Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 62—50


А. И. Калинин

# АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

**Предлагается алгоритм приближенного (в асимптотическом смысле) решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия. Указывается вычислительная процедура, позволяющая использовать полученные асимптотические приближения для точного решения задачи при заданном значении малого параметра.**

**1. Постановка задачи.** В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой:

$$x^{\cdot} = A(\mu)x + b(\mu)u, \quad x(0) = x^\circ, \quad x(T) = 0$$
$$|u(t)| \leqslant 1, \quad J(u) = T \to \min \tag{1.1}$$
$$A(\mu) = \begin{Vmatrix} A_1/\mu & A_2/\mu \\ A_3 & A_4 \end{Vmatrix}, \quad b(\mu) = \begin{Vmatrix} b_1/\mu \\ b_2 \end{Vmatrix}, \quad x = \begin{Vmatrix} z \\ y \end{Vmatrix}, \quad x^\circ = \begin{Vmatrix} z^\circ \\ y^\circ \end{Vmatrix}$$

где $\mu$ — малый положительный параметр, $z$ — $n$-вектор, $y$ — $m$-вектор; остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. Предполагаются выполненными следующие условия:

а) матрица $A_1$ устойчива, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны;

б) $\operatorname{rank}(b_1, A_1b_1, \ldots, A_1^{n-1}b_1) = n$.

Задаче (1.1) и ее обобщениям посвящено значительное число работ (например, [1—4]). Исследования в основном носили качественный характер. В частности, было установлено, что момент оптимального быстродействия $T^\circ(\mu)$ в задаче (1.1) при $\mu \to 0$ сходится к моменту оптимального быстродействия $T^\circ$ в задаче

$$y^{\cdot} = A_0y + b_0u, \quad y(0) = y^\circ, \quad y(T) = 0$$
$$|u(t)| \leqslant 1, \quad J_0(u) = T \to \min \tag{1.2}$$
$$A_0 = A_4 - A_3A_1^{-1}A_2, \quad b_0 = b_2 - A_3A_1^{-1}b_1$$

Что касается точек переключения оптимального управления в сингулярно возмущенной задаче, то одни из них близки к соответствующим точкам переключения в задаче (1.2), а остальные отстоят от конечного момента $T^\circ(\mu)$ на величины порядка $\mu$. В некоторых случаях могут появиться дополнительные точки переключения, сосредоточенные вблизи начального момента.

*Определение.* Кусочно-непрерывное управление $u(t, \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, удовлетворяющее ограничению $|u(t, \mu)| \leqslant 1$, $t \in [0, T(\mu)]$, назовем асимптотически $N$-оптимальным в задаче (1.1), если для порожденной им траектории $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, выполняются условия $z(T(\mu), \mu) = O_1(\mu^{N+1})$, $y(T(\mu), \mu) = O_2(\mu^{N+1})$, и $T(\mu) - T^\circ(\mu) = O_3(\mu^{N+1})$.

В данной работе предлагается алгоритм, позволяющий для заданного натурального числа $N$ построить асимптотически $N$-оптимальное управление в рассмотренной задаче. Суть алгоритма состоит в нахождении асимптотики точек переключения оптимального управления и момента $T^\circ(\mu)$. Вычислительная процедура алгоритма базируется на прямом опорном методе решения линейных задач оптимального управления [5] и методе пограничных функций [6]. Кроме того, показывается, как можно использовать полученные асимптотические приближения для точного решения задачи (1.1) при заданном значении малого параметра.

**2. Первая базовая задача.** Первый блок алгоритма состоит в решении задачи (1.2), которую в дальнейшем будем называть первой базовой задачей. Пусть

в) задача (1.2) имеет решение и является «простой» [7].

Применяя для ее решения прямой опорный метод [5], при помощи конечного числа интегрирований прямой и сопряженной систем получим:

1) момент оптимального быстродействия $T^\circ$;

2) оптимальные управление и траекторию $u^\circ(t)$, $y^\circ(t)$, $t \in [0, T^\circ]$;

3) опору $\{\tau_1^\circ, \ldots, \tau_{m-1}^\circ\}$, т. е. совокупность $m-1$ различных точек из интервала $]0, T^\circ[$, таких, что $(m \times (m-1))$-матрица

$$\Phi_0 = (\varphi_0(\tau_j^\circ), \quad j = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{2.1}$$

имеет полный ранг, где

$$\varphi_0(t) = F_0(t)\, b_0, \quad t \in [0, T^\circ] \tag{2.2}$$

а $F_0(t)$, $t \in [0, T^\circ]$,— $(m \times m)$-матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$F_0^{\boldsymbol{\cdot}} = -F_0 A_0, \quad F_0(T^\circ) = E \tag{2.3}$$

