УДК 583.70

В. В. Токарчук

БАРНЕТТОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

На основе кинетического подхода проводится обобщение ланжевеновской динамики и флуктуационно-диссипативных соотношений для гидродинамических флуктуаций на системы, описываемые в третьем барнеттовском порядке по градиентам гидродинамических переменных.

Известно [1—3], что для медленных неизотермических течений газа в уравнениях гидродинамики члены Навье — Стокса — Фурье (НСФ) и некоторые члены Барнетта имеют один порядок величины и в равной степени формируют основное асимптотическое приближение к решению. Для таких течений динамика средних значений гидродинамических переменных описывается уже уравнениями третьего по градиентам барнеттовского порядка [1—3]. Этот результат порождает естественный «отклик» в теории неравновесных гидродинамических флуктуаций. Действительно, в ней возникает вопрос о том, пригодны ли существующие уравнения, т. е. линеаризованные по флуктуациям около неравновесного устойчивого состояния уравнения НСФ с ланжевеновскими локально-равновесными источниками [4] в форме Ландау — Лифшица для описания флуктуаций в течениях, рассмотренных в [1—3]. Для ответа на него необходимо решить две задачи: построить ланжевеновские уравнения динамики флуктуаций в третьем по градиентам барнеттовском приближении и оценить вклад новых членов как в динамический оператор, так и в ланжевеновский источник флуктуаций. Первая из этих задач будет решена ниже.

В работе обобщаются и дополняются результаты [5, 6], в частности будет показано, что линейные по градиентам вклады в формулы Ландау—Лифшица порождаются барнеттовской неравновесностью системы.

1. Ланжевеновское описание малых флуктуаций гидродинамических переменных. Рассмотрим неравновесный однокомпонентный газ. Уравнения переноса для его гидродинамических переменных запишем в тензорном виде

$$\partial\Phi_\mu/\partial t = \Theta_\mu\,[\Phi], \quad \mu = 0, 1, \ldots, 4$$

Здесь $\Phi_\mu = (n, u_k, e)$ — пятимерный вектор, компоненты которого — средние значения гидродинамических переменных: n — плотность, u_k $(k = 1, 2, 3)$ — три компоненты гидродинамической скорости, $e = 3kT/2$ — тепловая энергия (k — постоянная Больцмана, T — температура), Θ_μ — динамический оператор с компонентами

$$\Theta_0 = -\nabla_i n u_i, \quad \Theta_k = -u_i\nabla_i u_k - \rho^{-1}\nabla_i\Pi_{ik}$$
$$\Theta_4 = -u_i\nabla_i e - n^{-1}\nabla_i q_i - n^{-1}\Pi_{ij}\nabla_j u_i, \quad \rho = mn$$

где Π_{ij} — тензор давлений, q_i — вектор теплового потока.

В приближении НСФ имеем

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(1)} = p^{(0)}\delta_{ij} + p_{ij}^{(1)}, \quad q_i = q_i^{(1)}, \quad p_{ij}^{(1)} = -2\eta E_{ij}^{kl}\nabla_k u_l,$$
$$q_i^{(1)} = -\lambda\nabla_i T, \quad E_{ij}^{kl} = {}^1/_2(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}) - {}^1/_3\delta_{kl}\delta_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

где $p^{(0)}$ — давление, η — вязкость, λ — теплопроводность. В этих обозначениях система ланжевеновских уравнений для гидродинамических флуктуаций $\delta\Phi_\mu = (\delta n, \delta u_k, \delta e)$ имеет вид

$$\partial\delta\Phi_\mu/\partial t - \Theta'_{\mu,\nu}[\Phi]\delta\Phi_\nu = \delta G_\mu \tag{1.1}$$

Здесь $\Theta'_{\mu,\nu}$ — линеаризованный динамический оператор, действие которого на произвольную функцию координат $\varphi(r)$ имеет вид

$$\Theta'_{\mu,\nu}\varphi(r) = \int dr'\varphi(r')\{\delta\Theta_\mu[\Phi; r]/\delta\Phi_\nu(r')\}$$

По повторяющимся греческим индексам здесь и далее проводится суммирование от 0 до 4. Неоднородный член δG_μ — ланжевеновский гауссовский случайный источник гидродинамических флуктуаций с нулевым средним значением, компонентами

$$\delta G_0 = 0, \quad \delta G_k = -\rho^{-1}\nabla_i\delta P_{ik}, \quad \delta G_4 = -n^{-1}\nabla_i\delta Q_i - n^{-1}\delta P_{ij}\nabla_j u_i$$

