Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 531.36 + 531.38

А. З. Брюм

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Предлагается способ исследования орбитальной устойчивости периодических решений нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Функция Ляпунова построена из первых интегралов уравнений возмущенного движения и скалярного произведения скорости движения по изучаемой орбите на вектор возмущений. В задаче об орбитальной устойчивости второй метод Ляпунова впервые был использован для изучения [1] фазовых траекторий систем с двумя степенями свободы.

1. Построение функции Ляпунова. Пусть $\Omega \subset R^{n+1}$ — область, в которой расположена орбита [2] T-периодического решения

$$Y = \Phi(t) \tag{1.1}$$

автономной системы

$$Y^\cdot = F(Y) \tag{1.2}$$

Исследуем орбитальную устойчивость решения (1.1) при условии, что отображение $F \in C^{(2)}(\Omega; R^{n+1})$.

Обозначим $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ скалярное произведение в R^{n+1},

$$\psi(t) = \Phi^\cdot(t) \neq 0, \quad Z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_{n+1})$$
$$\varkappa_1 = \langle F(Z + \Phi(t)), \ \psi(t)\rangle^{-1}, \quad \varkappa_2 = \psi^2(t) - \langle\psi^\cdot(t), Z\rangle$$

Известно ([2], теорема 25), что необходимым и достаточным условием орбитальной устойчивости (1.1) является устойчивость нулевого решения уравнений

$$Z^\cdot = \varkappa_1\varkappa_2 F(Z + \Phi(t)) - \psi(t) \tag{1.3}$$

по Ляпунову, относительно возмущений Z_0 из многообразия $\langle\psi(0), Z_0\rangle = 0$. Разумеется, справедливо и следующее, более слабое, утверждение.

Лемма. Если нулевое решение системы (1.3) устойчиво по Ляпунову, то решение (1.1) уравнений (1.2) орбитально устойчиво.

Предположим, что уравнения (1.2) допускают m не зависимых от времени первых интегралов $U_i \in C^{(1)}(\Omega; R^1)$. При этом

$$(\forall i\colon 1 \leqslant i \leqslant m)(\forall Y \in \Omega) : \langle \operatorname{grad} U_i(Y), F(Y)\rangle = 0 \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что первые интегралы

$$V_i = U_i(Z + \Phi(t)) - U_i(\Phi(t)) \tag{1.5}$$

уравнений возмущенного движения

$$Z^\cdot = F(Z + \Phi(t)) - \psi(t) \tag{1.6}$$

являются первыми интегралами системы (1.3). Наряду с (1.5) уравнения (1.3) допускают, как известно [2], интеграл

$$V_{m+1} = \langle\psi(t), Z\rangle \tag{1.7}$$

не имеющий аналога при изучении системы (1.2).

Из леммы с учетом теоремы Ляпунова об устойчивости тривиально выводится следующее предположение.

Теорема 1. Если из $V_1, \ldots, V_{m+1}$ можно построить функцию, знакоопределенную относительно Z, то решение (1.1) системы (1.2) орбитально устойчиво.

Итак, процедура отыскания функции Ляпунова при изучении орбитальной устойчивости отличается от известного [3] построения знакоопределенного первого интеграла уравнений возмущенного движения (1.6) лишь использованием наряду с (1.5) дополнительной функции возмущений — линейной формы (1.7). Это обстоятельство позволяет распространить метод интегральных связок Четаева [4] на исследование устойчивости орбит.

2. Интегральные связки и орбитальная устойчивость. Пусть первые интегралы $U_i \in C^{(3)}$ $(\Omega; R^1)$. Обозначим $l_i(t) = \operatorname{grad} U_i(\Phi(t))$ и представим функции (1.5) при помощи формулы Тейлора в виде

$$V_i = \langle l_i(t), Z\rangle + \langle Q_i(t) Z, Z\rangle + \varepsilon_i(t, Z)$$

Здесь отображения

$$l_i \in C^{(2)}(R^1; R^{n+1}), \quad Q_i \in C^{(1)}(R^1; L(R^{n+1}; R^{n+1}))$$

T-периодичны, а $\varepsilon_i(t, Z) = O(\| Z\|^3)$ равномерно по $t \in R^1$.

