды с вязкой дисперсией. Кинетика релаксации описывается обобщенным на случай сжимаемой среды уравнением Гинзбурга—Ландау [1]. Изучаются особенности распространения плоских акустических волн в среде, имеющей внутренний масштаб времени, возникающий из писания кинетики релаксации, и пространственный масштаб, характеризующий степень нелокальности среды. Общие методы построения моделей равновесных нелокальных сред развиты в работах [2—5]. Обобщение этих методов на случай релаксирующей среды позволило описать структуру неравновесного фазового скачка и вычислить диссипацию на фронте превращения [6].

1. Предположим, что внутренняя энергия $u$ единицы массы — функция системы параметров

$$s, \rho g^{ij}, \xi_\alpha, \xi_\alpha^{\cdot}, \nabla_i\xi_\alpha, \nabla_j\nabla_i\xi_\alpha, \ldots \tag{1.1}$$

где $s$ — энтропия единицы массы среды, $\rho$ — плотность, $g^{ij}$ — контравариантные компоненты метрического тензора в евклидовой эйлеровой системе координат $x^i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\xi_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ — дополнительные скалярные параметры (внутренние степени свободы); точкой обозначена полная производная по времени, $\nabla_i$ — ковариантная производная в системе координат $x_i$. Уравнение притока тепла может быть записано в виде [3, 6, 7]

$$du = \rho^{-1}(-pg^{ij} + \tau^{ij} + \sigma^{ij})\nabla_j v_i\, dt - \rho^{-1}\nabla_k(q^k + Q^k)\, dt \tag{1.2}$$

где $p$ — давление, $\tau^{ij}$ — компоненты тензора вязких напряжений, $v_i$ — компоненты вектора скорости среды, $q^k$ — компоненты вектора потока тепла, $Q^k$ — компоненты вектора потока нетепловых видов энергии, $\sigma^{ij}$ — компоненты тензора реактивных напряжений, $Q^k$ и $\sigma^{ij}$ — функции системы параметров (1.1). Уравнение баланса энтропии имеет вид

$$ds = \rho^{-1}\nabla_k J^k dt + d_i s \tag{1.3}$$

где $J^k$ — компоненты вектора потока энтропии, которые полагаем равными $q^k/T$, $d_i s$ — производство энтропии за счет протекающих в среде необратимых процессов. Используя неотрицательность $d_i s$, находим [6]

$$T = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad p = \rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha^{\cdot}} = \frac{\partial u}{\partial \nabla_j\nabla_i\xi_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \nabla_k\nabla_j\nabla_i\xi_\alpha} = \ldots = 0$$

$$Q^k = -\rho\frac{\partial u}{\partial \nabla_k\xi_\alpha}\xi_\alpha^{\cdot} + \Psi^k(s, \rho, g^{ij}, \xi_\alpha, \nabla_i\xi_\alpha, \nabla_j\nabla_i\xi_\alpha \ldots) \tag{1.4}$$

$$\nabla_k\Psi^k = 0, \quad \sigma^{ij} = -\rho\frac{\partial u}{\partial \nabla_j\xi_\alpha}\nabla^i\xi_\alpha$$

Таким образом, сделанные предположения исключают пространственные производные выше первого порядка из списка аргументов удельной внутренней энергии, сохраняя их лишь в выражении для функции $\Psi^k$, которая в силу предпоследнего соотношения (1.4) входит только в граничные условия; ее исчезновения можно добиться соответствующим переопределением векторов $q^k$ и $J^k$. Вследствие инвариантности внутренней энергии относительно твердотельных вращений системы координат $x^i$ тензор реактивных напряжений $\sigma^{ij}$ симметричен. Включение производных $\nabla_i \xi_\alpha^{\cdot}$ в число аргументов $Q^k$ приводит к модели моментной среды с несимметричным тензором реактивных напряжений; при этом

$$\sigma^{ij} = -\rho \frac{\partial u}{\partial \nabla_j \xi_\alpha} \nabla^i \xi_\alpha - \rho \frac{\partial u}{\partial \nabla_j \nabla_k \xi_\alpha} \nabla_k \nabla^i \xi_\alpha + \nabla_k \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \nabla_k \nabla_j \xi_\alpha}\right) \nabla^i \xi_\alpha$$

2. Перейдем к рассмотрению диссипативных эффектов. Из уравнений (1.2)—(1.4) имеем

$$\rho \frac{d_i s}{dt} = \frac{\tau^{ij}}{T} \nabla_j v_i - \frac{q^k}{T^2} \nabla_k T - \frac{\rho \xi_\alpha^{\cdot}}{T} \frac{\delta_\rho u}{\delta \xi_\alpha}$$
$$\left(\frac{\delta_\rho u}{\delta \xi_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} - \frac{1}{\rho} \nabla_k \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \nabla_k \xi_\alpha}\right)\right) \tag{2.1}$$

(в скобках приведено выражение вариационной производной [6]). Отметим, что внутреннюю энергию $u\ (s, \rho, g^{ij}, \xi_\alpha, \nabla_i \xi_\alpha)$ в правой части уравнения (2.1) можно заменить другим термодинамическим потенциалом, например $g\ (p, T, g^{ij}, \xi_\alpha, \nabla_i \xi_\alpha) = u - Ts + p/\rho$.