и корреляционными функциями

$$\begin{gathered}\langle\delta G_k(1)\,\delta G_l(2)\rangle = (\rho_1\rho_2)^{-1}\nabla_{1i}\nabla_{2j}\langle\delta P_{ik}(1)\,\delta P_{jl}(2)\rangle, \langle\delta G_k(1)\,\delta G_4(2)\rangle = \\ = (\rho_1 n_2)^{-1}\nabla_{1i}\nabla_{2j}\langle\delta P_{ik}(1)\,\delta Q_j(2)\rangle + (\rho_1 n_2)^{-1}(\nabla_{2j}u_i)\nabla_{1l}\langle\delta P_{lk}(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle \\ \langle\delta G_4(1)\,\delta G_4(2)\rangle = (n_1 n_2)^{-1}\{\nabla_{1i}\nabla_{2j}\langle\delta Q_i(1)\,\delta Q_j(2)\rangle + \\ + \langle\delta P_{ij}(1)\,\delta P_{kl}(2)\rangle(\nabla_{1i}u_j)(\nabla_{2l}u_k) + (\nabla_{2j}u_i)\nabla_{1l}\langle\delta Q_l(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle + \\ + (\nabla_{1j}u_i)\nabla_{2l}\langle\delta P_{ij}(1)\,\delta Q_l(2)\rangle\}, \quad (1) \equiv (t_1, r_1), \quad (2) \equiv (t_2, r_2)\end{gathered} \tag{1.2}$$

По повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Величины δP_{ij}, δQ_i представляют собой флуктуирующие составляющие соответственно тензора напряжений $\delta p_{ij} = \delta'(p_{ij}) + \delta P_{ij}$ и вектора теплового потока $\delta q_i = \delta'(q_i) + \delta Q_i$, где δ' — линеаризующий по флуктуациям оператор, например

$$\delta'(n^{-1}\nabla_i q_i) = -n^{-2}\delta n\nabla_i q_i + n^{-1}\nabla_i\delta q_i$$

Из выражений (1.2) следует, что низший порядок парных корреляторов ланжевеновских источников это второй порядок по градиентам. Вклад такого же порядка ланжевеновский источник дает в решение системы уравнений (1.1).

Действительно, поскольку при исследовании динамики гауссовских тепловых флуктуаций искомым объектом является парный коррелятор $\langle\delta\Phi_\mu(1)\,\delta\Phi_\nu(2)\rangle$, искомое утверждение следует уже из формального решения системы (1.1) вида

$$\begin{gathered}\langle\delta\Phi_\mu(t, r_1)\,\delta\Phi_\nu(t, r_2)\rangle = \exp\{-t[\Theta'_{\mu,\alpha}(r_1) + \Theta'_{\nu,\beta}(r_2)]\}\langle\delta\Phi_\alpha(0, r_1)\,\delta\Phi'_\beta(0, r_2)\rangle + \\ + \int_0^t d\tau\exp\{-(t-\tau)[\Theta'_{\mu,\alpha}(r_1) + \Theta'_{\nu,\beta}(r_2)]\}\langle\delta G_\alpha'(\tau, r_1)\,\delta G_\beta'(\tau, r_2)\rangle\end{gathered}$$

где использован δ-видный характер временной корреляции

$$\langle\delta G_\alpha(\tau_1, r_1)\,\delta G_\beta(\tau_2, r_2)\rangle = \delta(\tau_1 - \tau_2)\langle\delta G_\alpha'(\tau_1, r_1)\,\delta G_\beta'(\tau_1, r_1)\rangle$$

В настоящее время ланжевеновская динамика флуктуаций гидродинамических переменных достаточно полно исследована в состоянии равновесия и в области неравновесных состояний описываемых в приближении НСФ [7, 8]. В этом приближении имеем

$$\Theta'_{\mu,\nu} = \Theta^{(1)'}_{\mu,\nu}[\nabla] + \Theta^{(2)'}_{\mu,\nu}[\nabla^2]$$

где $\Theta^{(1)}_\mu$ — линейный по градиентам оператор Эйлера с компонентами

$$\Theta^{(1)}_0 = -\nabla_i n u_i, \quad \Theta^{(1)}_k = -u_i\nabla_i u_k - \rho^{-1}\nabla_k p^{(0)}$$

$$\Theta^{(1)}_4 = -u_i\nabla_i e - n^{-1}p^{(0)}\nabla_i u_i$$

а $\Theta^{(2)}_\mu$ — билинейный по градиентам оператор НСФ с компонентами

$$\Theta^{(2)}_0 = 0, \quad \Theta^{(2)}_k = -\rho^{-1}\nabla_l p^{(1)}_{kl}, \quad \Theta^{(2)}_4 = -n^{-1}\nabla_i q^{(1)}_i - n^{-1}p^{(1)}_{kl}\nabla_l u_k$$

и $\delta P_{ij} = \delta P^{(0)}_{ij}$, $\delta Q_i = \delta Q^{(0)}_i$ — флуктуирующие составляющие термодинамических потоков, удовлетворяющие локально-равновесным формулам

