

Таким образом, при учете равенств (3.1), (3.4), (3.5) после перехода к пределу при $\xi \rightarrow y$ в (1.5) получим

$$\int_L T_{ij}(x_1, x_3) \Psi_j^{(m)}(y_1 - x_1, y_3 - x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x = \frac{1}{2} \chi_m(y_1, y_3) + \\ + \text{v. p.} \int_L T_{ij}^{(m)}(y_1 - x_1, y_3 - x_3) \chi_j(x_1, x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x, \quad (y_1, y_3) \in L, \quad m = 1, 2, 3$$

Итак, плоская задача об установившихся колебаниях электроупругой среды сведена к системе трех сингулярных интегральных уравнений. Отметим, что для систем такого типа достаточно эффективны хорошо разработанные методы граничных элементов [4], что позволяет проводить расчет механических и электрических полей для широкого класса задач линейной электроупругости.

Авторы благодарят И. И. Воровича за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
2. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Врубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
6.XII.1988.

УДК 539.374

© 1989

Ф. М. Эрлихман

ДВЕ ПОСТАНОВКИ ОДНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Сравниваются решения двух упругопластических задач, когда на упругопластической границе все компоненты тензора напряжений непрерывны и когда тангенциальная компонента терпит разрыв.

Рассмотрим бесконечное тело с круговым отверстием единичного радиуса, нагруженное постоянным усилием $\sigma_r = -p$, $\tau_{r\theta} = 0$. Пусть на бесконечности напряжения определяются потенциалами Колосова — Мухелишвили (A_0, B_0, B_2 — действительные числа)

$$\Phi(z) = A_0, \quad \Psi(z) = B_0 + B_2 z^2$$

Предположим, что в возникшей вокруг отверстия пластической зоне выполняется условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

На неизвестной упругопластической границе Γ , вообще говоря, возможен разрыв тангенциальной компоненты тензора напряжений. Последнее обстоятельство вытекает, с одной стороны, из нелинейности условия [1], а также из разрыва коэффициента Пуассона при переходе через упругопластическую границу [2].

В случае непрерывности всех компонент тензора напряжений на упругопластической границе решим задачу методом, изложенным в [3]. Пусть φ_1 и φ_2 — «пластическая» и «упругая» функции Эри. Введем функцию $\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1$. Из определения функции φ_3 следует [3]

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = f(z), \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = B_0 + B_2 z^2 - 2k \exp(-2i\theta), \quad z \rightarrow \infty$$

$$f(z) = 4A_0 - 4k \ln z - 2k + 2p, \quad \theta = \arg z$$

Введем по аналогии с [3] три аналитические функции: $\Phi_3(\eta)$ и $\Psi(\eta)$

$$\omega(\eta) = c\eta + c_2/\eta + c_2/\eta^2 + \dots \quad (1)$$

Для определения этих функций получаем следующую краевую задачу:

$$4 \operatorname{Re} \Phi_3(\eta) = \begin{cases} 0, & |\eta| = 1 \\ f(|c\eta|), & |\eta| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

$$2[(\overline{\omega(\eta)})/(\omega'(\eta))\Phi_3'(\eta) + \Psi_3(\eta)] = \begin{cases} 0, & |\eta| = 1 \\ 2B_0 + 2B_2(c^2\eta^2 + cc_1) - 2k \exp(-2i\theta_1), & |\eta| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3)$$

$$(\theta_1 = \arg \eta)$$

Решая задачу Дирихле (2), получим

$$\Phi_3(\eta) = -k \ln \eta \quad (4)$$

Из условия на бесконечности следует, что $f(c) = 0$. При $\eta \rightarrow \infty$ вследствие того что $\omega(\eta) = c\eta$ [3], находим

$$2(\overline{\omega(\eta)})/(\omega'(\eta))\Phi_3'(\eta) = -2k \exp(-2i\theta_1) \quad (5)$$

Сопоставляя равенства (5) и (3), заключаем, что

$$\Psi_3(\eta) = B_0 + B_2(c^2\eta^2 + cc_1) + \Omega(\eta) \quad (6)$$

где $\Omega(\eta)$ — регулярная вне окружности $|\eta| = 1$ функция.

Подставив выражение (4) в (3), получаем

$$\omega'(\eta)\Psi_3(\eta) = k\overline{\omega(\eta)}/\eta$$

Подставляя в это равенство выражения (1) и (5), находим

$$(c - c_1/\eta^2 - 2c_2/\eta^3 - \dots)(B_2c^2\eta^2 + (B_2cc_1 + B_0) + \Omega(\eta)) = k(c/\eta^2 + c_1 + c_2\eta + \dots), \quad c_i = \bar{c}_i \quad (7)$$

Перемножим выражения в скобках и приравняем коэффициенты при положительных степенях η в правой и левой частях. При этом выражения в обеих частях равенства (7) будут различаться на функцию, регулярную вне $|\eta| = 1$, что, очевидно, допустимо [3]. В результате выводим систему уравнений для определения коэффициентов в равенстве (1) и заключаем, что отображающая функция имеет вид

$$z = \omega(\eta) = c\eta + c_1/\eta + c_3/\eta^3, \quad c_1 = B_0c/k, \quad c_3 = B_2c^3/k \quad (8)$$

Допустим теперь, что тангенциальная компонента тензора напряжений на Γ терпит разрыв:

$$\sigma_t^p - \sigma_t^e = 4\sqrt{k^2 - \tau_n^2} \quad (9)$$

где σ_t^p , σ_t^e — тангенциальные напряжения со стороны пластической и упругой зоны соответственно (заметим, что если рассмотреть одномерную задачу $B_0 = B_2 = 0$, то пластическая зона больше в разрывном случае). В плоскости комплексного переменного z условия на неизвестной границе примут вид