4) $m$-вектор $\lambda^\circ$, являющийся нетривиальным решением следующей системы линейных однородных алгебраических уравнений: $\Phi_0'\lambda = 0$;

5) коуправление $\Delta_0(t) = \psi^{\circ\prime}(t)\, b_0$, $t \in [0, T^\circ]$, построенное по решению $\psi^\circ(t)$, $t \in [0, T^\circ]$, сопряженной системы $\psi^{\boldsymbol{\cdot}\circ} = -A_0'\psi^\circ$, $\psi^\circ(T^\circ) = \lambda^\circ$. Заметим, что

$$\Delta_0(t) = \lambda^{\circ\prime}\varphi_0(t), \quad t \in [0, T^\circ] \tag{2.4}$$

Коуправление связано с оптимальным управлением соотношением $u^\circ(t) = -\operatorname{sgn}\Delta_0(t)$, $t \in [0, T^\circ]$, и обладает следующим свойством: $\Delta_0(\tau_j^\circ) = 0$, $\Delta_0^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau_j^\circ) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Обозначим $t_1^\circ, \ldots, t_l^\circ$ все нули коуправления, занумеровав их в порядке возрастания. Поскольку среди них находятся опорные моменты, то $l \geqslant m-1$. Дополнительно предположим, что

г) $t_j^\circ \in ]0, T^\circ[$, $\Delta_0^{\boldsymbol{\cdot}}(t_j^\circ) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$

**3. Вторая базовая задача.** На втором этапе алгоритма решается следующая задача оптимального управления с нефиксированной длительностью процесса:

$$\begin{gathered} dz/ds = A_1 z + b_1 u, \quad s \leqslant 0, \quad z(s_1) = A_1^{-1} b_1, \quad z(0) = 0 \\ |u(s)| \leqslant 1, \quad J_1(u) = \int_{s_1}^{0} (u(s) + 1)\, ds \to \min \end{gathered} \tag{3.1}$$

При выполнении условий а), б) допустимые управления в этой задаче, которую будем называть второй базовой задачей, существуют.

Предположим, что

д) задача (3.1) имеет решение.

Заметим, что точка $A_1^{-1}b_1$ — положение равновесия динамической системы при управлении $u(s) \equiv -1$. Поэтому для того, чтобы найти оптимальное управление второй базовой задачи, достаточно решить задачу с фиксированной длительностью процесса

$$dz/ds = A_1 z + b_1 u, \quad s \leqslant 0, \quad z(s^*) = A_1^{-1}b_1, \quad z(0) = 0$$
$$|u(s)| \leqslant 1, \quad J_*(u) = \int_{s^*}^{0} u(s)\,ds \to \min \tag{3.2}$$

где $s^*$ — достаточно малое отрицательное число. Если $s_1^\circ$ — оптимальный начальный момент в задаче (3.1), то оптимальное управление $u^*(s)$ в задаче (3.2) на промежутке $[s_1^\circ, 0]$ будет совпадать с оптимальным управлением второй базовой задачи, а при $s < s_1^\circ$ $u^*(s) \equiv -1$.

Предположим, что

е) задача (3.2) является «простой».

Решая ее прямым опорным методом, получим:

1) оптимальные управление и траекторию $u^*(s)$, $z^*(s)$, $s \in [s^*, 0]$;

2) опору $\{\sigma_1^\circ, \ldots, \sigma_n^\circ\}$, т. е. совокупность $n$ различных точек из интервала $]\,s^*, 0\,[$, таких, что $(n \times n)$-матрица

$$\Pi\Phi = (\Pi\varphi(\sigma_i^\circ), \quad i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.3}$$

называемая опорной, является невырожденной, где

$$\Pi\varphi(s) = G(s)\, b_1 \tag{3.4}$$

а $G(s)$, $s \leqslant 0$,— $(n \times n)$-матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$dG/ds = -GA_1, \quad G(0) = E \tag{3.5}$$

3) вектор потенциалов $\pi$, являющийся решением следующей системы линейных алгебраических уравнений: $\pi'\Pi\varphi(\sigma_i^\circ) = -1$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

4) коуправление $\Pi\Delta(s) = \Pi\psi'(s)\, b_1 + 1$, $s \in [s^*, 0]$, где $\Pi\psi(s)$, $s \leqslant 0$,— решение сопряженной системы

$$d\Pi\psi(s)/ds = -A_1'\Pi\psi(s), \quad \Pi\psi(0) = \pi$$

Заметим, что

$$\Pi\Delta(s) = \pi'\Pi\varphi(s) + 1 \tag{3.6}$$

Коуправление связано с оптимальным управлением соотношением $u^*(s) = -\operatorname{sgn}\Pi\Delta(s)$, $s \in [s^*, 0]$, и обладает следующим свойством:

$$\Pi\Delta(\sigma_i^\circ) = 0, \; d\Pi\Delta(\sigma_i^\circ)/ds \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Обозначим $s_1^\circ, \ldots, s_p^\circ$ все нули коуправления, занумеровав их в порядке возрастания. Понятно, что $p \geqslant n$. Потребуем, чтобы