Ландау — Лифшица [7, 8]

$$
\begin{gathered}
\langle \delta P_j^{(0)}(1)\,\delta P_{kl}^{(0)}(2)\rangle = \delta(1-2)\,E_{hs}^{ij}E_{sg}^{kl}4n^{-1}(1)\,p^{(0)}(1)\,\eta(T)\,\delta_{hg} \\
\langle \delta Q_i^{(0)}(1)\delta Q_j^{(0)}(2)\rangle = \delta(1-2)\delta_{ij}2n^{-1}(1)p^{(0)}(1)T(1)\lambda(T) \qquad (1.3) \\
\langle \delta Q_i^{(0)}(1)\,\delta P_{kl}^{(0)}(2)\rangle = \langle \delta Q_i^{(0)}(1)\rangle = \langle \delta P_{kl}^{(0)}(1)\rangle = 0 \\
\delta(1-2) \equiv \delta(t_1-t_2)\delta(r_1-r_2)
\end{gathered}
$$

В состоянии термодинамического равновесия $\Theta_{\mu,\nu}' = \Theta_{\mu,\nu}^{(1)'}|_{\Phi_\mu=\mathrm{const}}$, и в формулах (1.3) необходимо положить $\Phi_\mu = \mathrm{const}$.

Одно из возможных обобщений линейной теории неравновесных гидродинамических флуктуаций состоит в расширении области ее применения за пределы приближения НСФ. По аналогии с гидродинамикой средних значений построим динамические уравнения для флуктуаций гидродинамических переменных в области состояний, описываемой следующим барнеттовским приближением, т. е. в третьем порядке по градиентам. Для этого используем кинетический подход в сочетании с модифицированной схемой метода Чепмена — Энскога (ЧЭ).

2. Основные кинетические уравнения и постановка задачи. В области неравновесных устойчивых состояний газа эволюция тепловых флуктуаций макроплотности $\delta N = N - F$, $F = \langle N\rangle$ ($N(t, x)$ — случайное поле макроплотности, $x = (r, v)$) подчиняется системе кинетических уравнений [7]

$$
\begin{gathered}
(\partial/\partial t + v_i\nabla_i)\,\delta N = J_v'(F)\,\delta N + \delta I \qquad (2.1) \\
(\partial/\partial t + v_i\nabla_i)\,F = J_v(F, F)
\end{gathered}
$$

Здесь $J_v(F, F)$ и $J_v'(F)$ — соответственно интеграл и линеаризованный оператор столкновений Больцмана, δI — сторонний случайный источник флуктуаций, который является гауссовским случайным процессом с нулевым средним значением и корреляционной функцией вида

$$
\begin{gathered}
\langle \delta I(t_1, x_1)\,\delta I(t_2, x_2)\rangle = \delta(1-2)\{\delta(v_1-v_2)\,J_{v_1}(F, F) + \\
+ J_{v_1v_2}(F, F) - [J_{v_1}'(F) + J_{v_2}'(F)]\,F\delta(v_1-v_2)\} \equiv \delta(1-2)I[F, F] \qquad (2.2)
\end{gathered}
$$

где $J_{v_1v_2}(F, F)$ — непроинтегрированный интеграл столкновений [7].

Введем систему аддитивных инвариантов столкновения Ψ_μ ($\mu = 0, 1, \ldots, 4$) с компонентами

$$
\Psi_\mu = \{1;\ n^{-1}c_k,\ k = 1, 2, 3;\ n^{-1}(^1/_2mc^2 - e)\},\quad c_k = v_k - u_k
$$

С ее помощью флуктуации гидродинамических переменных представим в виде

$$
\begin{gathered}
\delta n(t, r) = \int dv\Psi_0\delta N,\qquad \delta u_k(t, r) = \int dv\Psi_k\delta N \\
\delta e(t, r) = \int dv\Psi_4\delta N,\qquad \delta N = \delta N(t, x)
\end{gathered} \qquad (2.3)
$$

Систему уравнений переноса для гидродинамических флуктуаций получим, вычисляя моменты первого уравнения (2.1) в пространстве скоростей. Учитывая при этом выражение (2.3) и ортогональность реализаций случайного поля δI инвариантам столкновения ($\int dv\Psi_\mu\delta I = 0$), найдем

$$
\begin{gathered}
\partial\delta n/\partial t + \delta'(\nabla_i n u_i) = 0 \\
\partial\delta u_k/\partial t + \delta'(u_i\nabla_i u_k) = -\delta'(\rho^{-1}\nabla_i\Pi_{ik}) \\
\partial\delta e/\partial t + \delta'(u_i\nabla_i e) = -\delta'(n^{-1}\nabla_i q_i + n^{-1}\Pi_{ij}\nabla_j u_i) + \\
+ n^{-1}\nabla_i(\delta u_j)(\Pi_{ij} + {^3/_2}p^{(0)}\delta_{ij}) \qquad (2.4)
\end{gathered}
$$

