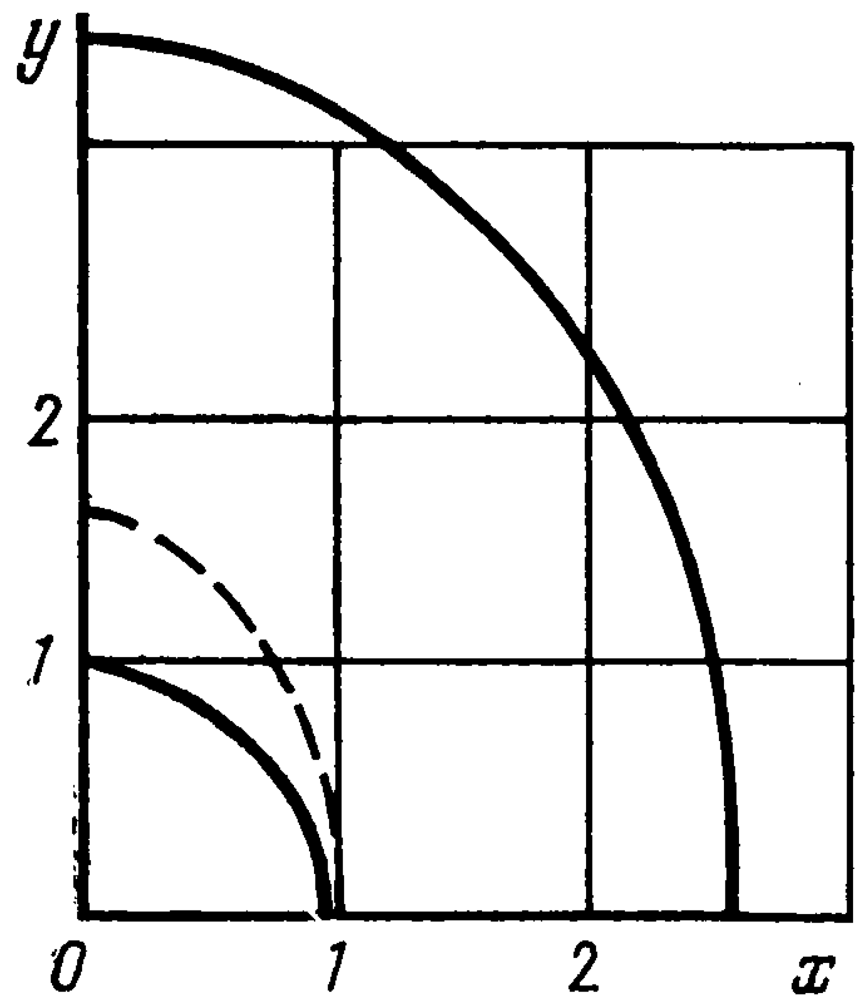
Проведем параметрическое исследование решений (8) и (14). Решение имеет смысл, когда $|\omega(t)| \geqslant 1$, $|t| = 1$ и функция $\omega'(\eta)$ не имеет нулей при $|\eta| \geqslant 1$. В «непрерывном» случае эти условия накладывают следующие ограничения на область изменения параметров:



$$c(1 - B_0/k + B_2c^2/k) \geqslant 1, \quad (1 - B_0/k - 3B_2c^2/k) > 0$$

$$c = \exp((4A_0 - 2p + 2k)/(4k)) \tag{20}$$

В «разрывной» задаче соответствующие ограничения имеют вид

$$c_3(1 - 2b^2 + b^4) \geqslant 1, \quad |b| < 1/\sqrt{3}, \quad b^4 = -B_2c_3^2/(9k) \tag{21}$$

Последнее соотношение (21) показывает, что должно выполняться условие $B_2 \leqslant 0$. В частности, если $B_2 = 0$, а следовательно, и $b = 0$, то из условия (19) следует, что и $B_0 = 0$. Сравнивая решения (8) и (14), убеждаемся, что лишь в одномерной задаче ($B_0 = B_2 = 0$) упругопластические границы подобны — это окружности различных радиусов.

