Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 62—50

В. А. Колосов

О СТАБИЛИЗАЦИИ СЛАБОБИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача стабилизации билинейных систем, характеризуемых наличием малого параметра в билинейной части системы. Это позволяет развить для билинейных систем приближенный метод синтеза стабилизирующего управления [1—3] в случае квадратичного функционала качества. Получены оценки погрешности по функционалу.

1. Постановка задачи. Пусть задана управляемая билинейная система

$$\dot{x} = \varepsilon N(t)xu + B(t)u; \; x \in R_n; \quad x(0) = x_0; \; t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Здесь $N(t)$ — измеримая и ограниченная при $t \geqslant 0$ $(n \times n)$-матрица, $\Gamma(t) \in R_n$ — вектор-функция, также измеримая и ограниченная при $t \geqslant 0$. Скалярное управление ищется в классе U ограниченных управлений $u = u(t, x)$, $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр.

Задача заключается в синтезе оптимально стабилизирующего систему 1.1 управления из класса U. Функционал качества возьмем в виде

$$J(u) = \int (x'Q(t)x + \lambda(t)^{-1}u^2)\,dt \tag{1.2}$$

Здесь $Q(t)$ — непрерывная, ограниченная, равномерно положительно определенная $(n \times n)$-матрица, $\lambda(t)$ — положительно определенная скалярная функция, штрих означает транспонирование. Интегрирование по t всюду ведется от 0 до ∞.

2. Алгоритм последовательных приближений. Предположим, что для рассматриваемых значений ε существует решение задачи (1.1), (1.2). Уравнение Беллмана имеет вид

$$\inf_{u \in U} [\partial V/\partial t + u(B(t) + \varepsilon N(t)x)'\partial V/\partial x + x'Q(t)x + \lambda(t)^{-1}u^2] = 0,$$
$$(V = V(t, x)) \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что оптимальное управление определено выражением

$$u_*(t, x) = -\frac{1}{2}\lambda(t)(B(t) + \varepsilon N(t)x)'\,\partial V/\partial x \tag{2.2}$$

Разложим функцию V по степеням ε

$$V = V_0(t, x) + \varepsilon V_1(t, x) + \ldots \tag{2.3}$$

Для определения $V_i(t, x)$ надо поставить (2.2) в (2.1), затем в полученный результат подставить (2.3) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим линейные относительно $V_i(t, x)$ уравнения

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{1}{4}\Big[\sum_{k=0}^{i}\frac{\partial V_k'}{\partial x}B_1\frac{\partial V_{i-k}}{\partial x} + \sum_{k=0}^{i-1}\frac{\partial V_k'}{\partial x}B_2\frac{\partial V_{i-k-1}}{\partial x} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{i-2}\frac{\partial V_k'}{\partial x}B_3\frac{\partial V_{i-k-2}}{\partial x}\Big] = 0, \quad i \geqslant 1 \tag{2.4}$$

$$B_1 = B(t)\lambda(t)B'(t), \quad B_2 = B(t)\lambda(t)x'N'(t) + N(t)x\lambda(t)B'(t),$$
$$B_3 = N(t)x\lambda(t)x'N'(t)$$

При $i = 1$ последняя сумма равна нулю. Решение уравнений (2.4) ищется в классе непрерывно дифференцируемых ограниченных функций. При этом функция Беллмана нулевого приближения $V_0(t, x) = x'P(t)x$, где $P(t)$ — непрерывная, ограниченная, положительно определенная $(n \times n)$-матрица. При некоторых условиях $P(t)$ — единственное положительно определенное решение уравнения Риккати [4, 5]

$$P^{\cdot}(t) - P'(t)B_1(t)P(t) = -Q(t) \tag{2.5}$$

Таким образом, в случае разрешимости уравнения Беллмана при $\varepsilon = 0$ управление нулевого приближения определяется выражением