Теорема 2. Если существуют такие $\lambda_i \in R^1$, что

$$\Sigma\lambda_i l_i(t_0) = 0 \tag{2.1}$$

в некоторый момент времени t_0, а квадратичная форма

$$Q = \Sigma\lambda_i \langle Q_i(t) Z, Z\rangle$$

знакоопределена на многообразии $N = \{(t, Z) \mid \langle l_1(t), Z\rangle = \ldots = \langle l_m(t), Z\rangle = \langle\psi(t), Z\rangle = 0\}$, то решение (1.1) системы (1.2) орбитально устойчиво.

Здесь и далее суммирование ведется по i от $i = 1$ до $i = m$.

Доказательство. Функции $\langle l_i(t), Z\rangle$ являются [5] первыми интегралами уравнений в вариациях для решения (1.1). Следовательно, $l_i(t)$ представляют собой решения линейной системы, сопряженной с системой уравнений в вариациях [6]. По теореме существования и единственности равенство (2.1) эквивалентно

$$\Sigma\lambda_i l_i(t) \equiv 0 \tag{2.2}$$

Выберем знаки перед λ_i так, чтобы форма Q стала положительно определенной на N. Обозначим

$$B = [0; T] \times \{Z \mid \| Z\| = 1\}, \quad H = \langle\psi(t), Z\rangle^2 + \Sigma\langle l_i(t), Z\rangle^2$$

α_j — некоторые положительные постоянные.

Пусть $P \supset N \cap B$ — открытое множество, на котором $Q \geqslant \alpha_1$. На компакте $B \setminus P$, не пересекающемся с N, $H \geqslant 2\alpha_2$ и $Q \geqslant -\alpha_3$. Следовательно, при $\mu = \alpha_2\alpha_3^{-1}$ функция $V_{m+1}^2 + \mu\Sigma\lambda_i V_i + \Sigma V_i^2$ положительно определена, так как в силу (2.2) отличается от положительно определенной относительно Z квадратичной формы $\mu Q + H$ величиной порядка $\| Z\|^3$. По теореме 1 решение (1.1) орбитально устойчиво, что и требовалось доказать.

Замечания. 1°. Поясним, почему в (2.1) можно не упоминать о векторе $\psi(t_0)$ Для этого умножим обе части уравнения

$$\sum\lambda_i l_i(t_0) + \lambda_{m+1}\psi(t_0) = 0 \tag{2.3}$$

скалярно на $\langle \psi(t_0), \psi(t_0)\rangle^{-1} \psi(t_0)$. В связи с тем что

$$\langle l_i(t_0), \psi(t_0)\rangle = \langle \mathrm{grad}\, U_i(\Phi(t_0)), F(\Phi(t_0))\rangle = 0$$

из (2.3) получаем $\lambda_{m+1} = 0$. Следовательно, (2.3) эквивалентно (2.1).

2°. Указанные в теореме 2 условия не только достаточны, но и необходимы для существования такой функции $\eta \in C^{(2)}(R^{m+1}; R^1)$, что $\eta(V_1, \ldots, V_{m+1})$ и ее матрица Гессе в точке $Z = 0$ являются знакоопределенными [1].

3°. В формулировке теоремы 2 время t играет роль параметра, поэтому исследование знакоопределенности формы Q на многообразии N можно проводить известными [7, 8] методами.

Проиллюстрируем теорему 2 изучением орбитальной устойчивости некоторых периодических решений уравнений движения твердого тела вокруг закрепленной точки.

3. Маятникообразные движения в центральном ньютоновском силовом поле. При условиях интегрируемости Клебша [9] уравнения движений

$$Ap^{\cdot} = (B - C)(qr - \varepsilon\gamma'\gamma'') \quad (ABC, pqr, \gamma'\gamma''\gamma) \tag{3.1}$$

$$\gamma^{\cdot} = r\gamma' - q\gamma'' \quad (\gamma\gamma'\gamma'', rpq) \tag{3.2}$$

допускают первые интегралы

$$U_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \varepsilon(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)$$

$$U_2 = Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'', \quad U_3 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2$$

$$U_4 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \varepsilon(BC\gamma^2 + AC\gamma'^2 + AB\gamma''^2)$$

Система (3.1), (3.2) имеет решение, зависящее от параметра h [9]:

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = \varphi^{\cdot}, \quad \varphi^{\cdot 2} = G(\varphi)$$

$$\gamma_0 = \sin\varphi, \quad \gamma_0' = \cos\varphi, \quad \gamma_0'' = 0 \tag{3.3}$$

$$\alpha = AC^{-1}, \quad \beta = BC^{-1}, \quad G(\varphi) = h - \varepsilon(\alpha\sin^2\varphi + \beta\cos^2\varphi)$$