Используя феноменологический подход термодинамики необратимых процессов [8], установим кинетические соотношения, определяющие $\tau^{ij}$, $q^k$, $\xi_\alpha^{\cdot}$. Рассмотрим выражение (2.1) для скорости производства энтропии как билинейную функцию обобщенных потоков $\tau^{ij}/T$, $q^i/T^2$, $\rho \xi_\alpha^{\cdot}/T$ и соответствующих обобщенных сил $\nabla_j v_i$, $-\nabla_i T$, $\delta_\rho u / \delta \xi_\alpha$. Тогда

$$\tau^{ij}/T = L^{ijkl} \nabla_l v_k - L^{ijk} \nabla_k T - L_\alpha{}^{ij} \delta_\rho u / \delta \xi_\alpha$$
$$q^i/T^2 = L_1^{ijk} \nabla_j v_k - L^{ij} \nabla_j T - L_\alpha{}^i \delta_\rho u / \delta \xi_\alpha \tag{2.2}$$
$$\rho \xi_\alpha^{\cdot}/T = L_{1\alpha}^{ij} \nabla_i v_i - L_{1\alpha}^{i} \nabla_i T - L_{\alpha\beta} \delta_\rho u / \delta \xi_\beta$$

Соотношения Онзагера при учете того, что $\tau^{ij}/T$ и $\nabla_j v_i$, представляют собой нечетный поток и силу, а $q^i/T^2$ и $\rho \xi_\alpha^{\cdot}/T$, $-\delta_\rho u/\delta \xi_\alpha$ — четные, имеют вид

$$L^{ijkl} = L^{klij}, \quad L^{ij} = L^{ji}, \quad L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$$
$$L_1^{ijk} = -L^{ijk}, \quad L_{1\alpha}^{ij} = -L_\alpha{}^{ij}, \quad L_{1\alpha}^{i} = L_\alpha{}^i \tag{2.3}$$

Тензоры $L^{ijkl}$, $L^{ijk}$, $L_\alpha{}^{ij}$ должны быть симметричными по $ij$ (в силу симметрии $\tau^{ij}$).

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. В качестве аргументов феноменологических коэффициентов

$$L^{ijkl}, \quad L^{ijk}, \quad L^{ij}, \quad L_\alpha{}^{ij}, \quad L_\alpha{}^i, \quad L_{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

фигурирующих в (2.2), выберем следующие величины

$$s, \quad \rho, \quad \xi, \quad |\nabla \xi|, \quad v^i, \quad g^{ij}$$
$$|\nabla \xi| = (\nabla_k \xi \nabla^k \xi)^{1/2}, \quad v^i = \nabla^i \xi / |\nabla \xi|$$

Зависимость коэффициентов (2.4) от тензорных аргументов $v^i$, $g^{ij}$ может быть указана явно [2]. Тогда

$$\tau^{ij} = (\zeta e_k{}^k + \mu_3 e_{kl} v^k v^l - \gamma_1 v^k \nabla_k T - \zeta_1 \delta_\rho u/\delta \xi) + 2\mu\, (e^{ij} - {}^1/_3 e_k{}^k g^{ij}) +$$
$$+ 2\mu_1 (e^{jk} v^i v_k + e^{ik} v^j v_k) + (\mu_3 e_k{}^k + \mu_2 e_{kl} v^k v^l - \gamma_2 v^k \nabla_k T -$$
$$- \zeta_2 \delta_\rho u/\delta \xi)\, v^i v^j - \gamma_3 (v^i \nabla^j T + v^j \nabla^i T)$$
$$q^i = -\chi \nabla^i T - (T \gamma_3 e_k{}^k + T \gamma_2 e_{kl} v^k v^l + \chi_1 v^k \nabla_k T +$$
$$+ T \gamma_4 \delta_\rho u/\delta \xi)\, v^i - T\, (\gamma_1 v^k \nabla^i v_k + \gamma_3 v^k \nabla_k v^i) \tag{2.5}$$
$$\rho \xi^{\cdot} = -\zeta_1 e_k{}^k - \zeta_2 e_{kl} v^k v^l - \gamma_4 v^k \nabla_k T - \rho \Gamma \delta_\rho u/\delta \xi$$
$$(e_{ij} = {}^1/_2 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i))$$