Средние значения теплового потока, тензора давлений и их флуктуации определяются выражениями

$$q_k(t,r)=\int dv^1/_2mc^2c_kF(t,x),\qquad \delta q_k(t,r)=\int dv^1/_2mc^2c_k\delta N(t,x)$$
$$\Pi_{kl}(t,r)=\int dvmc_kc_lF(t,x),\qquad \delta\Pi_{kl}(t,r)=\int dvmc_kc_l\delta N(t,x) \tag{2.5}$$

Для замыкания уравнений переноса (2.4) необходимо решить две задачи: найти функциональную зависимость q_k и Π_{kl} от Φ_μ, а δq_k и $\delta\Pi_{kl}$ — от Φ_μ и $\delta\Phi_\mu$. Первая из этих задач решена путем построения нормальных решений уравнения Больцмана (второе уравнение (2.1)). Метод ЧЭ с точностью до членов третьего порядка по градиентам дал законы Фурье, Ньютона и барнеттовские добавки к ним. Используем этот же метод для решения второй задачи. Для этого перейдем в уравнениях (2.1) к безразмерным переменным и функциям, характерным для гидродинамического режима

$$t_G=twL^{-1},\ r_G=rL^{-1},\ v_G=vw^{-1},\ F_G=Fw^3n^{-1}$$

(L — характерный гидродинамический масштаб длины, w — средняя тепловая скорость частицы). Размерность гауссовских полей определяется через их вторые моменты [5]

$$\delta N_G=\delta Nw^{-3}(L^3n^{-1})^{-1/2},\quad \delta I_G=\delta I\,[L^2w^2(ln^{-1})^{1/2}]^{-1}$$

(l — средняя длина свободного пробега).

В безразмерных переменных в уравнениях (2.1) появится малый параметр $\varepsilon=lL^{-1}$ — число Кнудсена

$$\varepsilon(\partial/\partial t+v_i\nabla_i)\delta N=J_v'(F)\delta N+\sqrt{\varepsilon}\delta I \tag{2.6}$$
$$\varepsilon(\partial/\partial t+v_i\nabla_i)F=J_v(F,F)$$

Здесь и далее индекс G у переменных и функций опускаем. Метод ЧЭ позволяет построить класс нормальных асимптотических при $\varepsilon\ll 1$ решений системы уравнений (2.6) вида

$$\delta N(t,x)=\delta N[\Phi(t),\delta\Phi(t);x],\quad F(t,x)=F[\Phi(t);x]$$

вычислить на его основе потоки по формулам (2.5) и тем самым замкнуть уравнения переноса (2.4).

Прежде чем перейти к отысканию нормальных решений, проведем необходимую модификацию схемы метода ЧЭ.

Сущность метода ЧЭ состоит в том, что в гидродинамическом режиме не только искомая функция, но и эволюционный оператор кинетического уравнения раскладываются в ряды по числу Кнудсена ε [9]

$$\partial/\partial t=\mathrm{d}_{(0)}/\partial t+\varepsilon\partial_{(1)}/\mathrm{d}t+\varepsilon^2\,\partial_{(2)}/\partial t \tag{2.7}$$

В кинетической теории неравновесных гидродинамических флуктуаций также можно использовать метод ЧЭ. При этом, однако, более удобным оказывается отличное от (2.7) разложение оператора эволюции. Действительно, в отличие от обычных однородных уравнений гидродинамики ланжевеновские уравнения для флуктуаций — неоднородные уравнения. Причем неоднородные члены этих уравнений в общем случае имеют растущие порядки по градиентам средних значений гидродинамических переменных. В связи с этим в рамках стандартной схемы метода ЧЭ, основанной на разложении (2.7), возникает дополнительная задача последовательного учета неоднородных членов.

Автоматическое упорядочивание и учет неоднородных членов гидродинамических уравнений происходит при модифицированном разложении эволюционного оператора

$$\varepsilon\partial/\partial t=\varepsilon\partial_{(1)}/\partial t+\varepsilon^2\partial_{(2)}/\partial t+\varepsilon^3\partial_{(3)}/\partial t \tag{2.8}$$

Это разложение порождает градиентное разложение самих гидродинамических уравнений в отличие от разложения (2.7), которое порождает градиентное разложение термодинамических потоков, причем параметр ε определяет степень неоднородности системы.

Применяя метод ЧЭ с разложением (2.8) к уравнению Больцмана, получим в первом порядке по ε уравнения Эйлера, во втором порядке — уравнения НСФ, в третьем порядке — уравнения Барнетта и т. д.