Не уменьшая общности, предположим, что $\alpha \geqslant \beta$. Условия периодичности (3.3) таковы:

$$h \in\ ]\,\varepsilon\beta; +\infty\,[\ \diagdown \{\varepsilon\alpha\} \tag{3.4}$$

В обозначениях п. 2

$$l_1 = 2\mathrm{col}\,(0, 0, C\varphi^{\cdot}, \varepsilon A\sin\varphi, \varepsilon B\cos\varphi, 0)$$

$$l_2 = \mathrm{col}\,(A\sin\varphi, B\cos\varphi, 0, 0, 0, C\varphi^{\cdot})$$

$$l_3 = 2\mathrm{col}\,(0, 0, 0, \sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$l_4 = 2C\,\mathrm{col}\,(0, 0, C\varphi^{\cdot}, -\varepsilon B\sin\varphi, -\varepsilon A\cos\varphi, 0)$$

С точностью до мультипликативной постоянной

$$\lambda_1 = -C^{-1}, \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \varepsilon(\alpha + \beta), \quad \lambda_4 = C^{-2}$$

Поэтому квадратичная форма Q имеет вид

$$(\alpha^2 - \alpha) z_1^2 + (\beta^2 - \beta) z_2^2 + \varepsilon(\alpha + \beta - \alpha\beta - 1) z_6^2 \tag{3.5}$$

а многообразие N задается уравнениями

$$\alpha\sin\varphi z_1 + \beta\cos\varphi z_2 + \varphi^{\cdot} z_6 = 0, \quad \sin\varphi z_4 + \cos\varphi z_5 = 0$$

$$\varphi^{\cdot} z_3 - \varepsilon\beta\sin\varphi z_4 - \varepsilon\alpha\cos\varphi z_5 = 0 \tag{3.6}$$

$$\varepsilon(\beta - \alpha)\sin\varphi\cos\varphi z_3 + \varphi^{\cdot}\cos\varphi z_4 - \varphi^{\cdot}\sin\varphi z_5 = 0$$

Исследуем в соответствии с теоремой 2 знакоопределенность формы (3.5) на многообразии (3.6). Введем новую переменную

$$z_7 = -\beta^{-1}\cos\varphi z_1 + \alpha^{-1}\sin\varphi z_2$$

---

1 *Брюм А. З.* Исследование периодических решений уравнений механики с помощью методов Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Донецк, 1985. 111 с.

Тогда из (3.6) будут следовать соотношения

$$z_1 = -(\alpha^{-1}\varphi^{\cdot} \sin \varphi z_6 + \beta \cos \varphi \, z_7)$$
$$z_2 = -\beta^{-1}\varphi^{\cdot} \cos \varphi z_6 + \alpha \sin \varphi z_7$$
$$z_3 = z_4 = z_5 = 0$$

Форма (3.5) на многообразии (3.6) станет функцией двух независимых переменных — z_6 и z_7:

$$\{\varphi^{\cdot 2} [1 - (\alpha^{-1} \sin^2 \varphi + \beta^{-1} \cos^2 \varphi)] + \varepsilon (\alpha + \beta - \alpha\beta - 1)\} z_6^2 +$$
$$+ 2 (\alpha - \beta) \varphi^{\cdot} \sin \varphi \cos \varphi z_6 z_7 + \alpha\beta (\alpha\beta - \alpha \sin^2 \varphi - \beta \cos^2 \varphi) z_7^2 \quad (3.7)$$

Необходимое и достаточное условие

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(h - \varepsilon\alpha\beta) > 0 \quad (3.8)$$

знакоопределенности квадратичной формы с периодическими относительно φ коэффициентами, полученное при помощи критерия Сильвестра, следует рассматривать совместно с (3.4). Решая систему неравенств (3.4) и (3.8), при помощи теоремы 2 устанавливаем справедливость следующего предложения.

Теорема 3. Если постоянная U_{10} интеграла энергии на решении (3.3) удовлетворяет какому-либо из условий

$$U_{10} \in \,] \, \varepsilon B; + \infty [\setminus \{\varepsilon A\}, \quad B \leqslant A < C$$
$$U_{10} \in \,] \, \varepsilon ABC^{-1}; + \infty [, \quad C < B \leqslant A$$
$$U_{10} \in \,] \, \varepsilon B; \varepsilon ABC^{-1} [, \quad B < C < A$$

то указанное решение орбитально устойчиво.