Следует отметить, что упругопластическая задача в непрерывном случае может быть также решена методом функциональных уравнений [4], использованным для решения задачи в разрывной постановке.

На фигуре показаны положения упругопластической границы в непрерывном (штриховая линия) и разрывном (сплошная) случае при $A_0 = 0{,}632$, $B_0 = -0{,}23$, $B_2 = -0{,}05$, $k = 1$, $p = 0{,}2$. При этом вначале задавали B_2 и $c_3 = 3$. Затем из условия (18) определяли A_0, а далее из (19) и B_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С. А., Михлин С. Г., Девидсон Б. Б.* Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с.
2. *Ивлев Д. Д.* Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 716—718.
3. *Галин Л. А.* Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984. 232 с.
4. *Анин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.

Кишинев

Поступила в редакцию
11.V.1988

УДК 539.375

Е. И. Шифрин

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ О ТРЕЩИНАХ

Получены изопериметрические оценки решений краевых задач для одного класса псевдодифференциальных уравнений. Этот класс уравнений включает в себя уравнения задач о плоских трещинах нормального разрыва, расположенных в однородном линейно упругом пространстве и неоднородном пространстве, модуль Юнга которого зависит степенным образом от расстояния до плоскости трещины. Применительно к задачам о трещинах установленные неравенства дают, в частности, изопериметрические оценки максимального раскрытия трещины и ее объема при произвольных нагрузках.

1. Прежде чем переходить к формулировке и доказательству полученных результатов напомним основные определения и теоремы, используемые ниже.

Функции $f(\mathrm{x})$ и $g(\mathrm{x})$ называются равноизмеримыми, если $\forall a, b$, $\mu\{\mathrm{x}: a < f(\mathrm{x}) < b\} = \mu\{\mathrm{x}: a < g(\mathrm{x}) < b\}$. Здесь $\mu\{\ldots\}$ — мера соответствующего множества.

Говорят, что функции $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ имеют одинаковое направление роста, если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$, $(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y}))(g(\mathbf{x})-g(\mathbf{y}))\geqslant 0$.

Пусть функция $f(\mathbf{x})\geqslant 0$. Скажем, что функция $f_*(\mathbf{x})$ получена из $f(\mathbf{x})$ путем симметризации Шварца, если $f_*(\mathbf{x})$ равноизмерима с $f(\mathbf{x})$, сферически-симметрична и не возрастает с ростом радиуса.

Пусть $f(\mathbf{x})\geqslant 0$, $g(\mathbf{x})\geqslant 0$. Предположим. что $f_+(\mathbf{x})$ равноизмерима с $f(\mathbf{x})$, а $g_+(\mathbf{x})$ — с $g(\mathbf{x})$, причем функции $f_+(\mathbf{x})$ и $g_+(\mathbf{x})$ имеют одинаковое направление роста, тогда справедливо неравенство [1]

$$\int f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant\int f_+(\mathbf{x})\,g_+(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

Пусть $f(\mathbf{x})\geqslant 0$, $g(\mathbf{x})\geqslant 0$, $h(\mathbf{x})\geqslant 0$, тогда [2, 3]

$$\int f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,h(\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}\leqslant\int f_*(\mathbf{x})\,g_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,h_*(\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} \tag{1.2}$$

Основные методы построения изопериметрических неравенств для решений дифференциальных уравнений были разработаны в [1]. В частности, доказана [1] следующая оценка.

Пусть $u_G(\mathbf{x})$ — решение уравнения

$$-\Delta u(\mathbf{x})=1,\quad \mathbf{x}\in G,\quad G\subset R^n,\quad u|_{\partial G}=0 \tag{1.3}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_G u_G(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant\int\limits_K u_K(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.4}$$

где K — шар, объем которого равен объему области G.