ж) $s_p^\circ \neq 0$, $d\Pi\Delta(s_i^\circ)/ds \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Если $s^*$ выбрано достаточно малым, то $s_1^\circ$ — оптимальный начальный момент, а $s_2^\circ, \ldots, s_p^\circ$ — точки переключения оптимального управления в задаче (3.1), $z^*(s_1^\circ) = A_1^{-1}b_1$, $u^*(s) = -1$ при $s < s_1^\circ$. Функция $\Pi\Delta(s)$, $s \leqslant 0$, не будет иметь нулей, отличных от $s_1^\circ, \ldots, s_p^\circ$, причем $\Pi\Delta(s) > 0$ при $s < s_1^\circ$.

После решения базовых задач найдем вектор

$$\nu^\circ = \Delta_0(T^\circ)\,\pi - (A_3A_1^{-1})'\,\lambda^\circ = \lambda^{\circ\prime} b_0\pi - (A_3A_1^{-1})'\,\lambda^\circ \tag{3.7}$$

Вектор $\lambda^\circ$ определен с точностью до положительного множителя. Будем считать, что $\|\nu^\circ\|^2 + \|\lambda^\circ\|^2 = 1$.

**4. Основная теорема.** Дальнейшие вычисления базируются на следующих утверждениях.

*Теорема.* При выполнении условий а) — ж) в задаче (1.1) с достаточно малым $\mu$ существует оптимальное управление вида

$$u^\circ(t,\mu)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_1^\circ), & t\in[0,t_1[\\ \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_j^\circ), & t\in[t_{j-1},t_j[, \quad j=2,3,\ldots,l\\ -\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ), & t\in[t_l, \quad T+\mu s_1[\\ (-1)^i\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ), & t\in[T+\mu s_{i-1},T+\mu s_i[, \quad i=2,3,\ldots,p\\ (-1)^{p+1}\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ), & t\in[T+\mu s_p,T]\end{cases} \tag{4.1}$$

при этом функции

$$T=T(\mu);\quad t_j=t_j(\mu),\quad j=1,2,\ldots,l;\quad s_i=s_i(\mu),\quad i=1,2,\ldots,p \tag{4.2}$$

разлагаются в асимптотические ряды

$$T\sim\sum\mu^kT^k,\quad t_j\sim\sum\mu^kt_j^k,\quad s_i\sim\sum\mu^ks_i^k \tag{4.3}$$

Здесь и далее $\Sigma$ — знак суммирования от $k=0$ до $k=\infty$.

Пусть $\psi(t,\mu)$, $t\in[0,T(\mu)]$,— вектор сопряженных переменных, соответствующий в силу принципа максимума [8] управлению (4.1);

$$\mu\nu=-(\psi_j(T(\mu),\mu),\quad j=1,2,\ldots,n)',\quad \lambda=-(\psi_{n+i}(T(\mu),\mu),\quad i=1,2,\ldots,m)'$$

причем $\|\nu\|^2+\|\lambda\|^2=1$. Тогда вектор-функции $\nu(\mu)$, $\lambda(\mu)$ допускают асимптотические разложения

$$\nu\sim\sum\mu^k\nu^k,\quad \lambda\sim\sum\mu^k\lambda^k \tag{4.4}$$

и вместе с функциями (4.2) являются решением системы уравнений

$$\begin{gathered}x(T,t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu)=0\\ \psi'(t_j,\nu,\lambda,T,\mu)\,b(\mu)=0,\quad j=1,2,\ldots,l\\ \psi'(T+\mu s_i,\nu,\lambda,T,\mu)\,b(\mu)=0,\quad i=1,2,\ldots,p\\ (\|\nu\|^2+\|\lambda\|^2)/2-1/2=0\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $x(t,t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu)$, $t\in[0,T]$,— траектория сингулярно возмущенной системы, порожденная начальным состоянием $x(0)=x^\circ$ и управлением $u(t,t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu)$, $t\in[0,T]$, вида (4.1), а $\psi(t,\nu,\lambda,T,\mu)$, $t\in[0,T]$,— решение сопряженной системы

$$\psi^{\cdot}=-A'(\mu)\psi,\quad \psi(T)=\begin{Vmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