3. Гидродинамическая асимптотика решений системы кинетических уравнений (2.6) в барнеттовском приближении. Асимптотическое разложение известного решения уравнения Больцмана в ряд по ε приводит к соответствующему разложению оператора столкновений и источникового члена

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F^{(n)} [\Phi; x], \qquad J_v' (F) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n J_n' (F^{(n)})$$
$$\delta I = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \delta I^{(n/2)} \tag{3.1}$$

где парный коррелятор гауссовского поля $\delta I^{(n/2)}$ определяется из выражения (2.2). В силу статистической независимости отдельных членов ряда (3.1) имеем

$$\langle \delta I (1, v_1) \delta I (2, v_2) \rangle = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} \varepsilon^{(n+m)/2} \langle \delta I^{(n/2)} \delta I^{(m/2)} \rangle =$$
$$= \delta (1-2) \sum_{n',\, m'=0}^{\infty} \varepsilon^{(n'+m')} I [F^{(n')}, F^{(m')}]$$

Здесь

$$\langle \delta I^{(n/2)} \delta I^{(m/2)} \rangle = \delta_{nm} \delta (1-2) \sum_{k=0}^{n} I [F^{(k)}, F^{(n-k)}] \tag{3.2}$$

Асимптотическое при $\varepsilon \ll 1$ поведение решений первого уравнения (2.6) согласовано с формальным разложением

$$\delta N (t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \delta N^{(n/2)} [\Phi (t), \delta \Phi (t); x] \tag{3.3}$$

Для определения коэффициентов ряда (3.3) используем модифицированную схему метода ЧЭ, в соответствии с которой

$$\varepsilon \partial / \partial t = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \partial_{(n/2)} / \partial t$$

Методика нахождения членов этого ряда основана на использовании условий неразложимости гидродинамических переменных

$$\int dv \Psi_0 \delta N^{(k/2)} = \delta_{k0} \delta n, \qquad \int dv \Psi_4 \delta N^{(k/2)} = \delta_{k0} \delta e$$
$$\int dv \Psi_l \delta N^{(k/2)} = \delta_{k0} \delta u_l; \qquad l = 1, 2, 3; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

и условия разрешимости интегральных уравнений для $\delta N^{(k/2)}$.

После определения первых M членов ряда (3.3) результат метода составляют выражения

$$\delta q_i = \sum_{n=0}^{M} \delta q_i^{(n/2)} \equiv \sum_{n=0}^{M} \int dv {}^1/_2 m c^2 c_i \delta N^{(n/2)}$$
$$\delta \Pi_{kl} = \sum_{n=0}^{M} \delta \Pi_{kl}^{(n/2)} \equiv \sum_{n=0}^{M} \int dv m c_k c_l \delta N^{(n/2)} \tag{3.4}$$

позволяющие замкнуть уравнения переноса (2.4).

Далее, согласно методу ЧЭ, необходимо подставить разложения (3.1)—(3.3) и ряд для $\varepsilon\partial/\partial t$ в первое уравнение (2.6), получить при этом уравнения для $\sigma N^{(n/2)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и решить их, используя известные выражения для функций $F^{(n)}$. Реализация этой программы проста, но довольно громоздка и методически ничем не отличается от известной [5, 10]. Поэтому здесь приведем лишь окончательный результат.

Выражения для первых пяти членов ряда (3.3) имеют вид

$$\delta N^{(0)} = (\delta\Phi_\mu; \partial_{\Phi_\mu}) F^{(0)} \equiv DF^{(0)}, \qquad D = (\delta\Phi_\mu; \partial_{\Phi_\mu})$$
$$\delta N^{(1/2)} = -[J_v'(F^{(0)})]^{-1}\delta J^{(0)}, \qquad \delta N^{(1)} = DF^{(1)} - [J_v'(F^{(0)})]^{-1}\delta J^{(1/2)},$$
$$\delta N^{(3/2)} = -[J_v'(F^{(0)})]^{-1}\{\delta J^{(1)} - (\partial_{(3/2)}\delta\Phi_\mu/\partial t; \partial_{\Phi_\mu}) F^{(0)}\} \tag{3.5}$$
$$\delta N^{(2)} = DF^{(2)} + [J_v'(F^{(0)})]^{-1}\{-\delta J^{(3/2)} + J_v'(F^{(1)})DF^{(1)} +$$
$$+ (\partial_{(2)}\delta\Phi_\mu/\partial t - \Theta^{(2)\prime}_{\mu,\nu}\delta\Phi_\nu; \partial_{\Phi_\mu}) F^{(0)}\}$$

Здесь использованы обозначения

$$\delta J^{(0)} = \delta I^{(0)}, \qquad \delta J^{(1/2)} = \delta I^{(1/2)}, \qquad \delta J^{(1)} = \delta I^{(1)} -$$
$$- \{J_v'(F^{(1)}) - (\partial_{(1)}/\partial t + v_i\nabla_i)\}[J_v'(F^{(0)})]^{-1}\delta I^{(0)}$$
$$\delta J^{(3/2)} = \delta I^{(3/2)} - \{J_v'(F^{(1)}) - (\partial_{(1)}/\partial t + v_i\nabla_i)\}[J_v'(F^{(0)})]^{-1}\delta I^{(1/2)} \tag{3.6}$$