При $\varepsilon = 0$ из доказанной теоремы следует известное [10, п. 392] условие устойчивости перманентных вращений гироскопа Эйлера вокруг большей и меньшей оси эллипсоида инерции.

4. Случай Делоне. При условиях Ковалевской динамические уравнения Эйлера в безразмерных переменных имеют вид

$$2p^{\cdot} = qr, \quad 2q^{\cdot} = -rp - \gamma'', \quad r^{\cdot} = \gamma' \quad (4.1)$$

Система (4.1), (3.2) допускает первые интегралы

$$U_1 = 2 (p^2 + q^2) + r^2 - 2\gamma, \quad U_2 = 2 (p\gamma + q\gamma') + r\gamma''$$
$$U_3 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2, \quad U_4 = (p^2 - q^2 + \gamma)^2 + (2pq + \gamma')^2$$

и частное решение

$$p_0 = h \sin \varphi, \quad q_0 = \varphi^{\cdot}, \quad r_0 = 2h \cos \varphi$$
$$\gamma_0 = q_0^2 - p_0^2, \quad \gamma_0' = -2p_0 q_0, \quad \gamma_0'' = \sin (\varphi + \alpha) \quad (4.2)$$
$$\varphi^{\cdot 2} = G (\varphi) = \cos (\varphi + \alpha) - h^2 \sin^2 \varphi$$

удовлетворяющее условиям интегрируемости Делоне [11]. Здесь $h \geqslant 0$ и α — параметры.

Далее будем считать, что решение (4.2) не является постоянной.

Множество

$$\{\varphi \mid G = dG/d\varphi = 0, \quad d^2G/d\varphi^2 \geqslant 0\} \neq \varnothing$$

тогда и только тогда, когда

$$| \sin \alpha | = (3 \sqrt{3} h)^{-1} (2h^2 + h_1)^{1/2} (4h^2 - h_1)$$
$$h^4 \in [3/4; 1], \quad h_1 = (4h^4 - 3)^{1/2} \quad (4.3)$$

Если h и α не удовлетворяют условиям (4.3), то решение (4.2) периодическое.

В обозначениях п.2

$$
\begin{gathered}
l_1 = 2\,\mathrm{col}\,(2p_0,\ 2q_0,\ r_0,\ -1,\ 0,\ 0)\\
l_2 = \mathrm{col}\,(2\gamma_0,\ 2\gamma_0',\ \gamma_0'',\ 2p_0,\ 2q_0,\ r_0)\\
l_3 = 2\,\mathrm{col}\,(0,\ 0,\ 0,\ \gamma_0,\ \gamma_0',\ \gamma_0''),\\
l_4 = \mathrm{col}\,(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\\
\Phi = \mathrm{col}\,(p_0,\ q_0,\ r_0,\ \gamma_0,\ \gamma_0',\ \gamma_0'')
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

С точностью до мультипликативной постоянной

$$
\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\quad \lambda_4 = 1
$$

Квадратичная форма Q имеет вид

$$
\langle l_5,\ Z\rangle^2 + \langle l_6,\ Z\rangle^2 \tag{4.5}
$$

$$
l_5 = \mathrm{col}\,(2p_0,\ -2q_0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\quad l_6 = \mathrm{col}\,(2q_0,\ 2p_0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)
$$

Очевидно, форма (4.5) знакоопределена на многообразии

$$
\langle l_1,\ Z\rangle = \langle l_2,\ Z\rangle = \langle l_3,\ Z\rangle = \langle l_4,\ Z\rangle = \langle \Phi^\cdot,\ Z\rangle = 0
$$

тогда и только тогда, когда векторы l_1, l_2, l_3, l_5, l_6 и $\Phi^\cdot$ линейно независимы в любой момент времени. Вычисления показывают, что $\langle l_5,\ \Phi^\cdot\rangle \equiv \equiv \langle l_6,\ \Phi^\cdot\rangle \equiv 0$. Поэтому для применения теоремы 2 необходимо проверить условие $\mathrm{rank}\,\{l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_5,\ l_6\} \equiv 5$. Линейно-алгебраическое исследование этого условия и теорема 2 позволяют сформулировать следующий критерий орбитальной устойчивости.