$$u_0(t, x) = -\lambda(t)B'(t)P(t)x \tag{2.6}$$

При $i \geqslant 1$ решение уравнения (2.4) дается формулой

$$V_i(t, x) = -\int\limits_t^\infty \frac{1}{4}\Bigg[\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial V_k'(\tau, x(\tau))}{\partial x} B_1(\tau)\frac{\partial V_{i-k}(\tau, x(\tau))}{\partial x} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial V_k'(\tau, x(\tau))}{\partial x} B_2(\tau, x(\tau))\frac{\partial V_{i-k-1}(\tau, x(\tau))}{\partial x} + \sum_{k=0}^{i-2} \frac{\partial V_k'(\tau, x(\tau))}{\partial x} B_3(\tau, x(\tau))\frac{\partial V_{i-k-2}(\tau, x(\tau))}{\partial x}\Bigg] d\tau \tag{2.7}$$

$V_0(t, x) = x'P(t)x$

Здесь $x(\tau)$ — решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$, $\tau \geqslant t$ и управлении $u_0(\tau, x(\tau)) = -\lambda(\tau)B'(\tau)P(\tau)x(\tau)$ с начальным условием $x(t) = x$.

3. Оценка нулевого приближения. Пусть задача (1.1), (1.2) имеет решение для некоторого заданного ε и $\varepsilon = 0$. Оценим разность $J(u_0) - J(u_*)$. Если эта разность имеет порядок ε, то выражение (2.6) задает нулевое приближение к оптимальному управлению $u_*(t, x)$ в задаче (1.1), (1.2). Пусть выполняется неравенство (буквой C далее обозначены различные положительные постоянные)

$$x'Q(t)x - \varepsilon x'P'(t)B'(t)\lambda(t)x'N'(t)P(t)x \geqslant C|x|^2 \tag{3.1}$$

Тогда существует функционал нулевого приближения $J_0(u)$, отличающийся от $J(u)$ на величину порядка ε

$$F(t, x, u) = x'Q(t)x + \lambda(t)^{-1}u^2 - \varepsilon ux'N'(t)\partial V_0/\partial x \geqslant C|x|^2 \tag{3.2}$$

$$J_0(u) = \int F(t, x, u)\,dt \tag{3.3}$$

Поскольку подынтегральная функция $F(t, x, u)$ в силу условия (3.2) положительно определена по x, управление $u_0(t, x)$ будет оптимальным для (1.1) в смысле (3.3). Значит, $V_0(t, x)$ — функция Беллмана. Следовательно,

$$\int F(t, x(t, u_0), u_0(t, x(t, u_0)))\,dt = V_0(0, x_0) \tag{3.4}$$

Здесь и ниже $x(\cdot, u_0)$ — траектория системы при управлении $u_0(t, x)$. Из неравенства (3.2) вытекает

$$\int F(t, x(t, u_0), u_0(t, x(t, u_0)))\,dt \geqslant C\int |x(t, u_0)|^2\,dt \tag{3.5}$$

Используя (3.4) и (3.5), получим оценку для решений (1.1) при $u = u_0(t, x)$

$$\int |x(t, u_0)|^2 dt \leqslant CV_0(0, x_0) \tag{3.6}$$

Поэтому можно утверждать, что $J_0(u) < \infty$ и управление $u_0(t, x)$ допустимо в задаче (1.1), (1.2).

Имеет место неравенство

$$V(t, x) \leqslant V_0(t, x) + |J(u_0) - J_0(u_0)| = J_0(u_0) + \delta$$

или

$$J(u_*) \leqslant J_0(u_0) + \delta \tag{3.7}$$

Подставляя в (3.7) выражение (3.3) и оценивая $J(u)$ при управлении $u_0(t, x)$, получим

$$\delta \leqslant 2\varepsilon \int x'(t, u_0) P'(t) B(t) \lambda(t) x'(t, u_0) N'(t) P(t) x(t, u_0) dt$$

Следовательно, верхняя оценка погрешности по функционалу составляет

$$J(u_*) \leqslant J_0(u_0) + \varepsilon C$$

Аналогично получается оценка снизу. В результате имеем неравенство

$$0 \leqslant J(u_0) - J(u_*) \leqslant C\varepsilon \tag{3.8}$$

Покажем, что управление (2.6) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1.1). Замкнутая система нулевого приближения будет асимптотически устойчива. Условие (3.6) позволяет воспользоваться теоремой об устойчивости по первому приближению [6]. На основании этой теоремы система (1.1), замкнутая относительно управления нулевого приближения, будет асимптотически устойчива.

