Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 531.36

А. П. Маркеев

О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ С ИДЕАЛЬНОЙ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗЬЮ

Полученная в [1] гамильтонова форма уравнений движения систем с идеальной неудерживающей связью позволяет применять при анализе динамики таких систем известные методы классической и небесной механики. При этом возникают трудности, связанные с неаналитичностью функции Гамильтона. В данной работе указывается один из возможных алгоритмов использования теории КАМ [2] и теории периодических движений Пуанкаре [3] в анализе систем с неаналитическим по одной фазовой переменной гамильтонианом. В качестве примера уточняются некоторые результаты [4] по динамике твердого тела при наличии его соударений с неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью.

1. Изучается движение близкой к интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом вида

$$H = H_0(x_1, x_2, x_3) + \mu H_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, \mu) \quad (0 < \mu \ll 1) \qquad (1.1)$$

Функция (1.1) 2π-периодична по координатам y_i ($i = 1, 2, 3$), аналитична по переменным μ, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, а по y_3 только непрерывна.

При $\mu = 0$ имеем

$$x_i = x_{i0}, \quad y_i = \omega_i t + y_{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (1.2)$$

Здесь нижним нулевым индексом обозначается начальное значение соответствующей переменной, частоты ω_i равны производным $\partial H_0/\partial x_i$, вычисленным при $x_j = x_{j0}$ ($j = 1, 2, 3$).

Пусть невозмущенное движение (1.2) условно-периодическое. При помощи теоремы Колмогорова о сохранении движений [5, 6] можно показать, что при некоторых ограничениях на функцию H_0 и при достаточно малых μ переменные x_i для большинства начальных условий при всех t будут мало (вместе с малостью μ) отличаться от их начальных значений. Ввиду неаналитичности функции (1.1) теорема Колмогорова непосредственно неприменима. Но можно воспользоваться ее вариантом для симплектических отображений [2, 7].

Для этого введем переменные p_i, положив $x_i = x_{i0} + p_i$ ($i = 1, 2, 3$). На изоэнергетическом уровне

$$H = H_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}) + \mu h \quad (h = \text{const},\ h \sim 1) \qquad (1.3)$$

движение можно описать при помощи уравнений Уиттекера [8]. Эти уравнения имеют гамильтонову форму с гамильтонианом K, где $p_3 = -K$ — корень уравнения (1.3). Функция K имеет вид

$$K = K_0(p_1, p_2) + \mu K_1(p_1, p_2, y_1, y_2, y_3, \mu, h) \qquad (1.4)$$

где функция K_0 представима в виде сходящегося при достаточно малых p_1, p_2 ряда

$$K_0 = \omega_3^{-1}(\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2) + {}^1/_2\omega_3^{-3}(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2) + \ldots$$
$$a_{ii} = H_{0,ii}\,\omega_3^2 - 2H_{0,i3}\omega_i\omega_3 + H_{0,33}\omega_i^2 \quad (i = 1, 2) \qquad (1.5)$$

$$a_{12} = H_{0,33}\omega_1\omega_2 + H_{0,12}\omega_3^2 - H_{0,13}\omega_2\omega_3 - H_{0,23}\omega_1\omega_3$$
$$(H_{0,\,ik} = \partial^2 H_0/\partial x_i \partial x_k)$$

Производные в (1.5) вычисляются при $x_i = x_{i0}$. Функция K_1 в (1.4) 2π-периодична по y_i ($i = 1, 2, 3$), аналитична по μ, p_i, y_i ($i = 1, 2$) и непрерывна по y_3.