и ∂_{Φ_μ} для функциональной производной $\delta/\delta\Phi_\mu$; символ $(\cdot;\cdot)$ означает внутреннее произведение заключенных в скобки функций, например

$$(\delta\Phi_\mu; \partial_{\Phi_\mu})\varphi(r) = \int dr'\delta\Phi_\mu(r')\{\delta\varphi(r)/\delta\Phi_\mu(r')\}$$

Подставляя выражения (3.5) в формулы (3.4), после вычисления интегралов в пространстве скоростей при $M = 4$ получаем

$$\delta q_k = -D(q_k^{(1)} + q_k^{(2)}) + ({}^5/_2 p^{(0)}\delta_{kl} + p_{kl}^{(1)} + p_{kl}^{(2)})\delta u_l + \delta Q_k + \delta q_k',$$
$$\delta\Pi_{kl} = -D(p^{(0)}\delta_{kl} + p_{kl}^{(1)} + p_{kl}^{(2)}) + \delta P_{kl} + \delta p_{kl}',$$
$$\delta Q_k = \sum_{n=0}^{3}\delta Q_k^{(n/2)}, \qquad \delta P_{kl} = \sum_{n=0}^{3}\delta P_{kl}^{(n/2)} \tag{3.7}$$
$$\delta Q_k^{(n/2)} = -\int dv\,{}^1/_2 mc^2 c_k [J_v'(F^{(0)})]^{-1}\delta J^{(n/2)} = n^{-1}kT\int dv A_k \delta J^{(n/2)}, \tag{3.8}$$
$$\delta P_{kl}^{(n/2)} = -\int dv\, mc_k c_l [J_v'(F^{(0)})]^{-1}\delta J^{(n/2)} = n^{-1}kT\int dv B_{kl}\delta J^{(n/2)}$$
$$A_k = -[J_v'(F^{(0)})]^{-1} nc_k (mc^2/(2kT) - {}^5/_2)$$
$$B_{kl} = -[J_v'(F^{(0)})]^{-1}(\rho/(kT)) E_{ij}^{kl} c_i c_j$$

Здесь $q_k^{(2)}$ и $p_{kl}^{(2)}$ — барнеттовские добавки к тепловому потоку и тензору напряжений [9]. Величины $\delta q_k'$ и $\delta p_{kl}'$ порождены третьим слагаемым в $\delta N^{(2)}$ и выражаются через так называемые модифицированные интегральные скобки от фазовых функций A_k и B_{kl}. Расчет таких скобок можно провести приближенно путем разложения функций A_k, B_{kl} в ряды по полиномам Сонина [9]. При этом оказывается что в первом приближении по полиномам модифицированные скобки, формирующие $\delta q_k'$ и $\delta p_{kl}'$, равны нулю.

Таким образом, в третьем порядке по градиентам гидродинамических переменных уравнения переноса (2.4) при учете формул (3.7) и выражений

$$\Pi_{kl} = p^{(0)}\delta_{kl} + p_{kl}^{(1)} + p_{kl}^{(2)}, \qquad q_k = q_k^{(1)} + q_k^{(2)}$$

преобразуются в систему линеаризованных уравнений гидродинамики барнеттовского приближения

$$\partial\delta\Phi_\mu/\partial t = \Theta^{(B)\prime}_{\mu,\nu}\delta\Phi_\nu + \delta G_\mu, \qquad \Theta_\mu^{(B)} = \Theta_\mu^{(1)} + \Theta_\mu^{(2)} + \Theta_\mu^{(3)} \tag{3.9}$$

Здесь $\Theta_\mu^{(B)}$ — динамический оператор барнеттовского приближения, величины $\Theta_\mu^{(1)}$ и $\Theta_\mu^{(2)}$ определены ранее, а $\Theta_\mu^{(3)}$ и δG_μ имеют следующие компоненты

$$\Theta_0^{(3)} = 0, \quad \Theta_k^{(3)} = -\rho^{-1}\nabla_i p_{ik}^{(2)}, \quad \Theta_4^{(3)} = -n^{-1}\nabla_i q_i^{(2)} - n^{-1} p_{ij}^{(2)} \nabla_j u_i,$$
$$\delta G_0 = 0, \quad \delta G_k = -\rho^{-1}\nabla_i \delta P_{ik}, \quad \delta G_4 = -n^{-1}\nabla_i \delta Q_i - n^{-1}\delta P_{ij}\nabla_j u_i$$

Из формул (3.8) и статистических свойств случайных полей $\delta I^{(n/2)}$ следуют гауссовские свойства и пространственно-временная δ-коррелированность величин δP_{ij}, δQ_i.