Очевидным образом эта оценка обобщается на случай произвольной правой части в уравнении Пуассона.

Пусть $u_G(f,\mathbf{x})$ — решение уравнения

$$-\Delta u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\quad f(\mathbf{x})\geqslant 0.\quad \mathbf{x}\in G,\quad u|_{\partial G}=0 \tag{1.5}$$

Обозначим

$$W_G(f)=\int\limits_G u_G(f,\mathbf{x})\,f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Имеет место оценка

$$W_G(f)\leqslant W_K(f_*) \tag{1.6}$$

Затем оценки (1.4), (1.6) обобщались на другие классы уравнений. В [4] доказана справедливость (1.4), (1.6) для решений псевдодифференциальных уравнений вида

$$p_G\Lambda^\alpha u(\mathbf{x})+t^2u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\quad f(\mathbf{x})\geqslant 0 \tag{1.7}$$
$$\mathbf{x}\in G,\quad u(\mathbf{x})\in \overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(G),\quad 0<\alpha<2$$

Здесь Λ^α — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|^\alpha$, p_G — сужение на область G.

В [5] неравенство (1.4) обобщено на дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами при старших производных. Для решений уравнений (1.3), (1.5) доказаны более сильные неравенства, чем (1.4), (1.6) [6, 7]

$$(u_G)_*(f,\mathbf{x})\leqslant u_K(f_*,\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

Для уравнений, содержащих младшие члены

$$-\Delta u(\mathbf{x})+t^2u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\quad f(\mathbf{x})\geqslant 0,\quad \mathbf{x}\in G,\quad u|_{\partial G}=0$$

доказано несколько менее сильное неравенство [7]

$$\int\limits_{K_r}(u_G)_*(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant\int\limits_{K_r}u_K(f_*,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.9}$$

(K_r — шар с центром в начале координат радиуса r, $r\leqslant r(K)$, $r(K)$ — радиус шара K).

Из (1.9), в частности, следуют также неравенства

$$\max_{\mathbf{x}} u_G(f,\mathbf{x})\leqslant\max_{\mathbf{x}} u_K(f_*,\mathbf{x}) \tag{1.10}$$

$$\int\limits_G u_G(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant\int\limits_K u_K(f_*,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.11}$$

Ниже неравенства (1.9)—(1.11) доказаны для решений уравнения (1.7). Для простоты в дальнейшем будем полагать $t = 0$. Случай $t > 0$ рассматривается без каких-либо изменений.

2. Будем теперь обозначать $u_G(f, \mathbf{x})$ — решение уравнения

$$p_G \Lambda^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

$$u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(G), \quad 0 < \alpha < 2$$

Как известно [4]. $u_G(f, \mathbf{x})$ доставляет минимум функционалу

$$I(G, f, u) = (\Lambda^\alpha u, u)/(f, u)^2, \quad u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(G) \tag{2.2}$$

причем $I(G, f, u_G(f, \mathbf{x})) = W_G^{-1}(f)$.

Сперва иным способом докажем неравенства, полученные ранее [4], и установим свойства решений.

Лемма 1. Пусть $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(G)$ и $u(\mathbf{x}) \geqslant 0$, тогда имеет место неравенство

$$(\Lambda^\alpha u, u) \geqslant (\Lambda^\alpha u_*, u_*) \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно [8]

$$(\Lambda^\alpha u, u) = C_\alpha \int \frac{|u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{y}|^{n+\alpha}} d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} =$$

$$= C_\alpha \int \frac{|u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|^{n+\alpha}} d\mathbf{x}\, d\mathbf{z}, \quad C_\alpha = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

Обозначим $K_m(s)$ — функцию, определенную в области $0 \leqslant s < \infty$

$$K_m(s) = \begin{cases} 1/s^{n+\alpha}, & s \geqslant 1/m \\ m^{n+\alpha}, & s < 1/m \end{cases}$$