*Доказательство.* Записав решение сингулярно возмущенной системы при управлении $u(t,t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu)$, $t\in[0,T]$, по формуле Коши, будем иметь

$$\begin{aligned}x(T,t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu)&=F(0,T,\mu)x^\circ+\\ &+\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_1^\circ)\int_0^{t_1}\varphi\,dt+\ldots+\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int_{t_{l-1}}^{t_l}\varphi\,dt-\\ &-\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\Big[\int_{t_l}^{T+\mu s_1}\varphi\,dt-\ldots+(-1)^p\int_{T+\mu s_p}^{T}\varphi\,dt\Big]\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\varphi=F(t,T,\mu)\,b(\mu) \tag{4.8}$$

Здесь $F(t, T, \mu)$, $t \in [0, T]$, $-((n+m) \times (n+m))$-матричная функция, являющаяся решением сингулярно возмущенного уравнения

$$F^{\cdot} = -FA(\mu), \quad F(T) = E \tag{4.9}$$

и имеющая блочную структуру

$$F = \begin{Vmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{Vmatrix}$$

где $F_i = F_i(t, T, \mu)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3, 4$,— матрицы размерами $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно. При помощи метода пограничных функций [6] эти матрицы могут быть разложены в асимптотические ряды

$$F_i \sim \sum \mu^k [F_{ik}(t, T) + \Pi_k F_i(s)] \tag{4.10}$$
$$s = (t - T)/\mu, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Подчеркнем, что это равномерные асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для функций $\Pi_k F_i(s)$, $s \leqslant 0$, называемых пограничными членами, имеют место оценки

$$\| \Pi_k F_i(s) \| \leqslant \alpha_k \exp(\beta_k s), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.11}$$

где $\alpha_k$, $\beta_k$ — некоторые положительные постоянные.

Приведем несколько старших коэффициентов разложений (4.10)

$$F_{10} = 0, \quad F_{20} = -A_1^{-1}A_2F_0(t, T), \quad F_{30} = 0, \quad F_{40} = F_0(t, T)$$
$$F_{11} = A_1^{-1}A_2F_0(t, T)A_3A_1^{-1}, \quad F_{31} = -F_0(t, T)A_3A_1^{-1} \tag{4.12}$$
$$\Pi_0F_1 = G(s), \quad \Pi_0F_2 = G(s)A_1^{-1}A_2, \quad \Pi_0F_3 = 0$$
$$\Pi_0F_4 = 0, \quad \Pi_1F_3 = A_3A_1^{-1}G(s)$$

где $F_0(t, T)$, $t \in [0, T]$,— $(m \times m)$-матричная функция, являющаяся решением уравнения

$$F_0^{\cdot} = -F_0A_0, \quad F_0(T) = E \tag{4.13}$$

а $G(s)$, $s \leqslant 0$, удовлетворяет (3.5).

Пусть $\varphi_1(t, T, \mu)$, $\varphi_2(t, T, \mu)$, $t \in [0, T]$,— вектор-функции, составленные соответственно из первых $n$ и последних $m$ компонент $\varphi(t, T, \mu)$. Тогда, как видно из (3.4), (4.8), (4.10), (4.12), имеют место равномерные асимптотические разложения

$$\varphi_1 \sim \Pi\varphi(s)/\mu + \sum \mu^k [\varphi_{1k}(t, T) + \Pi_k\varphi_1(s)]$$
$$\varphi_2 \sim \sum \mu^k [\varphi_{2k}(t, T) + \Pi_k\varphi_2(s)] \tag{4.14}$$

$$\varphi_{1k} = F_{1,k+1}b_1 + F_{2k}b_2, \quad \Pi_k\varphi_1 = \Pi_{k+1}F_1b_1 + \Pi_kF_2b_2$$
$$\varphi_{2k} = F_{3,k+1}b_1 + F_{4k}b_2, \quad \Pi_k\varphi_2 = \Pi_{k+1}F_3b_1 + \Pi_kF_4b_2 \tag{4.15}$$

Заметим, что в силу (2.2), (2.3), (3.4), (4.12), (4.13)

$$\varphi_{10}(t, T^\circ) = -A_1^{-1}A_2\varphi_0(t), \quad \varphi_{20}(t, T^\circ) = \varphi_0(t), \quad t \in [0, T^\circ] \tag{4.16}$$
$$\Pi_0\varphi_2(s) = A_3A_1^{-1}\Pi\varphi(s), \quad s \leqslant 0$$