4. Оценка высших приближений. Управление i-го приближения определяется по формуле

$$u_i(t, x) = u_0(t, x) - {}^1/_2\lambda(t)(B(t) + \varepsilon N(t)x)'\partial W/\partial x$$

$$W = \sum_{k=1}^{i} \varepsilon^k V_k(t, x)$$

Здесь $u_0(t, x)$ — управление нулевого приближения (2.6).

Пусть существуют непрерывно дифференцируемые по обеим аргументам функции $V_k(t, x)$ $(k \leqslant i)$, удовлетворяющие уравнениям (2.4). Кроме того, пусть выполняются неравенства

$$|W| \leqslant C|x|^2, \quad |\partial W/\partial x| \leqslant C|x|$$

Домножая (2.4) на ε^i и суммируя по i, получим

$$\partial W/\partial t - \frac{1}{4}(\partial W'/\partial x)(B_1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B_3)\partial W/\partial x = -x'Q(t)x + h_i\varepsilon^{i+1}$$

$$h_i = h_i(t, x, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial V_j'}{\partial x}B_1\frac{\partial V_{i-l}}{\partial x}\varepsilon^j + \sum_{l=1}^{i-1}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial V_j'}{\partial x}B_2\frac{\partial V_{i-j}}{\partial x}\varepsilon^l + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{i-2}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial V_j'}{\partial x}B_3\frac{\partial V_{i-l}}{\partial x}\varepsilon^{l+1}\right]$$

Пусть существует решение задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon > 0$. В этом случае, если выполняется неравенство

$$x'Q(t)x - \varepsilon^{i+1}h_i \geqslant C|x|^2$$

то функционал

$$J_i(u) = J(u) - \varepsilon^{i+1} \int h_i \, dt \tag{4.1}$$

положительно определен по фазовым координатам x. Следовательно, управление i-го приближения u_i (t, x) оптимально для системы (1.1) с функционалом (4.1). Согласно теореме об оптимальном стабилизирующем управлении [5],

$$\inf_{u \in U} J_i(u) = W(0, x_0)$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\int |x(t, u_i)|^2 \, dt \leqslant CW(0, x_0) \tag{4.2}$$

Используя представление (4.1) и условие (4.2) аналогично оценке, полученной для нулевого приближения, можно установить оценку погрешности по функционалу для случая высших приближений

$$V(t, x) = J(u_*) \leqslant J(u_i) \leqslant J_i(u_i) + |J(u_i) - J_i(u_i)|$$

С учетом (4.1) имеем

$$|J(u_i) - J_i(u_i)| \leqslant \varepsilon^{i+1} C \int |x|^2 \, dt \leqslant \varepsilon^{i+1} C_1 W(0, x_0) \leqslant \varepsilon^{i+1} C_2$$

Таким образом, оценки сверху и снизу таковы:

$$J(u_*) \leqslant J_i(u_i) + \varepsilon^{i+1} C_2, \quad J_i(u_i) \leqslant J(u_*) + |J_i(u_*) - J(u_*)| \leqslant$$
$$\leqslant J(u_*) + \varepsilon^{i+1} CW(0, x_0)$$

Следовательно, стабилизирующее управление i-го приближения u_i (t, x) дает величину погрешности по функционалу порядка ε^{i+1}.