В рассматриваемой модели фигурирует, вообще говоря, 14 кинетических параметров, зависящих от $s$, $\rho$, $\xi$, $|\nabla\xi|$. Для выполнения условия $d_i s \geqslant 0$ необходимо и достаточно наложить на них следующие ограничения

$$\mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \zeta,\ \chi,\ \chi_1,\ \Gamma \geqslant 0; \quad \zeta\mu_2 \geqslant \mu_3^2, \quad \rho\chi_1\Gamma \geqslant \gamma_4^2$$

Отметим, что на величины $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ не накладывается каких-либо ограничений, так как соответствующие члены в (2.5) не дают вклада в производство энтропии.

Для упрощения будем в дальнейшем пренебрегать зависимостью потоков $\tau^{ij}/T$ и $\rho\dot{\xi}/T$ от $\nabla_i T$, а также считать, что $q^k = q^k(s, \rho, \xi, |\nabla\xi|, g^{ij}, \nabla_i T)$. В этом случае модель характеризуется девятью кинетическими параметрами, число которых уменьшается до шести, если среду можно считать несжимаемой ($e_k{}^k = 0$).

3. Рассмотрим состояние изотермического равновесия. Распределения $\rho$ и $\xi_\alpha$ описываются системой уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} - \frac{1}{\rho}\nabla_j\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \nabla_j \xi_\alpha}\right) = 0, \qquad \nabla_j p^{ij} + \rho F^i = 0 \tag{3.1}$$

$$f(\rho, T_0, g^{ij}, \xi_\alpha, \nabla_i\xi_\alpha) = u - T_0 s$$

$$p^{ij} = -\rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}g^{ij} - \rho\frac{\partial f}{\partial \nabla_j\xi_\alpha}\nabla^i\xi_\alpha$$

где $f$ — свободная энергия Гельмгольца единицы массы среды. Видно, что тензор напряжений не шаровой, поэтому система уравнений (3.1) переопределена. Вследствие специальной структуры тензора напряжений уравнения (3.1) имеют первый интеграл

$$g - \Phi = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

где $g(p, T_0, g^{ij}, \xi_\alpha, \nabla_i\xi_\alpha) = f + p/\rho$ — удельная энергия Гиббса, $\Phi$ — потенциал внешних массовых сил.

На основании формулы (3.2) применительно к изотермическим течениям идеальной равновесной, среды в поле потенциальных внешних сил можно установить интегралы Бернулли для стационарных течений и Коши — Лагранжа для нестационарных потенциальных течений. Факт существования интегралов не зависит от максимального порядка производных параметров $\xi_\alpha$, являющихся аргументами функции свободной нергии (ср. с [9]), при этом для $f = f(\rho, T_0, g^{ij}, \xi_\alpha, \nabla_i\xi_\alpha, \nabla_j\nabla_i\xi_\alpha, \ldots)$ второе уравнение 3.1) остается в силе, тензор напряжений приобретает вид

$$p^{ij} = -\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}g^{ij} - \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\nabla_j\xi_\alpha} - \frac{1}{\rho}\nabla_k\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\nabla_k\nabla_j\xi_\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho}\nabla_k\nabla_l\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\nabla_k\nabla_l\nabla_j\xi_\alpha}\right) - \ldots\right)\nabla^i\xi_\alpha - \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\nabla_k\nabla_j\xi_\alpha} - \frac{1}{\rho}\nabla_l\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\nabla_l\nabla_k\nabla_j\xi_\alpha}\right) + \ldots\right)\times$$
$$\times\nabla_k\nabla^i\xi_\alpha - \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\nabla_l\nabla_k\nabla_j\xi_\alpha} - \ldots\right)\nabla_l\nabla_k\nabla^i\xi_\alpha$$

а условие равновесия (первое соотношение (3.1)) преобразуется в

$$\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha} - \frac{1}{\rho}\nabla_j\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\nabla_j\xi_\alpha}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla_k\nabla_j\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\nabla_k\nabla_j\xi_\alpha}\right) - \ldots = 0$$

4. Особенности распространения акустических волн в локальной релаксирующей среде хорошо известны [10]. Появление в теории масштаба времени, связанного с кинетикой релаксации, обеспечивает дисперсию волн и аномальное затухание на характерной частоте. Покажем, к каким изменениям приводит учет нелокальности. Начнем со случая невязкой, нетеплопроводной среды. Рассмотрим простейшее выражение для внутрен-