Пусть p_i', y_i' и p_i'', y_i'' — значения переменных p_i, y_i ($i = 1, 2$) при $y_3 = 0$ и $y_3 = 2\pi$ соответственно. Путем интегрирования уравнений Уиттекера

$$dy_i/dy_3 = \partial K/\partial p_i, \quad dp_i/dy_3 = -\partial K/\partial y_i \quad (i = 1, 2)$$

при помощи рядов по μ получим симплектическое отображение p_i', $y_i' \to$ $\to p_i''$, y_i''. Это отображение задается производящей функцией

$$S\,(p_1'', p_2'', y_1', y_2', \mu, h) = S_0 + \mu S_1$$
$$S_0 = (y_1' + 2\pi\omega_1\omega_3^{-1})\,p_1'' + (y_2' + 2\pi\omega_2\omega_3^{-1})\,p_2'' + S_2^* + S_3^* + \ldots \quad (1.6)$$
$$S_2^* = \pi\omega_3^{-3}\,(a_{11}p_1''^2 + 2a_{12}p_1''p_2'' + a_{22}p_2''^2)$$

(S_0 — функция, аналитическая в окрестности точки $p_1'' = p_2'' = 0$, S_k^* — форма степени k относительно p_1'', p_2'').

Если при $p_1'' = p_2'' = 0$ выполняется условие

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} \partial^2 S_0/\partial p_1''^2 & \partial^2 S_0/\partial p_1''\partial p_2'' \\ \partial^2 S_0/\partial p_1''\partial p_2'' & \partial^2 S_0/\partial p_2''^2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.7)$$

то отображение p_i', $y_i' \to p_i''$, y_i'' называют невырожденным. Пусть условие невырожденности (1.7) выполнено. Тогда [2, 7] у рассматриваемого отображения существуют двумерные инвариантные торы, близкие «тору» $p_1' = p_2' = 0$ невозмущенного (при $\mu = 0$) отображения, причем мера дополнения к их объединению мала вместе с μ. Отсюда и из равенства $p_3 = -K$ следует, что тогда переменные x_1, x_2, x_3 для большинства начальных условий при всех t мало отличаются от их начальных значений.

Несложными вычислениями из (1.5)—(1.7) можно получить, что $\delta =$ $= -4\pi\omega_3^{-8}\Delta$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_{0,11} & H_{0,12} & H_{0,13} & \omega_1 \\ H_{0,12} & H_{0,22} & H_{0,23} & \omega_2 \\ H_{0,13} & H_{0,23} & H_{0,33} & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

т. е. невырожденность отображения p_i', $y_i' \to p_i''$, y_i'' ($i = 1, 2$) эквивалентна изоэнергетической невырожденности функции H_0.

2. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Функция Гамильтона

$$H = H_0\,(x_1, x_2) + \mu H_1\,(x_1, x_2, y_1, y_2, \mu) \quad (0 < \mu \ll 1) \qquad (2.1)$$

2π-периодична по y_1, y_2, аналитична по μ, x_1, x_2, y_1, а по y_2 непрерывна. Полагая $x_i = x_{i0} + p_i$ ($i = 1, 2$) и разрешая уравнение $H = H_0\,(x_{10}, x_{20}) +$ $+ \mu h$ относительно $p_2 = -K$, придем, как и в п. 1, к уравнениям Уиттекера

$$dy_1/dy_2 = \partial K/\partial p_1, \quad dp_1/dy_2 = -\partial K/\partial y_1 \qquad (2.2)$$

где $K = K\,(p_1, y_1, y_2, \mu, h)$ — 2π-периодическая по y_1, y_2 функция, аналитическая относительно μ, p_1, y_1, ее ряд по μ имеет вид

$$K = K_0\,(p_1) + \mu K_1\,(p_1, y_1, y_2, h) + \ldots \qquad (2.3)$$

Здесь $K_0(p_1)$ — корень уравнения $H_0(x_{10}+p_1, x_{20}-K_0) = H_0(x_{10}, x_{20})$

$$K_0 = b_1 p_1 + b_2 p_1^2 + b_3 p_1^3 + \ldots \qquad (2.4)$$

$$b_1 = \omega_1\omega_2^{-1}, \quad b_2 = {}^1/_2\omega_2^{-3}(H_{0,11}\omega_2^2 - 2H_{0,12}\omega_1\omega_2 + H_{0,22}\omega_1^2)$$

$$b_3 = {}^1/_6\omega_2^{-4}(H_{0,111}\omega_2^3 - 3H_{0,112}\omega_1\omega_2^2 + 3H_{0,122}\omega_1^2\omega_2 -$$

$$- H_{0,222}\omega_1^3) + b_2\omega_2^{-2}(H_{0,22}\omega_1 - H_{0,12}\omega_2), \quad \omega_i = \partial H_0/\partial x_i \quad (i = 1, 2)$$

$$H_{0,ijk} = \partial^3 H_0/\partial x_i \partial x_j \partial x_k$$

причем производные вычисляются при $x_i = x_{i0}$.