Имеем

$$(\Lambda^\alpha u, u) = C_\alpha \lim_{m\to\infty} \int K_m(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)\, |u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\, d\mathbf{z} = \lim_{m\to\infty} J_m(u)$$

$$J_m(u) = C_\alpha \left[\int u^2(\mathbf{z}) K_m(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{z} + \int u^2(\mathbf{x}) K_m(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{z} - 2S_m(u, u)\right] =$$

$$= C_m \int u^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - 2C_\alpha S_m(u, u), \quad S_m(u, v) = \int u(\mathbf{z})\, v(\mathbf{x}) K_m(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)\, d\mathbf{z}\, d\mathbf{x}$$

В выражениях для $J_m(u)$ и $J_m(u_*)$ первые члены совпадают, поскольку симметризация Шварца сохраняет L_2 — норму функции. Неравенство $S_m(u, u) \leqslant S_m(u_*, u_*)$ справедливо в силу указанного выше неравенства (1.2). Отсюда получим $J_m(u) \geqslant J_m(u_*)$ и, переходя к пределу при $m \to \infty$, утверждаем лемму (2.3). Неравенство (2.3) было доказано [4] при помощи теории интерполяционных пространств.

Из утверждения леммы 1 и (2.2) следует оценка (1.6). Действительно

$$W_G^{-1}(f) = \frac{(\Lambda^\alpha u_G(f, \mathbf{x}), u_G(f, \mathbf{x}))}{(f, u_G(f, \mathbf{x}))} \geqslant \frac{(\Lambda^\alpha (u_G)_*(f, \mathbf{x}), (u_G)_*(f, \mathbf{x}))}{(f_*, (u_G)_*(f, \mathbf{x}))} \geqslant W_K^{-1}(f_*) \tag{2.5}$$

В (2.5) было использовано, что в силу [9] если $f \geqslant 0$, то $u_G(f, \mathbf{x}) \geqslant 0$ и находимся в условиях леммы 1. Кроме того, функции $f_*(\mathbf{x})$ и $(u_G)_*(f, \mathbf{x})$ имеют одинаковое направление роста и в силу (1.1)

$$\int f(\mathbf{x})\, u_G(f, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int f_*(\mathbf{x}) (u_G)_*(f, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Заметим, что из доказательства (2.5) следует, что функция $u_K(f_*, \mathbf{x})$ инвариантна относительно симметризации Шварца, поскольку в противном случае можно было бы к $u_K(f_*, \mathbf{x})$ применить симметризацию Шварца, уменьшив значение функционала (2.2).

3. Перейдем к доказательству неравенств (1.9)—(1.11) для решений уравнений (2.1).

Лемма 2. Пусть $u(\mathbf{x}),\ v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(G)$, тогда

$$(\Lambda^\alpha u, v) = C_\alpha \int \frac{(u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}))\overline{(v(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - v(\mathbf{x}))}}{|y|^{n+\alpha}} d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} =$$

$$= C_\alpha \int \frac{(u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{x}))\overline{(v(\mathbf{z}) - v(\mathbf{x}))}}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|^{n+\alpha}} dz\, d\mathbf{x} \tag{3.1}$$

Доказательство соотношения (3.1) проводится полностью аналогично тому, как выводится в [8] выражение для $(\Lambda^\alpha u, u)$.