ней энергии, зависящей от $\nabla\xi$ [6, 7]

$$u = u_0(s, \rho, \xi) + {}^1/_2\varepsilon(\nabla\xi)^2 \tag{4.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр нелокальности среды. Исходное состояние равновесия будем считать однородным: $s \equiv s_0$, $\rho \equiv \rho_0$, $\xi \equiv \xi^*(s_0, \rho_0)$. Функция $\xi^*(s, \rho)$ описывает зависимость равновесных значений параметра $\xi$ от удельной энтропии и плотности. Потребуем

$$(\partial^2 u/\partial\xi^2)_0 > 0, \quad (2\rho\partial u/\partial\rho + \rho^2\partial^2 u/\partial\rho^2)_0 > 0$$

Система уравнений, описывающая движение невязкой, нетеплопроводной, релаксирующей среды с энергией (4.1) имеет вид

$$\partial\rho/\partial t + \nabla_i(\rho v^i) = 0, \quad \rho dv^i/dt = -\nabla^i p - \nabla_j(\varepsilon\rho\nabla^i\xi\nabla^j\xi)$$

$$d\xi/dt = -\Gamma(\partial u/\partial\xi - \varepsilon(\Delta\xi + (\nabla\xi\rho^{-1}\nabla\rho)))$$

$$ds/dt = \Gamma(\partial u/\partial\xi - \rho^{-1}\nabla_j(\varepsilon\rho\nabla^j\xi))^2, \quad p = \rho^2\partial u/\partial\rho$$

Проведя линеаризацию этой системы относительно исходного равновесного состояния, приходим к уравнениям, описывающим изоэнтропическое в первом приближении) возмущение параметров в звуковой волне. В качестве условия существования решений, пропорциональных $\exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$, получим дисперсионное соотношение

$$A\sigma^4 + (1 - B - i\eta - A\eta^2)\sigma^2 - \eta^2(1 - i\eta) = 0 \tag{4.2}$$

$$\sigma = c_\infty\tau\,|\mathbf{k}|, \quad \eta = \omega\tau, \quad A = l_\varepsilon^2/l^2, \quad B = 1 - c_*^2/c_\infty^2$$

$$\tau = 1/(\Gamma(\partial^2 u/\partial\xi^2)_0), \quad l = c_\infty\tau, \quad l_\varepsilon = (\varepsilon/(\partial^2 u/\partial\xi^2)_0)^{1/2}$$

$$c_\infty = (\partial p/\partial\rho)_0^{1/2}, \quad c_* = (\partial p/\partial\rho + (\partial p/\partial\xi)\,\partial\xi^*/\partial\rho)_0^{1/2}.$$

где $\sigma$ и $\eta$ — безразмерные волновое число и циклическая частота, $A$ и $B$ — основные безразмерные критерии задачи, $\tau$, $l$ — характерные (кинетические) временной и пространственный масштабы, $l_\varepsilon$ — пространственный масштаб, связанный с нелокальностью среды, $c_\infty$ и $c_*$ — замороженная и равновесная скорости звука. Безразмерные параметры $A$ и $B$ характеризуют меру нелокальности среды и различие между замороженной и равновесной скоростями звука.

Решение уравнения (4.2) имеет две ветви

$$\sigma_\pm = (2A)^{-1}\{A\eta^2 + i\eta - (1 - B) \pm [(A\eta^2 + i\eta - (1 - B))^2 + 4A\eta^2(1 - i\eta)]^{1/2}\} \tag{4.3}$$