Функция K_1 имеет вид

$$K_1 = -(\partial H_0/\partial x_2)^{-1}(H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, 0) + h) \qquad (2.5)$$

правая часть этого выражения вычисляется при $x_1 = x_{10} + p_1$, $x_2 = x_{20} - K_0$.

Уравнения (2.2) задают симплектическое отображение $p_1', y_1' \to p_2'', y_2''$

$$y_1'' = y_1' + \gamma(p_1') + \mu f(p_1', y_1', \mu, h)$$

$$p_1'' = p_1' + \mu g(p_1', y_1', \mu, h) \qquad (2.6)$$

где p_1', y_1' и p_1'', y_1'' — значения величин p_1, y_1 при $y_2 = 0$ и $y_2 = 2\pi$ соответственно, функции f и g аналитичны относительно своих аргументов, $\gamma = 2\pi\partial K_0(p_1')/\partial p_1'$.

Отображение (2.6) сохраняет площадь. Если среди коэффициентов b_n ($n = 2, 3, \ldots$) разложения (2.4) есть хотя бы один отличный от нуля, то при достаточно малых μ (2.6) будет закручивающим отображением и к нему применима теорема Мозера об инвариантных кривых [9]. Из этой теоремы и равенства $p_2 = -K$ следует, что при достаточно малых μ для любых начальных условий переменные x_1, x_2 при всех t будут мало отличаться от их начальных значений.

3. Если отношение частот ω_1/ω_2 невозмущенной (при $\mu = 0$) системы с гамильтонианом (2.1) — рациональное число m/n, то ее движение

$$x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, y_1 = \omega_1 t + \lambda, \; y_2 = \omega_2 t \qquad (3.1)$$

является периодическим с периодом $T_0 = 2\pi m\omega_1^{-1} = 2\pi n\omega_2^{-1}$. В (3.1) $\lambda = y_{10}$, а величина y_{20} в силу того, что $\omega_2 \neq 0$, а рассматриваемая система автономна, принята равной нулю, что не ограничивает общности.

Пусть величина μ мала, но отлична от нуля. Вопрос о существовании и устойчивости периодических решений в системе с неаналитическим по y_2 гамильтонианом (2.1) можно решить, использовав изоэнергетическую редукцию уравнений движения исходной системы к уравнениям Уиттекера (2.2). К системе (2.2) применим алгоритм исследования периодических решений Пуанкаре, изложенный в [10]. При помощи этого алгоритма можно установить существование $2\pi n$-периодического по y_2 решения $p_1 = p_1(y_2, \mu)$, $y_1 = y_1(y_2, \mu)$ системы (2.2). Оно будет аналитическим по μ и при $\mu = 0$ переходит в решение

$$p_1 = 0, \quad y_1 = (m/n)\,y_2 + \lambda$$

Функции

$$p_1 = p_1(y_2, \mu), \quad y_1 = y_1(y_2, \mu), \quad p_2 = -K \qquad (3.2)$$

задают замкнутую кривую в пространстве p_1, p_2, y_1, параметром кривой служит величина y_2. Закон движения вдоль этой кривой определяется одним из уравнений исходной системы

$$dy_2/dt = \partial H/\partial x_2$$

Подставив в правую часть этого уравнения функции (3.2), получим

$$dy_2/dt = \omega_2 + \mu F(y_2, \mu, h) \qquad (3.3)$$

где F — $2\pi n$-периодическая по y_2 функция, аналитическая по μ. Уравнение (3.3) определяет зависимость y_2 от времени. Из него следует, что $2\pi n$-периодическому по y_2 решению редуцированной системы отвечает T_μ-периодическое по t решение исходной системы. Период

$$T_\mu = \int_0^{2\pi n} \frac{dy_2}{\omega_2 + \mu F} \qquad (3.4)$$

аналитичен по μ и при $\mu = 0$ принимает значение T_0, равное периоду невозмущенного движения (3.1).