Пусть $z(t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_p, T, \mu)$, $y(t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_p, T, \mu)$ — вектор-функции, составленные соответственно из первых $n$ и последних $m$ компонент вектор-функции (4.7). Как следует из (4.10)—(4.12), (4.14), (4.15)

$$z \sim \sum \mu^k z_k(t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_p, T)$$
$$y \sim \sum \mu^k y_k(t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_p, T) \tag{4.17}$$

$$z_0 = -A_1^{-1}A_2F_0(0, T)\,y^\circ + \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_1^\circ)\int\limits_0^{t_1}\varphi_{10}\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\varphi_{10}\,dt - \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int\limits_{t_l}^{T}\varphi_{10}\,dt +$$

$$+ \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\Big[-\int\limits_{-\infty}^{s_1}\Pi\varphi\,ds + \int\limits_{s_1}^{s_2}\Pi\varphi\,ds - \ldots + (-1)^{p+1}\int\limits_{s_p}^{0}\Pi\varphi\,ds \tag{4.18}$$

$$y_0 = F_0(0, T)\,y^\circ + \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_1^\circ)\int\limits_0^{t_1}\varphi_{20}\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\varphi_{20}\,dt - \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int\limits_{t_l}^{T}\varphi_{20}\,dt \tag{4.19}$$

$$z_k = F_{1k}(0, T)\,z^\circ + F_{2k}(0, T)\,y^\circ + \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_1^\circ)\int\limits_0^{t_1}\varphi_{1k}\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\varphi_{1k}\,dt - \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\int\limits_{t_l}^{T}\varphi_{1k}\,dt +$$

$$+ \operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\Big[-\int\limits_{-\infty}^{s_1}\Pi_{k-1}\varphi_1\,ds + \int\limits_{s_1}^{s_2}\Pi_{k-1}\varphi_1\,ds - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p+1}\int\limits_{s_p}^{0}\Pi_{k-1}\varphi_1\,ds\Big] - 2\operatorname{sgn}\Delta_0^{\cdot}(t_l^\circ)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}}\varphi_{1,\,k-i}(T, T)\times$$

$$\times[(s_1)^i - (s_2)^i + \ldots + (-1)^{p+1}(s_p)^i], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для $y_k$, $k \geqslant 1$, имеет место аналогичная формула с той лишь разницей, что $F_{1k}$ заменяется на $F_{3k}$, $F_{2k}$ — на $F_{4k}$, а вместо $\varphi_{1k}$, $\Pi_{k-1}\varphi_1$ соответственно имеем $\varphi_{2k}$, $\Pi_{k-1}\varphi_2$.

Обозначим $\Delta(t, \nu, \lambda, T, \mu) = \psi'(t, \nu, \lambda, T, \mu)b(\mu)$, $t \in [0, T]$. Как видно из (4.6), (4.8), (4.9), $\Delta = \mu\nu'\varphi_1 + \lambda'\varphi_2$. Но тогда в силу (4.14) эта функция допускает равномерное асимптотическое разложение

$$\Delta \sim \sum\mu^k[\Delta_k(t, \nu, \lambda, T) + \Pi_k\Delta(s, \nu, \lambda)] \tag{4.20}$$

$$\Delta_0 = \lambda'\varphi_{20},\ \Delta_k = \nu'\varphi_{1,\,k-1} + \lambda'\varphi_{2k},\ k = 1, 2, \ldots$$

$$\Pi_0\Delta = \nu'\Pi\varphi + \lambda'\Pi_0\varphi_2,\ \Pi_k\Delta = \nu'\Pi_{k-1}\varphi_1 + \lambda'\Pi_k\varphi_2,\ k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что из (2.4), (3.6), (3.7), (4.16) следует

$$\Delta_0(t, \nu^\circ, \lambda^\circ, T^\circ) = \Delta_0(t), \quad t \in [0, T^\circ] \tag{4.21}$$

$$\Pi_0\Delta(s, \nu^\circ, \lambda^\circ) = \Delta_0(T^\circ)(\Pi\Delta(s) - 1),\ s \leqslant 0$$

Пусть $\delta(s, \nu, \lambda, T, \mu) = \Delta(T + \mu s, \nu, \lambda, T, \mu)$, $s \leqslant 0$. В силу (4.20) и того, что $t = T + \mu s$, имеем

$$\delta \sim \sum\mu^k\delta_k(s, \nu, \lambda, T) \tag{4.22}$$

$$\delta_k = \Pi_k\Delta(s, \nu, \lambda) + \sum_{i=0}^{k}\frac{s^i}{i!}\frac{\partial^i}{\partial t^i}\Delta_{k-i}(T, \nu, \lambda, T) \tag{4.23}$$

Пусть $h = (t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_p, T, \nu_1, \ldots, \nu_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)'$, где $\nu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— компоненты вектора $\nu$, а $\lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$,— компоненты $\lambda$. Тогда систему (4.5) можно записать в виде

$$R(h, \mu) = 0 \tag{4.24}$$

$$R(h,\mu)=\left\|\begin{matrix} z(t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu) \\ y(t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T,\mu) \\ \Delta(t_j,\nu,\lambda,T,\mu), \quad j=1,2,\ldots,l \\ \delta(s_i,\nu,\lambda,T,\mu), \quad i=1,2,\ldots,p \\ (\|\nu\|^2+\|\lambda\|^2)/2-{}^1/_2 \end{matrix}\right\|$$