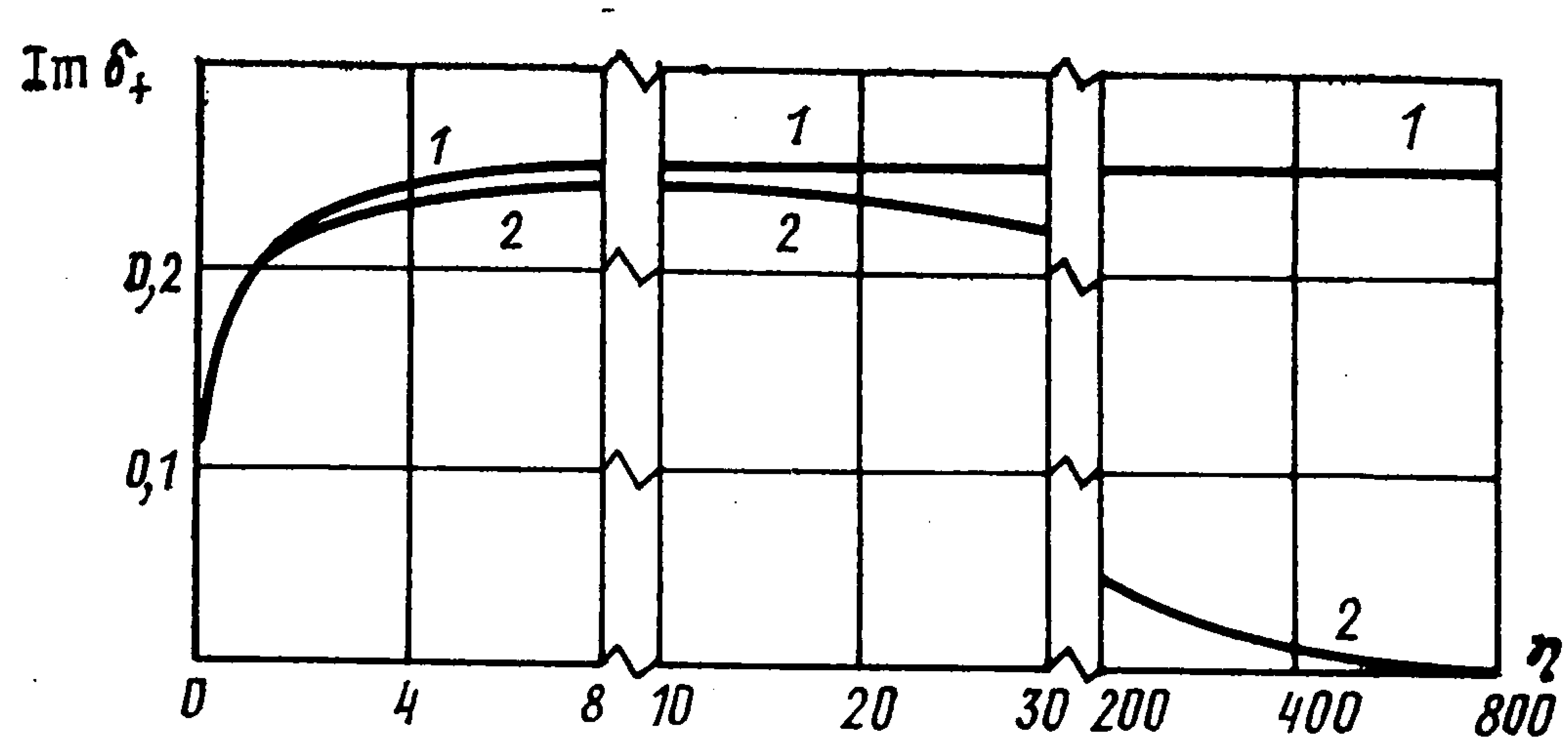
одна из которых (со знаком плюс) соответствует обычной акустической волне в идеальной релаксирующей сжимаемой жидкости, а другая (со знаком минус) является специфической для рассматриваемой нелокальной среды. Обе волновые моды соответствуют продольным колебаниям. Классическая теория [11] получается в пределе $A \to 0$.

Для акустической ветви в области низких частот ($\eta \ll 1$) имеем

$$\sigma_+ = \frac{1}{(1-B)^{1/2}}\eta + \frac{iB}{2(1-B)^{3/2}}\eta^2 + \frac{1}{8}\left[\frac{B^2 - 4B(1+A)}{(1-B)^{5/2}}\right]\eta^3 - \frac{i}{16}\left[\frac{B^3 - 4B^2(1-A) + 8B(1+2A)}{(1-B)^{7/2}}\right]\eta^4 + \ldots \tag{4.4}$$

Первые два члена этой асимптотики совпадают с полученными в [11]; при этом с точностью до членов порядка $\eta^2$, фазовая скорость акустической волны ($\omega/\mathrm{Re}\,|\mathbf{k}|$) равна $c_*$, безразмерный коэффициент поглощения ($\mathrm{Im}\,\sigma$) порядка $\eta^2$, возмущения $\rho'$, $\xi'$, $\mathbf{v}'$ в волне связаны соотношениями

$$B^{1/2}\rho'/\rho_0 + \xi' = 0, \quad |\mathbf{v}'| = c_*\rho'/\rho_0$$




Фиг. 1

В случае высоких частот ($\eta \gg 1$) имеем

$$\sigma_+ = \eta + \frac{B}{2}\frac{1}{A\eta} + \frac{iB}{2}\left(\frac{1}{A\eta}\right)^2 \tag{4.5}$$

Фазовая скорость акустической волны стремится к $c_\infty$ (как и в классическом случае $A = 0$), безразмерный коэффициент поглощения убывает пропорционально $\eta^{-2}$ (в классическом случае он постоянен) (фиг. 1), а возмущения параметров в волне, в первом приближении по $\eta^{-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\xi' = 0, \quad |\mathbf{v}'| = c_\infty \rho'/\rho_0$$

На фиг. 2 представлена зависимость безразмерного коэффициента поглощения на длину волны ($\gamma = \operatorname{Im}\sigma/\operatorname{Re}\sigma$) акустической ветви $\sigma_+$ от циклической частоты $\eta$. Характерная частота максимального поглощения звука практически не зависит от $A$. Кривым *1*, *2* на фигурах соответствуют значения $A = 0$ и $10^{-2}$ (при $B = 0{,}5$).