По алгоритму из [10] можно получить также условия устойчивости по Ляпунову периодических решений редуцированной системы. В исходной системе они будут условиями орбитальной устойчивости T_μ-периодического решения.

Сформулируем следующее, полученное при помощи результатов работы [10], утверждение о периодических движениях в системе с гамильтонианом (2.1).

Теорема. Пусть величина μ достаточно мала, а $\langle H_1\rangle$ — среднее значение функции $H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, 0)$ на невозмущенном движении (3.1), т. е.

$$\langle H_1\rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} H_1(x_{10}, x_{20}, \omega_1 t + \lambda, \omega_2 t, 0)\, dt$$

Если выполняются условия: 1) при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$ функция H_0 изоэнергетически невырождена, т. е. коэффициент b_2 в разложении (2.4) отличен от нуля, 2) существует λ_*, такое, что при $\lambda = \lambda_*$ справедливы соотношения

$$\partial\langle H_1\rangle/\partial\lambda = 0, \quad \partial^2\langle H_1\rangle/\partial\lambda^2 \neq 0$$

то у системы с гамильтонианом (2.1) существует T_μ-периодическое решение, которое аналитично по μ и при $\mu = 0$ переходит в T_0-периодическое решение (3.1) невозмущенной системы

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad y_1 = \omega_1 t + \lambda_*, \quad y_2 = \omega_2 t$$

При выполнении неравенства

$$b_2\partial^2\langle H_1\rangle/\partial\lambda^2 \,|_{\lambda=\lambda_*} > 0$$

это периодическое движение неустойчиво, а при одновременном выполнении неравенств

$$b_2\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\lambda^2}\bigg|_{\lambda=\lambda_*} < 0, \quad 5\left(\frac{\partial^3\langle H_1\rangle}{\partial\lambda^3}\right)^2 - 3\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial\lambda^4}\bigg|_{\lambda=\lambda_*} \neq 0$$

орбитально устойчиво.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о движении твердого тела при наличии его соударений с неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. Эта задача исследовалась в [4], но ввиду неаналитичности по W функции (7.2) работы [4] примененная в [4] процедура получения качественных выводов о движении тела требует уточнения. Будем считать, что поверхность тела задается аналитической функцией и мало (вместе с малым параметром μ) отличается от сферы радиуса R, центр которой находится в центре тяжести тела. Центральный эллипсоид инерции произволен.

Проекция I_3 кинетического момента тела на вертикаль является интегралом, отнесем ее к параметрам задачи. В обозначениях работы [4] гамильтониан можно записать в виде

$$H = H_0 (I_1, I_2, I) + \mu H_1 (I_1, I_2, I, W_1, W_2, W) + \ldots \qquad (4.1)$$

$$H_0 = H_0^{(1)} (I_1, I_2) + (9m\pi^2 g^2 I^2/32)^{1/3} \qquad (4.2)$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — гамильтониан в задаче о движении тела в случае Эйлера — Пуансо; I_2 — величина кинетического момента, m — масса тела, g — ускорение свободного падения. Величина I связана с высотой h подскока тела над плоскостью в невозмущенном (при $\mu = 0$) движении при помощи равенства

$$I = {}^4/_3\pi^{-1} m\, (2gh^3)^{1/2}$$

В невозмущенном движении $I_i = I_{i0}$ $(i = 1, 2)$, $I = I_0$. Считаем, что $I_0 \neq 0$ (т. е. в невозмущенном движении высота подскока тела над плоскостью не равна нулю), а движение тела относительно центра масс условно-периодическое. Гамильтониан (4.1) 2π-периодичен по W_1, W_2, W и в достаточной близости от невозмущенного движения аналитичен по I_1, I_2, I, W_1, W_2; по переменной W функция (4.1) непрерывна, но неаналитична.