Как следует из (4.17), (4.20), (4.22) и оценок (4.11), левая часть уравнения (4.24) допускает асимптотическое разложение

$$R(h,\mu)\sim\Sigma\mu^k R_k(h) \tag{4.25}$$

$$R_k(h)=\left\|\begin{matrix} z_k(t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T) \\ y_k(t_1,\ldots,t_l,s_1,\ldots,s_p,T) \\ \Delta_k(t_j,\nu,\lambda,T), \quad j=1,2,\ldots,l \\ \delta_k(s_i,\nu,\lambda,T), \quad i=1,2,\ldots,p \\ r_k(\nu,\lambda) \end{matrix}\right\| \tag{4.26}$$

$$r_0=(\|\nu\|^2+\|\lambda\|^2)/2-1/2, \quad r_k=0, \quad k\geqslant 1$$

Доопределим $R(h,0)=R_0(h)$. Тогда вектор-функция $R(h,\mu)$ будет непрерывной в области $\|h-h_0\|<\eta_0$, $0\leqslant\mu<\mu_0$, вместе со своими частными производными по компонентам вектора $h$. Здесь $\eta_0$, $\mu_0$ — некоторые достаточно малые положительные числа, а

$$h_0=(t_1^\circ,\ldots,t_l^\circ,s_1^\circ,\ldots,s_p^\circ,T^\circ,\nu_1^\circ,\ldots,\nu_n^\circ,\lambda_1^\circ,\ldots,\lambda_m^\circ)'.$$

Опираясь на то, что управления $u^\circ(t)$, $t\in[0,T^\circ]$, $u^*(s)$, $s\in[s_1^\circ,0]$, являются допустимыми в задачах (1.2), (3.1), а также на соотношения (4.16), (4.18), (4.19), (4.21), (4.23), (4.26), можно показать, что $R(h_0,0)=$ $=R_0(h_0)=0$.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что матрица Якоби системы (4.24) имеет следующую структуру:

$$I_0=\left\|\begin{matrix} B_1 & B_2 & c_1 & 0 & 0 \\ B_3 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ B_4 & 0 & c_3 & 0 & B_5 \\ 0 & B_6 & 0 & B_7 & B_8 \\ 0 & 0 & 0 & \nu^{\circ\prime} & \lambda^{\circ\prime} \end{matrix}\right\| \tag{4.27}$$

$$B_1=(-2A_1^{-1}A_2\varphi_0(t_j^\circ)\operatorname{sgn}\dot\Delta_0(t_j^\circ),\ j=1,2,\ldots,l)$$
$$B_2=(2(-1)^{j-l}\Pi\varphi(s_i^\circ)\operatorname{sgn}\dot\Delta_0(t_l^\circ),\ i=1,2,\ldots,p)$$
$$B_3=(2\varphi_0(t_j^\circ)\operatorname{sgn}\dot\Delta_0(t_j^\circ),\ j=1,2,\ldots,l)$$
$$B_4=\operatorname{diag}(\dot\Delta_0(t_j^\circ),\ j=1,2,\ldots,l),\ B_5=(\varphi_0(t_j^\circ),\ j=1,2,\ldots,l)'$$
$$B_6=\operatorname{diag}(\Delta_0(T^\circ)d\Pi\Delta(s_i^\circ)/ds,\ i=1,2,\ldots,p)$$
$$B_7=(\Pi\varphi(s_i^\circ),\ i=1,2,\ldots,p)',\ B_8=(A_3A_1^{-1}\Pi\varphi(s_i^\circ)+b_0,$$
$$i=1,2,\ldots,p)'$$
$$c_1=A_1^{-1}A_2b_0\operatorname{sgn}\dot\Delta_0(t_l^\circ), \quad c_2=-b_0\operatorname{sgn}\dot\Delta_0(t_l^\circ)$$
$$c_3=(\lambda^{\circ\prime}A_0\varphi_0(t_j^\circ),\ j=1,2,\ldots,l)'$$

Используя тот факт, что матрицы (2.1), (3.3) имеют полный ранг, можно показать, что ранг матрицы, получающейся из (4.27) вычеркиванием последней строки и столбца с номером $l+p+1$, равен $l+p+n+m-1$. Все строки этой матрицы в силу того, что

$$\lambda^{\circ\prime}\varphi_0(t_j^\circ)=\Delta_0(t_j^\circ)=0,\ j=1,2,\ldots,l;\ \nu^{\circ\prime}\Pi\varphi(s_i^\circ)+$$
$$+\lambda^{\circ\prime}A_3A_1^{-1}\Pi\varphi(s_i^\circ)+\lambda^{\circ\prime}b_0=\Delta_0(T^\circ)\Pi\Delta(s_i^\circ)=0, \quad i=1,2,\ldots,p$$

ортогональны вектору $(0, 0, \nu^{\circ\prime}, \lambda^{\circ\prime})$. Отсюда следует, что столбцы матрицы $I_0$, за исключением $(l+p+1)$-го, линейно независимы. При этом они ортогональны вектору $(0, \lambda^{\circ\prime}, 0, 0, 0)$. В то же время столбец с номером $l+p+1$ этому вектору не ортогонален, так как $\lambda^{\circ\prime} b_0 = \Delta_0(T^\circ) \neq 0$. Но тогда матрица Якоби $I_0$ будет невырожденной.