Задача нахождения парных корреляторов компонент ланжевеновского источника δG_μ в барнеттовском (третьем по градиентам гидродинамических переменных) приближении при учете формул (1.2) сводится к вычислению парных корреляторов величин δP_{ij}, δQ_i с точностью до членов первого порядка по градиентам, поскольку каждая из компонент коррелятора $\langle \delta G_\mu(1)\delta G_\nu(2)\rangle$, согласно (1.2), уже имеет второй порядок по градиентам.

В барнеттовском приближении представление (3.8) при учете выражения (3.2) для коррелятора флуктуирующей составляющей теплового потока даст

$$\langle \delta Q_k(1)\,\delta Q_l(2)\rangle = \langle \delta Q_k(1)\,\delta Q_l(2)\rangle^{(B)} \equiv$$
$$\equiv \langle \delta Q_k^{(0)}(1)\,\delta Q_l^{(0)}(2)\rangle + \langle \delta Q_k(1)\,\delta Q_l(2)\rangle^{(1)} \qquad (3.10)$$

$$\langle \delta Q_k(1)\,\delta Q_l(2)\rangle^{(1)} = \langle \delta Q_k^{(1/2)}(1)\,\delta Q_l^{(1/2)}(2)\rangle +$$
$$+ \langle \delta Q_k^{(0)}(1)\,\delta Q_l^{(1)}(2)\rangle + \langle \delta Q_k^{(1)}(1)\,\delta Q_l^{(0)}(2)\rangle \qquad (3.11)$$

$$\langle \delta Q_n^{(n/2)}(1)\,\delta Q_l^{(m/2)}(2)\rangle = \frac{k^2 T_1 T_2}{n_1 n_2}\int dv_1\, dv_2 A_k(v_1) \times$$
$$\times A_l(v_2)\langle \delta J^{(n/2)}(1, v_1)\,\delta J^{(m/2)}(2, v_2)\rangle \qquad (3.12)$$

Аналогичные по виду выражения можно получить для корреляторов $\langle \delta P_{kl}(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle$ и $\langle \delta P_{kl}(1)\,\delta Q_i(2)\rangle$.

Первое слагаемое в (3.10) имеет нулевой, а второе — первый порядок по градиентам гидродинамических переменных. Отметим, что линейные вклады в формулы Ландау — Лифшица полученные в [5, 6], сводятся лишь к первому члену в выражениях типа (3.11), хотя все три члена этого выражения, как следует из формул (3.12), (3.6), (3.2), имеют один порядок малости. Отсюда в свою очередь следует, что при помощи модифицированной схемы метода ЧЭ можно провести более полный учет неоднородных членов в ланжевеновских уравнениях гидродинамики, чем это сделано с использованием стандартной схемы метода [5, 6].

Согласно формуле (3.12), расчет парных корреляторов сводится к вычислению интегралов в пространстве скоростей. Эти интегралы при помощи формул (3.6), (3.2) сводятся аналогично тому, как это сделано в [5, 10], к двум типам интегральных скобок кинетической теории. Так, для коррелятора (3.10) имеем

$$\langle \delta Q_k(1)\,\delta Q_l(2)\rangle^{(B)} = \delta(1-2)\, n^{-1}(1)\, p^{(0)}(1)\, T(1)\, \lambda(T) \times$$
$$\times [\delta_{kl} + K_{kl}^{ij} p_{ij}^{(1)}(1)/p^{(0)}(1)], \qquad 4\lambda\eta\,(n/p^{(0)})^2\, T K_{kl}^{ij} = [A_k; B_{ij}A_l] +$$
$$+ [A_l; B_{ij}A_k] + [B_{ij}; A_k A_l] - [A_k; B_{ij}, A_l]^* - [A_l; B_{ij}, A_k]^* - [B_{ij}; A_k, A_l]^* \qquad (3.13)$$

Аналогично для двух других корреляторов найдем

$$\langle \delta P_{kl}(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle = \langle \delta P_{kl}(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle^{(B)} =$$
$$= \delta(1-2)\, 4\,(n(1))^{-1} p^{(0)}(1)\, \eta(T)\, [E_{ij}^{kl} + K_{kl,\,ij}^{sd}\, p_{sd}^{(1)}(1)/p^{(0)}(1)] \qquad (3.14)$$

$$8(\eta n/p^{(0)})^2 K^{sd}_{kl,\,ij} = [B_{kl}; B_{sd}B_{ij}] + [B_{ij}; B_{sd}B_{kl}] + [B_{sd}; B_{kl}B_{ij}] -$$
$$- [B_{kl}; B_{sd}, B_{ij}]^* - [B_{ij}; B_{sd}, B_{kl}]^* - [B_{sd}; B_{ij}, B_{kl}]^*$$
$$\langle \delta Q_k(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle = \langle \delta Q_k(1)\,\delta P_{ij}(2)\rangle^{(B)} = \delta(1-2)\,(n(1))^{-1}\,\eta(T)\,K^{l}_{k,\,ij}q^{(1)}_l,$$
$$\lambda\eta T\,(np^{(0)})^2 K^{l}_{k,\,ij} = [A_k; A_lB_{ij}] + [A_l; A_kB_{ij}] + [B_{ij}; A_kA_l] - [A_k; A_l, B_{ij}]^* -$$
$$- [A_l; A_k, B_{ij}]^* - [B_{ij}; A_k, A_l]^* \qquad (3.15)$$