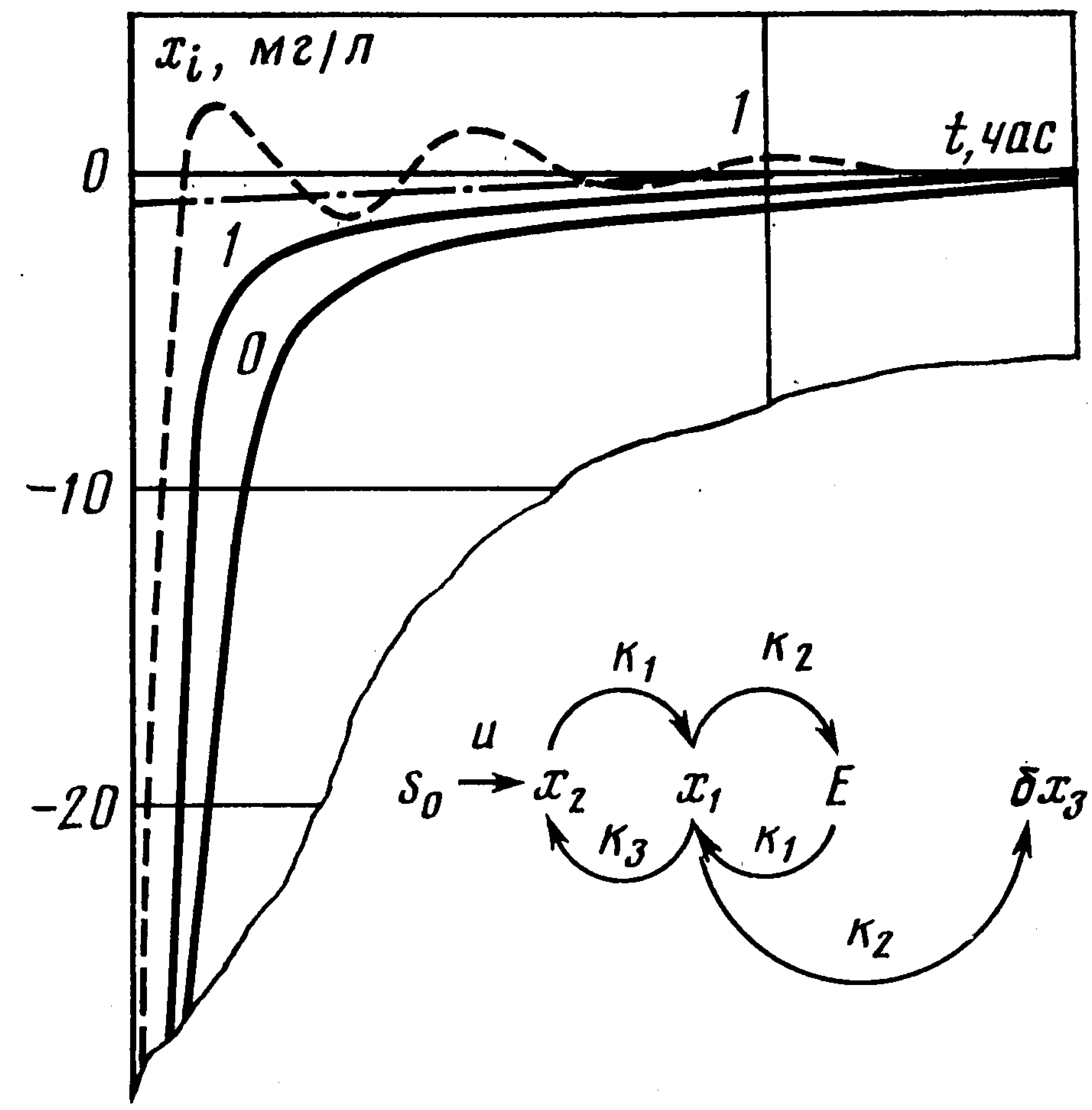
5. Пример. Рассмотрим модель, описывающую цепь ферментативных превращений субстрата. Субстрат, проникая в клетку, включается в цепь разного рода превращений, в результате которых происходит дополнительное образование биомассы. Процесс роста с учетом некоторых допущений можно представить в виде схемы [7], показанной на фигуре. Здесь x_2 — концентрация субстрата, S_0 — начальная концентрация субстрата (считается, что субстрат подается с постоянной концентрацией), u — скорость подачи субстрата в реактор, E — концентрация свободного ключевого фермента, x_3 — концентрация биополимеров, δ — стехиометрический коэффициент, x_1 — концентрация фермент-субстратного комплекса, K_1, K_3 — константы скорости образования и распада фермент-субстратного комплекса, K_2 — постоянная скорости образования продукта реакции. Кроме того, известно, что E, x_3 и x_1 связаны: $\langle E \rangle + \langle x_1 \rangle = \varepsilon_1 \langle x_3 \rangle$, где угловые скобки означают мольную концентрацию, ε_1 — доля ключевого фермента в общей массе клетки ($\varepsilon_1 \ll 1$).