Таким образом, для системы (4.24) или, что то же самое, (4.5) выполнены все условия теоремы о неявной функции. Это означает, что при достаточно малых $\mu$ в задаче (1.1) существуют допустимое управление $u^\circ(t, \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, вида (4.1) и такие векторы $\nu(\mu)$, $\lambda(\mu)$, что точки переключения $u^\circ(t, \mu)$ являются нулями функции $\Delta(t, \mu) = \psi'(t, \mu) b(\mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, построенной по нетривиальному решению $\psi'(t, \mu)$, $t \in \in [0, T(\mu)]$, сопряженной системы (4.6) с $T = T(\mu)$, $\nu = \nu(\mu)$, $\lambda = = \lambda(\mu)$.

Поскольку левые части системы (4.5) разлагаются в асимптотические ряды по целым степеням $\mu$, то [9] будут иметь место асимптотические разложения (4.3), (4.4).

Заметим, что $\Delta(t, \mu) = \Delta(t, \nu(\mu), \lambda(\mu), T(\mu), \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$. Тогда из (4.20), (4.21) следует, что существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\Delta(t, \mu) - \Delta_0(t) - \Delta_0(T^\circ)(\Pi\Delta(s) - 1)| \leqslant C\mu$$
$$s = (t - T(\mu))/\mu, \quad t \in [0, T(\mu)]$$

Опираясь на этот факт, предположения г), ж) и замечания, сделанные в разд. 3 относительно функции $\Pi\Delta(s)$, $s \leqslant 0$, можно показать, что при достаточно малом $\mu$ коуправление $\Delta(t, \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, не имеет других нулей, кроме точек переключения управления $u^\circ(t, \mu)$, $t \in \in [0, T(\mu)]$, при этом $u^\circ(t, \mu) = -\operatorname{sgn} \Delta(t, \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$. Но это означает, что для достаточно малых значений $\mu$ допустимое управление $u^\circ(t, \mu)$, $t \in [0, T(\mu)]$, удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина [8] и, следовательно, является оптимальным. Теорема доказана.

**5. Построение асимптотики.** Управление вида (4.1) с $t_j = t_j^\circ$, $j = = 1, 2, \ldots, l$; $s_i = s_i^\circ$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $T = T^\circ$ будет асимптотически 0-оптимальным управлением в задаче (1.1). Для построения $N$-оптимального управления ($N \geqslant 1$) достаточно найти коэффициенты

$$t_j^k,\ j = 1, 2, \ldots, l;\ s_i^k,\ j = 1, 2, \ldots, p;\ T^k,\ k = 1, 2, \ldots, N \quad (5.1)$$

разложений (4.3). Пусть

$$h_k = (t_1^k, \ldots, t_l^k, s_1^k, \ldots, s_p^k, T^k, \nu_1^k, \ldots, \nu_n^k, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k)'$$
$$h_N(\mu) = \textstyle\sum_N \mu^k h_k$$

Здесь и далее $\Sigma_N$ — знак суммирования от $k = 0$ до $k = N$. Разложим вектор-функцию $\Sigma_N \mu^k R_k(h_N(\mu))$ по степеням $\mu$ до порядка $N$ включительно и приравняем коэффициенты разложения нулю. В результате получим невырожденные системы линейных уравнений для последовательного определения векторов $h_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$I_0 h_1 = -R_1(h_0)$$
$$I_0 h_2 = -\frac{\partial R_1}{\partial h}(h_0) h_1 - \frac{1}{2} h_1' \frac{\partial^2 R_0}{\partial h^2}(h_0) h_1 - R_2(h_0) \quad (5.2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Заметим, что в силу структуры (4.27) матрицы Якоби $I_0$ каждая из систем (5.2) расщепляется: сначала из системы порядка $n + m + 1$ находятся коэффициенты $T^k$, $\nu^k$, $\lambda^k$, а затем по ним независимо друг от друга определяются остальные коэффициенты $t_j^k$, $j = 1, 2, \ldots, l$; $s_i^k$, $i = 1, 2, \ldots, p$. В случае, когда $l = m - 1$, $p = n$, т. е. когда коуправления базовых задач не имеют неопорных нулей, распадается исходная система (4.5): момент оптимального быстродействия и точки переключения управления (4.1) могут быть найдены независимо от множителей Лагранжа. Это, естественно, влечет за собой соответствующую декомпозицию систем (5.2).