Теорема 4. Если $h > 0$, то любое отличное от точки покоя периодическое решение уравнений (4.1), (3.2) при условиях интегрируемости Делоне орбитально устойчиво.

5. Маятниковые движения гироскопа Ковалевской. Уравнения (4.1), (3.2) допускают частное решение

$$
\begin{gathered}
p_0 = 0,\quad q_0 = \varphi^\cdot,\quad r_0 = 0,\quad \varphi^{\cdot 2} = h + \cos\varphi\\
\gamma_0 = \cos\varphi,\quad \gamma_0' = 0,\quad \gamma_0'' = \sin\varphi
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

описывающее вращение гироскопа Ковалевской вокруг большей оси эллипсоида инерции. Если параметр $h \neq \pm 1$, то указанное решение периодическое.

В обозначениях п. 2

$$
\begin{gathered}
l_1 = \mathrm{col}\,(0,\ 4q_0,\ 0,\ -2,\ 0,\ 0),\quad l_2 = \mathrm{col}\,(2\gamma_0,\ 0,\ \gamma_0'',\ 0,\ 2q_0,\ 0)\\
l_3 = 2\,\mathrm{col}\,(0,\ 0,\ 0,\ \gamma_0,\ 0,\ \gamma_0''),\quad l_4 = 2h\,\mathrm{col}\,(0,\ 2q_0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0)
\end{gathered}
$$

С точностью до мультипликативной постоянной

$$
\lambda_1 = -h,\quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\quad \lambda_4 = 1
$$

Квадратичная форма Q имеет вид

$$
4\gamma_0 z_1^2 + 4\,(\gamma_0 + h)\,z_2^2 - hz_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + 4q_0 z_1 z_5 - 4q_0 z_2 z_4 \tag{5.2}
$$

а многообразие N задается уравнениями

$$
\begin{gathered}
2q_0 z_2 - z_4 = 0,\quad 2\cos\varphi z_1 + \sin\varphi z_3 + 2q_0 z_5 = 0,\quad \cos\varphi z_4 + \sin\varphi z_6 = 0\\
-\,{}^1/_2\,\sin\varphi z_2 - q_0 \sin\varphi z_4 + q_0\cos\varphi z_6 = 0
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

Анализ показывает, что форма (5.2) знакоопределена при условиях (5.3) лишь для $h \in\ ]-1;\ 0[$. При помощи теоремы 2 сформулируем полученный результат следующим образом.

Теорема 5. Если $h \in]-1; 0[$, то решение (5.1) системы (4.1), (3.2) орбитально устойчиво.

Замечание. Решение (5.1) стационарно относительно $p, r, p^2 - q^2 + \gamma$ и $2pq + \gamma'$, поэтому из теоремы 5 следует результат работы [12] об устойчивости по Ляпунову относительно указанных величин.

Найденное достаточное условие орбитальной устойчивости имеет простой механический смысл: при $h \in]-1; 0[$ угол между вектором силы тяжести и барицентрической осью в процессе маятниковых колебаний остается острым.

6. Случай Бобылева — Стеклова. Приведем нетривиальный пример, в котором полученные при помощи теоремы 2 достаточные условия совпадают с необходимыми. Для этого рассмотрим периодическое решение

$$\begin{gathered} p_0 = \text{const}, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = \varphi^{\cdot} \\ \varphi^{\cdot 2} = 2k\cos\varphi + p_0^{-2}(1 - k^2 - p_0^4) \\ \gamma_0 = k\cos\varphi - p_0^2, \quad \gamma_0' = -k\sin\varphi, \quad \gamma_0'' = -p_0 r_0 \end{gathered} \tag{6.1}$$

уравнений (4.1), (3.2), удовлетворяющее условиям интегрируемости Бобылева — Стеклова [11]. Здесь $p_0 \neq 0$ и $k \geqslant 0$ — параметры. Область допустимых значений p_0 и k имеет вид

$$|k - p_0^2| < 1 \tag{6.2}$$

Теорема 6. Решение (6.1) системы (4.1), (3.2) орбитально устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 \leqslant k < p_0^2, \quad k^2 + 3p_0^4 < 1 \tag{6.3}$$