Асимптотика (4.5) равномерно пригодна в области $\eta \gg A^{-1/2}$. Промежуточную асимптотику, справедливую при $1 \ll \eta \ll A^{-1/2}$ ($A \ll 1$), можно получить, совершив в формуле (4.3) предельный переход $A \to 0$, $\eta \to +\infty$, $A^{1/2}\eta = \text{const} \overset{\text{def}}{=} \alpha$. В этом случае

$$\sigma_+ = \eta + {}^1/_2 iB + {}^1/_8\,[B^2 + 4B(1-B) + \alpha]\,\eta^{-1} - {}^1/_{16}\, i\,[B^3 + 4B^2(1 - B + \alpha) + 8B((1 - B + \alpha)^2 - \alpha B)]\,\eta^{-2} + \ldots \tag{4.6}$$

При $A \to 0$ левая граница области применимости соотношения (4.5) уходит на бесконечность, а формулы (4.4) и (4.6) превращаются в классические асимптотические дисперсионные соотношения [11].

Перейдем к анализу второй ветви соотношения (4.3), которая описывает быстро затухающие волны параметра порядка (ВПП). В случае низких частот ($\eta \ll 1$) имеем

$$\sigma_- = i\left(\frac{1-B}{A}\right)^{1/2} + \frac{\eta}{2(1-B)^{1/2}A^{1/2}} + \ldots \tag{4.7}$$

В первом приближении по $\eta$ фазовая скорость и безразмерный коэффициент поглощения ВПП равны соответственно $2A^{1/2}c_*$ и $(1 - B)^{1/2}/A^{1/2}$.

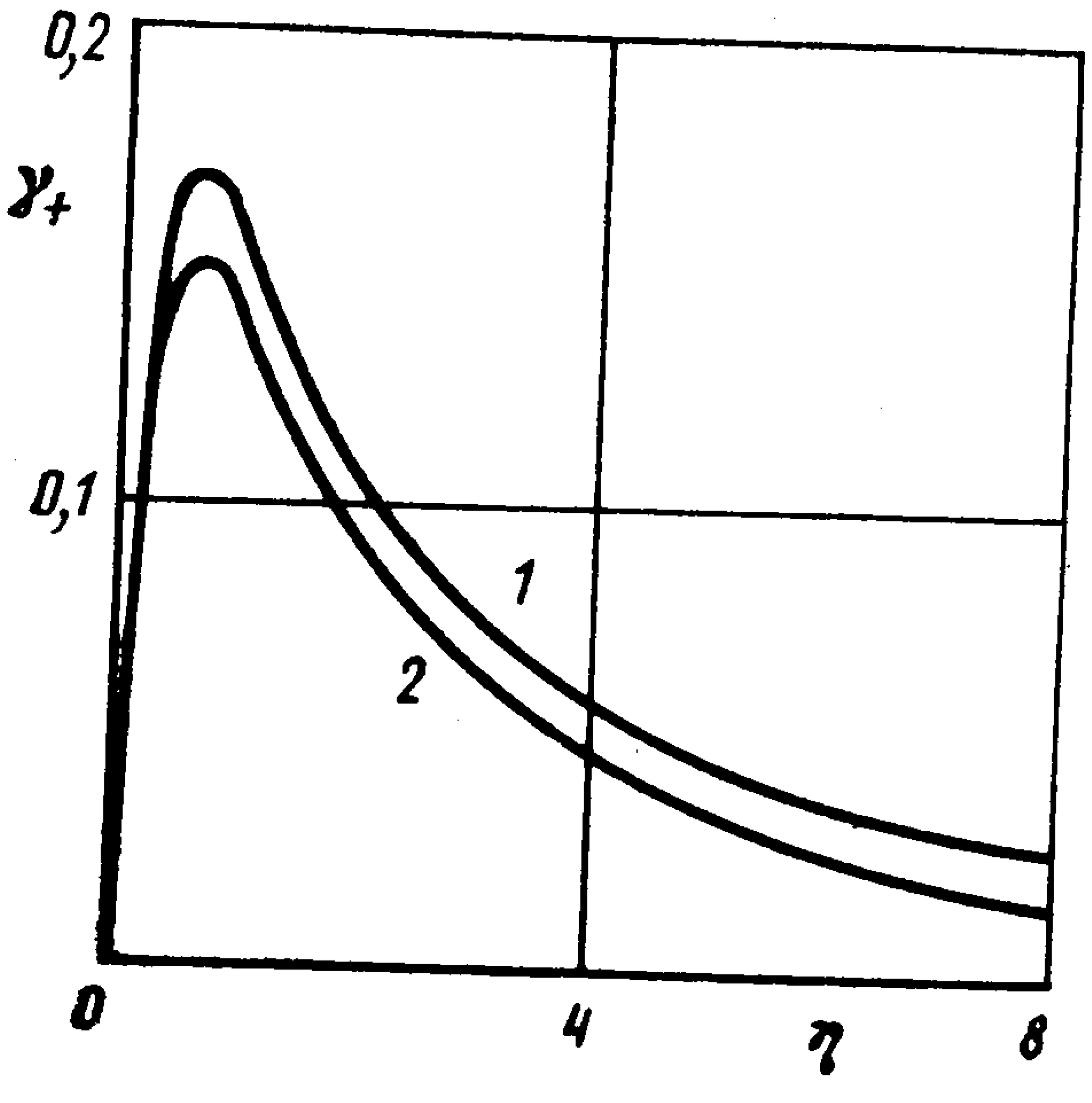
В случае высоких частот ($\eta \gg 1$)