Последовательно решая системы (5.2), найдем коэффициенты (5.1) и составим полиномы

$$T^N(\mu) = \sum_N \mu^k T^k, \qquad t_j^N(\mu) = \sum_N \mu^k t_j^k, \quad j = 1, 2, \ldots, l$$
$$s_i^N(\mu) = \sum_N \mu^k s_i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

Управление вида (4.1), где $t_j = t_j^N(\mu)$, $j = 1, 2, \ldots, l$; $s_i = s_i^N(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $T = T^N(\mu)$, будет асимптотически $N$-оптимальным управлением в задаче (1.1).

Полученные асимптотические приближения корней уравнения (4.24) можно использовать для точного решения этого уравнения, а значит, и рассмотренной задачи, при заданном значении малого параметра. Для этого нужно применить процедуру доводки [5], т. е. найти по методу Ньютона корни уравнения (4.24), взяв в качестве начального приближения $h_N(\mu)$. При этом вместо матрицы $\partial R(h, \mu)/\partial h$ можно воспользоваться ее асимптотическим разложением, коэффициенты которого вычисляются через коэффициенты разложения (4.25).

В заключение отметим, что развитие алгоритма на системы с многомерным управлением не встречает принципиальных трудностей.

**6. Пример.** Рассмотрим пример, описывающий процесс управления электродвигателем постоянного тока [2]:

$$\begin{aligned} &\mu z^\cdot = -z - \frac{k}{k_1} y + b_1 u, \quad z(0) = z^\circ, \quad z(T) = 0 \\ &y^\cdot = \frac{k_1}{1+k} z - \frac{1}{1+k} y, \quad y(0) = y^\circ, \quad y(T) = 0 \\ &|u| \leqslant 1, \quad J(u) = T \to \min \end{aligned} \tag{6.1}$$

Все постоянные в задаче (6.1) положительны. Применяя описанный выше алгоритм, получаем, что асимптотически 0-оптимальное управление в рассмотренном примере имеет вид

$$u(t, \mu) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \; T^\circ + \mu s^\circ[ \\ 1, & t \in [T^\circ + \mu s^\circ, \; T^\circ] \end{cases}$$

а 1-оптимальное управление будет следующим:

$$u^1(t, \mu) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \; T^\circ + \mu(T^1 + s^\circ) + \mu^2 s^1[ \\ 1, & t \in [T^\circ + \mu(T^1 + s^\circ) + \mu^2 s^1, \; T^\circ + \mu T^1] \end{cases}$$

$$T^\circ = \ln(1 + y^\circ/b_0), \quad b_0 = k_1 b_1/(1 + k), \quad s^\circ = -\ln 2$$
$$T^1 = -y_1/b_0, \quad s^1 = -k y_1/k_1 b_1 - z_1/b_1$$

$$z_1 = \frac{kb_1}{1+k}(1 + 3s^\circ - \exp(-T^\circ)) - \frac{k^2 b_1}{(1+k)^2}(1 - \exp(-T^\circ) + T^\circ \exp(-T^\circ)) + $$
$$+ \frac{k(2k+1)b_1}{(1+k)^2}(1 - \exp(-T^\circ)) - \frac{k}{1+k}\exp(-T^\circ)\left(z^\circ + \frac{2k+1}{k_1} y^\circ - \frac{kT^\circ y^\circ}{k_1}\right)$$
$$y_1 = \frac{\exp(-T^\circ)}{1+k}(k_1 z^\circ + k y^\circ - k y^\circ T^\circ) - \frac{kb_0}{1+k}(1 - \exp(-T^\circ) + T^\circ \exp(-T^\circ)) +$$
$$+ b_0(2 - 2s^\circ - \exp(-T^\circ))$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Collins W. D.* Singular perturbations of linear time-optimal control problems // Recent Mathematical Developments in control. L., N. Y.: Acad. Press, 1973. P. 123—136.
2. *Kokotovic P. V., Haddad A. H.* Contrallability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. N 1. P. 111—113.
3. *Kokotovic P. V., Haddad A. H.* Singular perturbations of a class of time-optimal controls // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. N 1. P. 163—164.
4. *Гичев Т. Р., Дончев А. Л.* Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 466—474.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Минск: Университетское, 1984. 207 с.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Оптимизация систем управления с помощью кратных опор // Конструктивная теория экстремальных задач. Минск: Университетское, 1984. С. 62—67.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
9. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

Поступила в редакцию
4.VIII.1988

Минск