Проверим условие изоэнергетической невырожденности функции H_0. Вычислив определитель (1.8), найдем, что

$$\Delta = -\delta_1 \partial\omega/\partial I - \delta_2\omega^2 \qquad (4.3)$$

$$\omega = \frac{2}{3}\left(\frac{9m\pi^2 g^2}{32I}\right)^{1/3} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{g}{2h}\right)^{1/2}, \quad \delta_1 = \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_1^2}\omega_2^2 - 2\frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_1 \partial I_2}\omega_1\omega_2 + \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_2^2}\omega_1^2,$$

$$\delta_2 = \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_1^2}\frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_2^2} - \left(\frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_1 \partial I_2}\right)^2 \qquad (4.4)$$

Опираясь на вычисления из гл. 2 книги [11], можно показать, что $\delta_1 = 2H_0^{(1)}\delta_2$. Используя еще выражение для величины ω из (4.4), получаем, что

$$\Delta = \omega^2\delta_2 (H_0^{(1)}/(mgh) - 1) \qquad (4.5)$$

В [11] показано, что $\delta_2 \neq 0$. Поэтому Δ может обратиться в нуль только, когда $mgh = H_0^{(1)}$, т. е. $\Delta \not\equiv 0$, и условие изоэнергетической невырожденности H_0 выполнено. Следовательно, согласно п. 1, при достаточно малых μ для большинства начальных условий величины I_1, I_2, I в возмущенном движении тела при всех t близки к их начальным значениям.

Пусть теперь тело динамически и геометрически симметрично. Тогда проекция кинетического момента тела на ось симметрии будет интегралом, ее можно отнести к параметрам задачи и исследование движения тела сводится [4] к рассмотрению системы с двумя степенями свободы, причем

$$H = H_0 + \mu H_1 (I_2, I, W_2, W) + \ldots$$
$$H_0 = {}^1/_2 I_2^2/A + (9m\pi^2 g^2/32)^{1/3} I^{2/3} \quad (A = {}^2/_5 mR^2) \qquad (4.6)$$

К системе с гамильтонианом (4.6) можно применить алгоритм из п. 2. Для величины b_2 из (2.4) получаем выражение

$$b_2 = \frac{1}{2A\omega}\left(1 - \frac{I_2^2}{2Amgh}\right)$$

Величина b_2 обращается в нуль только тогда, когда $mgh = {}^1/_2 I_2^2/A$. Но если $b_2 = 0$, то

$$b_3 = -\frac{I_2^3}{6A^3\omega^4}\frac{\partial^3 H_0}{\partial I^3} = -\frac{2I_2^3}{27A^3\omega^3 I^2} \neq 0$$

Следовательно, согласно п. 2, при достаточно малых μ для любых начальных условий величины I_2, I в возмущенном движении тела при всех t близки к их начальным значениям.

В [4] рассмотрен вопрос о периодических движениях однородного эллипсоида вращения, мало отличающегося от шара, при наличии соударений с неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. В соответствии с п. 3 эту часть работы [4] следует дополнить условием, что $mgh \neq {}^1/_2 I_2^2/A$ и что период — аналитическая функция μ, принимающая при $\mu = 0$ значение $\varkappa = 2\pi\omega^{-1} = 2\pi A I_2^{-1} k$ $(k = 1, 2 \ldots)$. Условия же существования и устойчивости периодических движений остаются без изменений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.
2. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. Т. 3. 1985. 304 с.
3. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. С. 8—326.
4. *Маркеев А. П.* О движении твердого тела с идеальной неудерживающей связью // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 707—716.
5. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527—530.
6. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 5. С. 13—40.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
9. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168 с.
10. *Маркеев А. П., Чуркина Н. И.* О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы // Письма в Астрон. журн. 1985. Т. 11. № 8. С. 634—639.
11. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.X.1988