$$\sigma_- = (\eta/(2A))^{1/2} + i\,(\eta/(2A))^{1/2} + \ldots \tag{4.8}$$

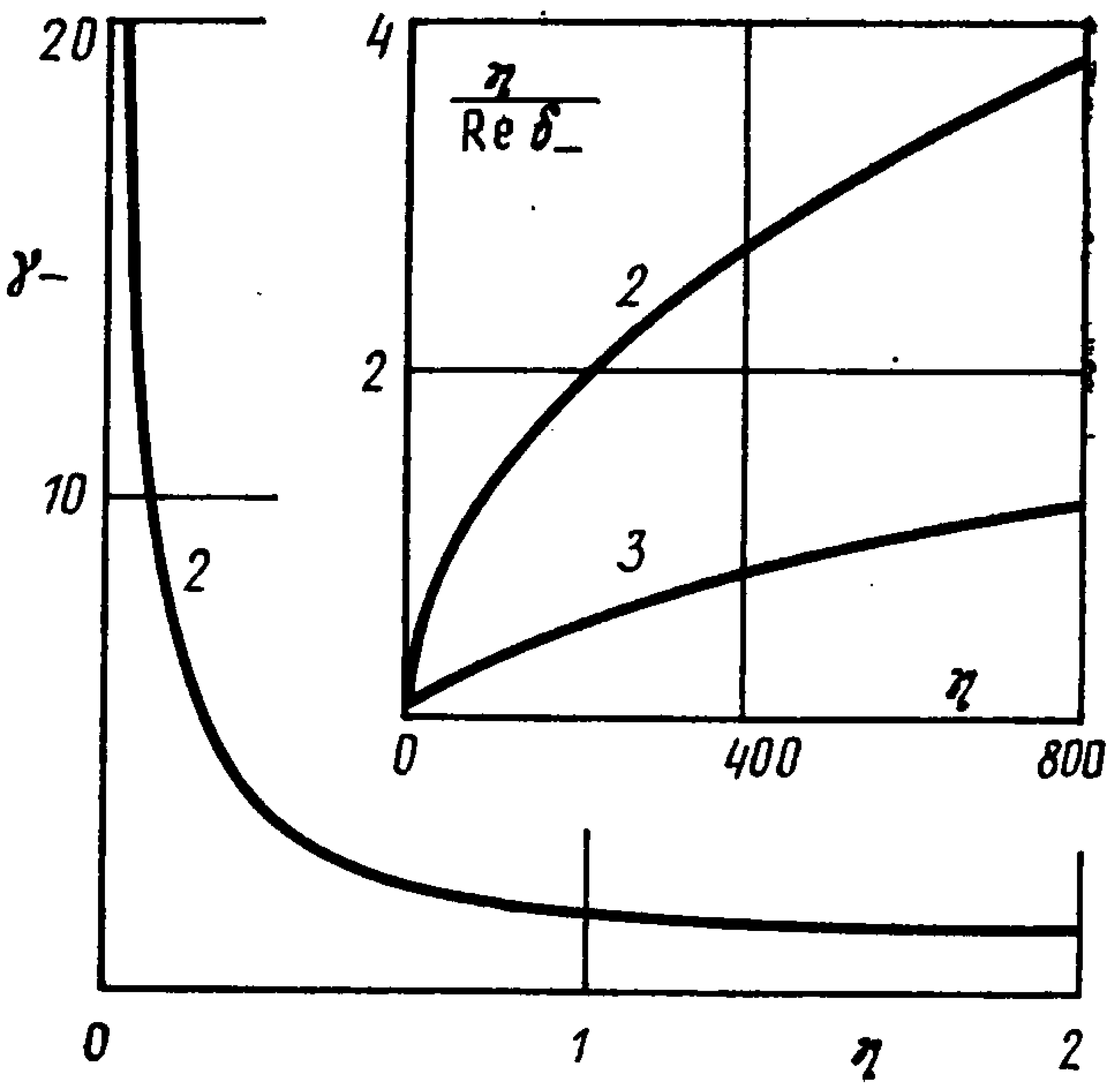
Фазовая скорость и коэффициент поглощения возрастают пропорционально $\eta^{1/2}$.