либо

$$p_0^2 < k < p_0^2 + 1, \quad 1 < k^2 + 3p_0^4 \tag{6.4}$$

Доказательство. Достаточность. В обозначениях п. 2 величины l_1, l_2, l_3 определяются формулами (4.4) при $q_0 = 0$, а

$$l_4 = 2\,\mathrm{col}\,(2p_0^3 + 2p_0\gamma_0, 2p_0\gamma_0', 0, p_0^2 + \gamma_0, 0, \gamma_0')$$

В этом случае квадратичная форма такова:

$$Q = 6p_0^2 z_1^2 + 6p_0^2 z_2^2 + z_4^2 + z_5^2 + 4p_0 z_1 z_4 + 4p_0 z_2 z_5 - (p_0 z_3 + z_6)^2 \tag{6.5}$$

а уравнения многообразия N превратятся в

$$2p_0 z_1 + r_0 z_3 - z_4 = 0, \quad 2\gamma_0 z_1 + 2\gamma_0' z_2 + \gamma_0'' z_3 + 2p_0 z_4 + r_0 z_6 = 0 \tag{6.6}$$

При $k > 0$ положим $\lambda_1 = -p_0^2$, $\lambda_2 = -2p_0$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 1$.
Тогда квадратичная форма Q примет вид

$$(4p_0^2 + 2\gamma_0) z_1^2 + 4\gamma_0' z_1 z_2 - 2\gamma_0 z_2^2 - (p_0 z_3 + z_6)^2 \tag{6.7}$$

а многообразие N будет определяться (6.6) и дополнительными уравнениями

$$\gamma_0 z_4 + \gamma_0' z_5 + \gamma_0'' z_6 = 0, \quad \gamma_0' z_3 + \gamma_0' r_0 z_4 - (p_0^2 + \gamma_0) r_0 z_5 - p_0\gamma_0'' z_6 = 0 \tag{6.8}$$

Вычисления, связанные с исключением из (6.6) и (6.8) зависимых переменных, позволяют исследовать условную знакоопределенность форм (6.5) и (6.7) при помощи критерия Сильвестра. Полученные при этом ограничения на параметры совпадают с дизъюнкцией (6.3) и (6.4). Следовательно, по теореме 2 условия (6.3) и (6.4) достаточные для орбитальной устойчивости решения (6.1).

Необходимость. Следуя [13], обозначим

$$U_0 = p_0^{-2}(3p_0^4 - k^2 + 1), \quad 4K_1 = a^4 - 2U_0 a^2 + 4\sqrt{2}p_0^{-1}(p_0^4 - k^2 + 1)a + 4(k^2 - 1) \tag{6.9}$$

$$H_2 = {}^1/_2\,(U_0 - 3a_0^2),\quad H_3 = {}^1/_2\,(-a_0^4 \pm U_0 a_0^2 - 2)$$