Обозначим

$$u^\vee(\xi) = \int u(\mathbf{x})\, e^{i(\mathbf{x},\,\xi)}\, d\mathbf{x}$$

Из соотношения

$$u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int u^\vee(\xi)\,(e^{-i(\mathbf{y},\,\xi)} - 1)\, e^{-i(\mathbf{x},\,\xi)}\, d\xi$$

аналогичного равенства для $v(\mathbf{x})$ и равенства Парсеваля следует

$$\int \frac{(u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}))\overline{(v(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - v(\mathbf{x}))}}{|\mathbf{y}|^{n+\alpha}}\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{u^\vee(\xi)\overline{v^\vee(\xi)}\,|e^{-i(\mathbf{y},\,\xi)} - 1|^2}{|\mathbf{y}|^{n+\alpha}}\, d\xi\, dy \tag{3.2}$$

Согласно [8]

$$\int \frac{|e^{-i(\mathbf{y},\,\xi)} - 1|^2}{|\mathbf{y}|^{n+\alpha}}\, d\mathbf{y} = C_\alpha'\, |\xi|^\alpha \tag{3.3}$$

Из (3.2), (3.3) следует (3.1). Лемма 2 доказана.

Центральное место в доказательстве неравенств (1.9)—(1.11) занимает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $u(\mathbf{x}) \geqslant 0$, $v(\mathbf{x}) \geqslant 0 \in \overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(G)$ — вещественнозначные функции, которые имеют одинаковое направление роста, тогда справедливо неравенство

$$(\Lambda^\alpha u, v) \geqslant (\Lambda^\alpha u_*, v_*) \tag{3.4}$$

Доказательство. Обозначим

$$R_m(u, v) = C_\alpha \int K_m(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)\,(u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{x}))\,(v(\mathbf{z}) - v(\mathbf{x}))\, d\mathbf{z}\, d\mathbf{x}$$

где K_m — ядро, введенное выше, тогда

$$(\Lambda^\alpha u, v) = \lim_{m\to\infty} R_m(u, v)$$

Согласно (3.1)

$$R_m(u, v) = 2C_\alpha \int u(\mathbf{z})\, v(\mathbf{z})\, K_m(|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{z} - 2C_\alpha S_m(u, v)$$

Проинтегрировав первое слагаемое по $\mathbf{x}$, получим

$$R_m(u, v) = C_m \int u(\mathbf{z})\, v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} - 2C_\alpha S_m(u, v)$$

Аналогичное равенство имеем при замене u, v на u_*, v_*.

Поскольку функции $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ имеют одинаковое направление роста по условию, а функции $u_*(\mathbf{x})$, $v_*(\mathbf{x})$ равноизмеримы с ними и имеют одинакове направление роста по построению, то $\int u(\mathbf{z})\, v(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \int u_*(\mathbf{z})\, v_*(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}$. Кроме того, $S_m(u, v) \leqslant \leqslant S_m(u_*, v_*)$ в силу (1.2). Следовательно, $R_m(u, v) \geqslant R_m(u_*, v_*)$. Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, приходим к (3.4). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для решений уравнения (2.1) справедливо неравенство

$$(\Lambda^\alpha (u_G)_*(f, \mathbf{x}), v_*(\mathbf{x})) \leqslant (\Lambda^\alpha u_K(f_*, \mathbf{x}), v_*(\mathbf{x})) \tag{3.5}$$

Здесь $v_*(\mathbf{x})$ — произвольная неотрицательная, инвариантная относительно симметризации Шварца функция из пространства $\overset{\circ}{H}_{\alpha/2}(K)$.

Доказательство. Пусть функция $v(\mathbf{x})$ равноизмерима с $v_*(\mathbf{x})$ и имеет одинаковое направление роста с функцией $u_G(f, \mathbf{x})$, тогда, согласно (3.4)

$$(\Lambda^\alpha u_G(f, \mathbf{x}), v(\mathbf{x})) \geqslant (\Lambda^\alpha (u_G)_*(f, \mathbf{x}), v_*(\mathbf{x})) \tag{3.6}$$

С другой стороны

$$(\Lambda^\alpha u_G(f, \mathbf{x}), v(\mathbf{x})) = (f(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})) \leqslant (f_*(\mathbf{x}), v_*(\mathbf{x})) = (\Lambda^\alpha u_K(f_*, \mathbf{x}), v_*(\mathbf{x})) \tag{3.7}$$

Вывод неравенства (3.7) опирался на то, что функции $f(\mathbf{x})$ и $f_*(\mathbf{x})$, а также $v(\mathbf{x})$ и $v_*(\mathbf{x})$ равноизмеримы, причем $f_*(\mathbf{x})$ и $v_*(\mathbf{x})$ имеют одинаковое направление роста. Из (3.6), (3.7) следует (3.5). Теорема 2 доказана.