Возмущения в $\rho'$, $\xi'$, $\mathbf{v}'$ в волне связаны соотношениями

$$\rho'/\rho_0 + B^{1/2}\xi' = 0, \quad |\mathbf{v}'| = 2A^{1/2}c_*\rho'/\rho_0$$




Фиг. 2




**Фиг. 3**

в случае низких частот и

$$B^{1/2}\rho'/\rho_0 + \xi' = 0, \quad |\,v'\,| = (2A\eta)^{1/2}\, c_\infty \rho'/\rho_0$$

в случае высоких частот.

Как в акустической волне, так и в ВПП возмущение давления определяется формулой $p' = c_\infty \rho' + \rho_0 c_\infty\, (\partial^2 u/\partial \xi^2)_0 B^{1/2} \xi'$.

Результаты численного расчета зависимости фазовой скорости и коэффициента поглощения на длину волны от циклической частоты для ветви $\sigma_-$ дисперсионного соотношения (4.3) приведены на фиг. 3. Кривым *2*, *3* соответствуют значения $A = 10^{-2}$ и $10^{-3}$ при $B = 0{,}5$. В пределе $B \to 0$ кинетическое уравнение отделяется от остальных уравнений, в этом случае возмущения $\xi'$ и $\rho'$, $p'$, $v'$ распространяются независимо.

Обусловленный вязкостью среды вклад в дисперсию и поглощение продольных акустических волн характеризуется числом Рейнольдса (Re)

$$\mathrm{Re} = \rho_0 c_\infty l/(^4/_3 \mu_s + \mu_V), \quad \mu_s = \mu + \mu_1, \quad \mu_V = \zeta + {}^8/_3\, \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3$$

Фазовая скорость низкочастотных ($\eta \ll 1$) колебаний не изменяется по сравнению со случаем невязкой среды ($\mathrm{Re} \to +\infty$), безразмерный коэффициент поглощения приобретает вид $\eta^2 (1 - B)^{-3/2} (B + 1/\mathrm{Re})/2$.

В области высоких частот ($\eta \gg \mathrm{Re}$, $\mathrm{Re} \gg 1$) $\sigma_+ = (\mathrm{Re}\eta/2)^{1/2} + i\, (\mathrm{Re}\eta/2)^{1/2} + \ldots$ Фазовая скорость и коэффициент поглощения возрастают пропорционально $\eta^{1/2}$. Если $1 \ll \eta \ll \mathrm{Re}$ ($\mathrm{Re} \gg 1$), то вязкостью среды в первом приближении по $\eta^{-1}$ можно пренебречь; при этом в случае $1 \ll 1/A^{1/2} \ll \eta \ll \mathrm{Re}$ справедлива асимптотика (4.5), если же $1 \ll \eta \ll 1/A^{1/2} \ll \mathrm{Re}$, то выполняется соотношение (4.6).

В случае низких частот фазовая скорость ВПП имеет вид $2A^{1/2} (1 + B/\mathrm{Re})\, c_*$, коэффициент поглощения в первом приближении по $\eta$ не изменется по сравнению со случаем невязкой среды. В области высоких частот ($\eta \gg 1$) влияние вязкости на ВПП не проявляется в первом приближении по $\eta^{-1/2}$, поэтому асимптотика (1.8) остается справедливой.

Авторы благодарят В. П. Мясникова за постоянное внимание к работе, а также Ю. Ю. Подладчикова за замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 381 с.
2. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. № 5. С. 121—180.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.

4. *Бердичевский В. Л.* Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 510—530.
5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1081—1086.
6. *Трускиновский Л. М.* Неравновесные фазовые границы в мантии Земли // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 6. С. 1337—1342.
7. *Dunn J. E., Serrin J.* On the thermomechanics of interstitial working // Arch. Rat. Mech. Anal. 1985. V. 88. № 2. P. 95.
8. *Де Грот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
9. *Трускиновский Л. М.* Критические зародыши в модели Ван-дер-Ваальса // Докл. АН СССР. 1983. Т. 2269. № 3. С. 587—592.
10. *Эйнштейн А.* Распространение звука в частично диссоциированных газах. 1920 // Собр. научн. тр. М.: Наука, 1966. Т. 3. С. 423—429.
11. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. № 3. С. 438—449.

Москва

Поступила в редакцию 1.IV.1988