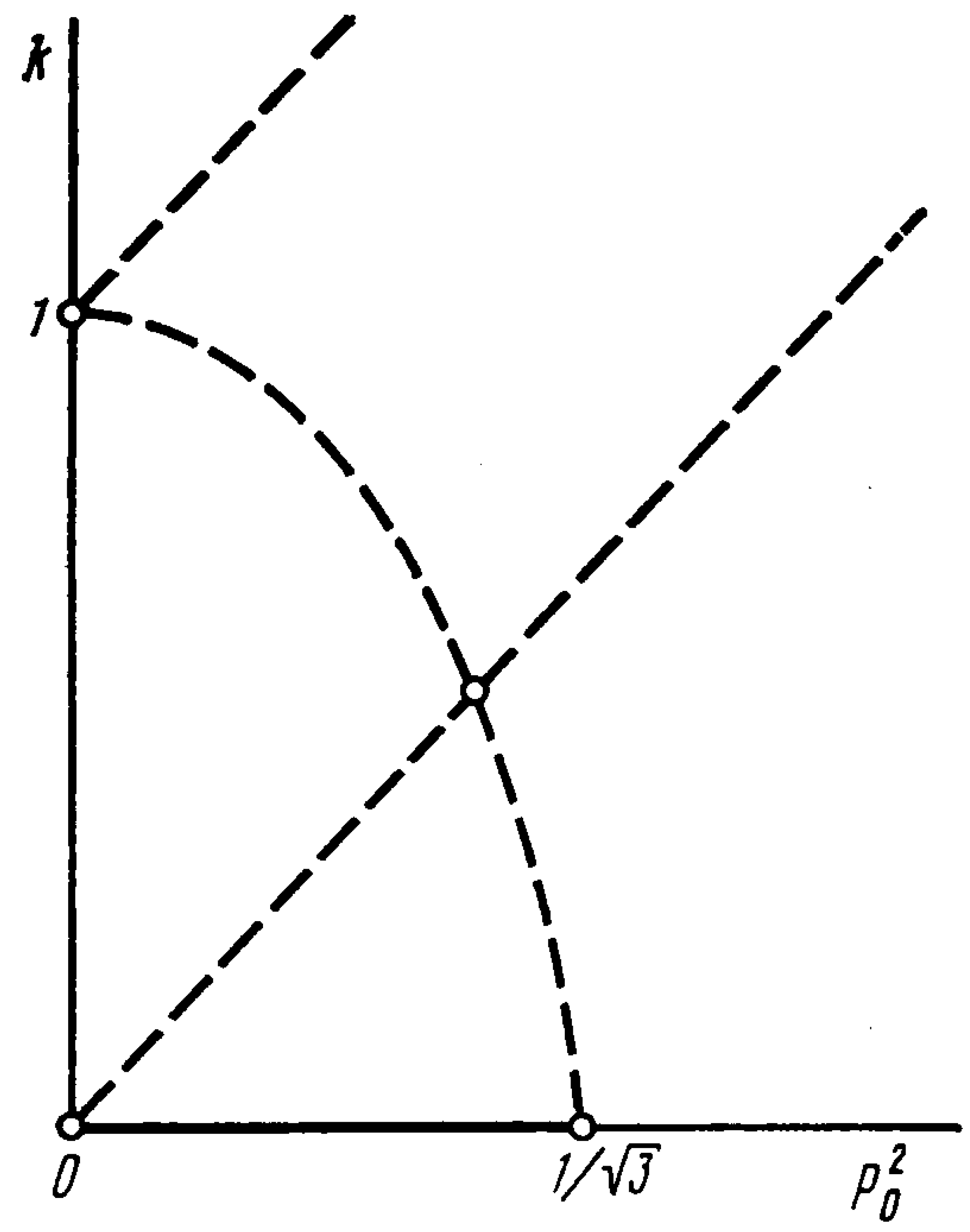
где a_0 — кратный корень многочлена K_1. Соотношение

$$4K_1 = (a - \sqrt{2}p_0)^2\,[a^2 + 2\sqrt{2}p_0 a + 2p_0^{-2}\,(k^2 - 1)]$$

показывает, что $a_0^2 = 2p_0^2$. Подставляя эту величину в (6.9), получим

$$H_2H_3 = {}^1/_2\,p_0^2\,(p_0^4 - k^2)\,(1 - 3p_0^4 - k^2)$$

Известно [13], что при $H_2H_3 \leqslant 0$ существует решение уравнений движения гироскопа Ковалевской, асимптотически стремящееся при $t \to -\infty$ к решению (6.1). Необходимое и достаточное условие выполнения неравенства $H_2H_3 > 0$ в силу (6.2) представляет собой дизъюнкцию (6.3) и (6.4). Следовательно, решение (6.1) орбитально неустойчиво, если ни одно из условий (6.3) и (6.4) не выполняется. Теорема доказана.



Фиг. 1

Условия (6.3) и (6.4) определяют в плоскости параметров k, p_0^2 область необходимых и достаточных условий орбитальной устойчивости периодических решений уравнений движения гироскопа Ковалевской при условиях интегрируемости Бобылева — Стеклова (фигура).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Д.* О некоторых общих методах качественного изучения форм движения в проблемах небесной механики: 3. О конструкции областей сплошной устойчивости и сплошной неустойчивости в смысле Ляпунова // Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга. 1939. Т. 9. Вып. 2. С. 47—81.
2. *Зубов В. И.* Теория колебаний. М.: Высш. шк., 1979. 400 с.
3. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 145—154.
4. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
6. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
7. *Рубановский В. Н., Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904—912.
8. *Шостак Р. Я.* О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. Вып. 2. С. 199—206.
9. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
10. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз. 1960. 487 с.
11. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат. 1953. 287 с.
12. *Иртегов В. Д.* Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С. В. Ковалевской // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1968. Вып. 97. С. 38—40.
13. *Докшевич А. И.* Два класса движений волчка Ковалевской // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 745—749.

Донецк

Поступила в редакцию
2.II.1988