В качестве следствия теоремы 2 получим неравенства (1.9)—(1.11) для решений уравнения (2.1).

Докажем справедливость (1.9). Рассмотрим функцию $v_*(\mathrm{x})$, являющуюся решением уравнения (2.1) в шаре K с правой частью $g_*(\mathrm{x})$, равной единице в шаре K_r, лежащем в K, и нулю вне K_r. Поскольку такая функция $g_*(\mathrm{x})$ инвариантна относительно симметризации Шварца, таким же свойством, как указывалось выше, обладает и $v_*(\mathrm{x})$. Поэтому, согласно (3.5)

$$(\Lambda^\alpha (u_G)_* (f, \mathrm{x}), v_*(\mathrm{x})) = ((u_G)_* (f, \mathrm{x}), \Lambda^\alpha v_*(\mathrm{x})) = \int\limits_{K_r} (u_G)_* (f, \mathrm{x})\, d\mathrm{x} \leqslant$$

$$\leqslant (\Lambda^\alpha u_K (f_*, \mathrm{x}), v_*(\mathrm{x})) = \int\limits_{K_r} u_K (f_*, \mathrm{x})\, d\mathrm{x}$$

Неравенство (1.9), а следовательно, также неравенства (1.10), (1.11) доказаны.

Уравнения (2.1) при $n = 2$ отвечают задачам о трещинах в однородном линейно упругом пространстве ($\alpha = 1$) и в неоднородном пространстве, модуль Юнга которого степенным образом зависит от расстояния до плоскости трещины ($E = E_\alpha |x_3|^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, считается, что трещина расположена в плоскости $x_3 = 0$). Уравнение (1.7) отвечает задаче о трещине, между поверхностями которой имеются линейные связи. Правая часть уравнений $f(\mathrm{x})$ отвечает прикладываемым усилиям, решение — раскрытию трещины. Таким образом, неравенства (1.9)—(1.11) дают оценки максимального раскрытия и объема трещины в указанных задачах через аналогичные характеристики задачи о круговой трещине с нагрузками, получаемыми при помощи симметризации Шварца из исходной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
2. *Brascamp H. J., Lieb E. H., Luttinger J. M.* A general rearrangement inequality for multiple integrals // J. funct. analysis. 1974. V. 17. № 2. P. 227—237.
3. *Lieb E. H.* Existence and uniqueness of the minimizing solution of Shoquard's nonlinear equation // Stud. Appl. Math. 1977. V. 57. № 2. P. 93—105.
4. *Шифрин Е. И.* Оценки решения задачи о плоской трещине нормального разрыва в материале со степенным упрочнением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 4. С. 31—43.
5. *Брудный С. Р., Шифрин Е. И.* Об одном способе симметризации функций и его применении к некоторым задачам теории упругости неоднородных тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 486—492.
6. *Talenti G.* Elliptic equations and rearrangements // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3. 1976. V. 30. № 4. P. 697—718.
7. *Lions P. L.* Quelques remarques sur la symetrisation de Schwartz // Nonlinear partial differential equations and their applications: Res. Notes in math. 53. College de France seminar. Boston et all.: Pitman, 1980. V. 1. P. 308—319.
8. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука. 1973. 232 с.
9. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Теоремы сравнения для некоторого класса псевдодифференциальных уравнений и их приложения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 5. С. 1113—1116.

Москва

Поступила в редакцию 5.XII.1988