Функции A_k, B_{kl} введены ранее, а обычная $[\cdot, \cdot]$ и модифицированная $[\cdot; \cdot, \cdot]^*$ интегральные скобки от произвольных функций скорости A, B, C определены следующим образом [5, 10]

$$[A; B] = -n^{-2}\int dvB(v)\,J_v'(F^{(0)})\,F^{(0)}A(v)$$
$$[A; B, C]^* = -n^{-2}\int dv_1\,dv_2 B(v_1)\,C(v_2)\,J'_{v_1v_2}(F^{(0)})\,F^{(0)}A =$$
$$= -n^{-2}\int dvA(v)\,\{J_v(F^{(0)}B, F^{(0)}C) + J_v(F^{(0)}C, F^{(0)}B)\}$$

Первые слагаемые в квадратных скобках формул (3.13), (3.14), порождаемые первым слагаемым в выражениях типа (3.10), соответствуют приближению НСФ и дают классические формулы (1.3). Вторые слагаемые в квадратных скобках формул (3.13), (3.14), формула (3.15) порождаются вторыми слагаемыми в формулах типа (3.10) и соответствуют барнеттовскому приближению. Формулы (3.13)—(3.15) представляют собой флуктуационно-диссипативные соотношения для гидродинамической стадии эволюции газа в барнеттовском приближении.

Общая структура корреляторов (3.13)—(3.15) универсальна и справедлива для любых потенциалов межчастичного взаимодействия в газе совместимых с условием существования интеграла столкновений. Значения тензорных коэффициентов K^{ij}_{kl}, $K^{sd}_{kl,ij}$, $K^{l}_{k,ij}$ зависят от вида потенциала межчастичного взаимодействия. Провести расчет интегральных скобок, формирующих эти коэффициенты, в общем случае не представляется возможным. В кинетической теории интегральные скобки рассчитывают приближенно, используя разложения формирующих их функций в ряды по полиномам [9]. Техника таких вычислений довольно громоздка, поэтому здесь приведем лишь результаты расчета указанных коэффициентов в первом приближении разложения функций A_k, B_{ij} в ряды по полиномам Сонина, что соответствует точным результатам для газа максвелловских молекул

$$K^{ij}_{kl} = \frac{63}{20}E^{ij}_{kl}, \qquad K^{sd}_{kl,\,ij} = 3E^{kl}_{sh}E^{ij}_{hd}, \qquad K^{l}_{k,\,ij} = \frac{63}{5}E^{kl}_{ij}$$

Изложенное позволяет сделать вывод о том, что барнеттовская неравновесность гидродинамической системы оказывает влияние на процесс генерации флуктуаций в виде линейного по градиентам вклада в формулы Ландау—Лифшица.

Полученные уравнения (3.9) и формулы (3.13)—(3.15) можно использовать при исследовании динамики флуктуаций в медленных неизотермических потоках сплошных сред, рассмотренных в [1—3].

Автор благодарен своему учителю $\boxed{\text{О. А. Гречанному}}$ за школу и опыт, способствовавшие выполнению этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.* О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 98—107.
2. *Коган М. Н., Галкин В. С., Фридлендер О. Г.* О напряжениях, возникающих в га-

зах вследствие неоднородности температуры и концентраций // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111—125.
3. *Галкин В. С., Коган М. Н.* К выводу уравнений медленных неизотермических течений газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 6. С. 77—84.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* О гидродинамических флуктуациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 3. С. 618—619.
5. *Гречанный О. А., Токарчук В. В.* К кинетической теории тепловых гидродинамических флуктуаций в неоднородном газе // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 116—127.
6. *Белый В. В.* О гидродинамических флуктуациях в неоднородно нагретом газе // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 58. № 3. С. 421—435.
7. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
8. *Morozov V. G.* On the Langevin formalism for non-linear and nonquilibrium hydrodynamic fluctuations // Physica A. 1984. V. 126. № 3. P. 443—460.
9. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
10. *Гречанный О. А., Токарчук В. В.* Динамика пространственно-временных корреляций гидродинамических полей в нестационарных газовых потоках //ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 572—581.

Киев

Поступила в редакцию
4.VII.1988