Предполагаем, что коэффициент потребления субстрата достаточно высок и распадается лишь незначительная его часть. Величина ε характеризует долю распада. Положим $\varepsilon_1 \approx \varepsilon$, тогда, используя известные результаты [8], получим следующую систему уравнений, описывающих динамику относительных концентраций (разность между текущей и допустимой):

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot} = (-K_1 - \delta K_2 - \varepsilon K_3) x_1 + (1 + \varepsilon) K_1 x_2 + \varepsilon K_1 x_3 \\ x_2^{\cdot} = -K_1 x_1 + \varepsilon K_1 x_2 + \varepsilon K_3 x_2 u + (\varepsilon K_3 x_2^* + S_0) u \\ x_3^{\cdot} = \delta K_2 x_1 - K_d x_3 \\ x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = -60, \quad x_3(0) = -38{,}06 \end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь x_1 — концентрация фермент-субстратного комплекса (текущая) за вычетом допустимой x_1^*. Аналогично x_2 — концентрация субстрата минус x_2^*, x_3 — концентрация биополимеров минус x_3^*. Значения допустимых концентраций: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 100$, $x_3^* = 38{,}06$; $\delta = 66{,}6$ — стехиометрический коэффициент. Коэффициент окисления $K_d = 10^{-2}$. Прочие коэффициенты $K_1 = 0{,}1$; $K_2 = 0{,}2$; $K_3 = 0{,}35$; $\varepsilon = 10^{-2}$. Критерии качества характеризует степень отклонения концентраций от требуемых допустимых значений

$$J(u) = \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2) \, dt \tag{5.2}$$



Фиг. 1

Управление нулевого и первого приближений задаются соответственно выражениями

$$u_0(x) = -2758x_1 - 105{,}5x_2 - 2095x_3$$

$$u_1(x) = -0{,}012x_2^2 - 2758x_1 - 1915x_2 - 2095x_3$$

На фигуре показана динамика изменения относительных концентраций компонент системы (5.1) при управлениях $u_0(x)$ (кривая 0) и $u_1(x)$ (кривая *1*). Сплошная линия — относительная концентрация биополимеров, штриховая линия — относительная концентрация субстрата, штрихпунктирная линия — относительная концентрация фермент-субстратного комплекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
2. *Колмановский В. Б.* Некоторые задачи управления системами с малым параметром // Дополнение к книге А. Дончева. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. С. 141—154.
3. *Колмановский В. Б.* О стабилизации некоторых нелинейных систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 395—402.
4. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
5. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение к книге И. Г. Малкина. Теория устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1966. С. 475—514.
6. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
7. *Вавилин В. А.* Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983. 160 с.
8. *Williamson D.* Observation of bilinear systems with applications to biological control // Automatica, 1977. V. 13. № 3. P. 243—254.

Москва

Поступила в редакцию 10.X.1988