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = \sigma_n^p + \sigma_t^p - 4\sqrt{k^2 - \tau_n^2} \quad (10)$$

$$2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = (\sigma_y^e - \sigma_x^e + 2i\tau_{xy}^e) = (\sigma_t^e - \sigma_n + 2i\tau_n^e) \exp(-2i\gamma)$$

где γ — угол между нормалью к Γ и осью x , $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — потенциалы Колосова — Мусхелишвили. Во второй формуле (10) можно исключить величину σ_t^e с помощью равенства (9). Напряжения в пластической зоне известны:

$$\sigma_r^p = 2k \ln r - p, \quad \sigma_\theta^p = 2k \ln r - p + 2k, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (11)$$

На неизвестной границе Γ

$$\tau_n = 1/2(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\beta = -k \sin 2\beta \quad (12)$$

где β — угол между нормалью к Γ и радиус-вектором к Γ .

Подставляя в (10) соотношения (11) и (12) и учитывая, что $\beta - \gamma = -\alpha$, где α — угол между осью x и радиус-вектором к Γ , находим

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = 4k \ln r - 2p + 2k - 4k \cos 2\beta$$

$$2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = 2k\bar{z}/z - 4k \cos 2\beta \exp(-2i\gamma)$$

Перейдем на параметрическую плоскость переменного η с помощью преобразования (1). Тогда получим следующую краевую задачу для определения трех аналитиче-

ских функций:

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \Phi(\omega(\eta)), \quad \psi(\eta) = \Psi(\omega(\eta)) \text{ и } \omega(\eta): \\ 2[\varphi(\eta) + \overline{\varphi(\eta)}] &= \begin{cases} H(\omega(\eta), \overline{\omega(\eta)}), & |\eta| = 1 \\ 4A_0, & |\eta| \rightarrow \infty \end{cases} \\ 2\left[\frac{\overline{\omega(\eta)}}{\omega'(\eta)}\varphi'(\eta) + \psi(\eta)\right] &= \begin{cases} F(\omega(\eta), \overline{\omega(\eta)}), & |\eta| = 1 \\ 2B_2c^2\eta^2, & |\eta| \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\omega, \bar{\omega}) &= 2k \ln(\omega\bar{\omega}) - 2p + 2k - 2k((a(\eta))/\overline{(a(\eta))} + \overline{(a(\eta))}/(a(\eta))) \\ F(\omega, \bar{\omega}) &= -2k((\overline{\omega'(\eta)})^2 \omega(\eta) \bar{\eta}^2)/((\omega'(\eta))^2 \overline{\omega(\eta)} \eta^2) \\ a(\eta) &= (\omega'(\eta)\eta)/(\omega(\eta)) \end{aligned}$$

Рассмотрим функциональное уравнение

$$2[(\overline{\omega(\eta)}/\omega'(\eta))\varphi'(\eta) + \psi(\eta)] = F(\omega(\eta), \bar{\omega}(1/\eta)) \quad (13)$$

Для того чтобы правая часть этого функционального уравнения была аналитической функцией вне единичного круга, необходимо и достаточно [4] потребовать попарного совпадения нулей функций $\overline{\omega(\eta)}$ и $\overline{\omega'(\eta)}$.

Будем искать отображающую функцию в виде

$$\omega(\eta) = (\eta^2 - b^2)^n c_{2n-1} / \eta^{2n-1}$$

Подставляя это выражение в (13) и раскладывая все функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, можно заметить, что $n = 2$. Следовательно, отображающая функция имеет вид

$$\omega(\eta) = c_3/\eta - 2b^2c_3/\eta + b^4c_3/\eta^3 \quad (14)$$

и в силу симметрии задачи b и c_3 — действительные числа. (Для того чтобы упругая область повсюду граничила с пластической, нужно, чтобы круг единичного радиуса, являющийся контуром отверстия, лежал внутри эллипса; это приводит к условию $c_3(1 - 2b^2 + b^4) \geq 1$). Подставляя конкретный вид отображающей функции (14) в правую часть функционального уравнения (13), находим

$$F(\omega, \bar{\omega}) = -2k(1 + 3b^2\eta^2)^2 \eta^2/(\eta^2 + 3b^2)^2, \quad |b| < 1/\sqrt{3}$$

Так как в $F(\omega, \bar{\omega})$ переменная η входит везде в четной степени, то

$$F = -18kb^4\eta^2 + \alpha_0 + \alpha_{-2}/\eta^2 + \dots \quad (15)$$

Левая часть уравнения (13) раскладывается в виде

$$2B_2c_3^2\eta^2 + 2\gamma_0 + \gamma_{-2}/\eta^2 + \dots \quad (16)$$

(используется симметрия задачи). Приравнивая коэффициенты при η^2 в (15) и (16), получим

$$-18kb^4 = 2B_2c_3^2$$

Далее можно рассуждать следующим образом. По теореме о среднем для гармонической функции $\operatorname{Re} \varphi(\eta)$ имеем]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\omega, \bar{\omega}) d\theta = 4A_0 \quad (17)$$

Пусть известны постоянные B_0 , B_2 и c_3 , такие, что постоянная b , найденная из (17), удовлетворяет условию $|b| < 1/\sqrt{3}$. В этом случае соотношение (18) может быть использовано для определения A_0 . Сравнивая свободные члены в (13), получим соотношение, связывающее A_0 , B_0 и B_2 , которое можно рассматривать как условие разрешимости задачи при заданных B_0 , B_2 и c_3 :

$$2\gamma_0 = \alpha_0 \quad (18)$$

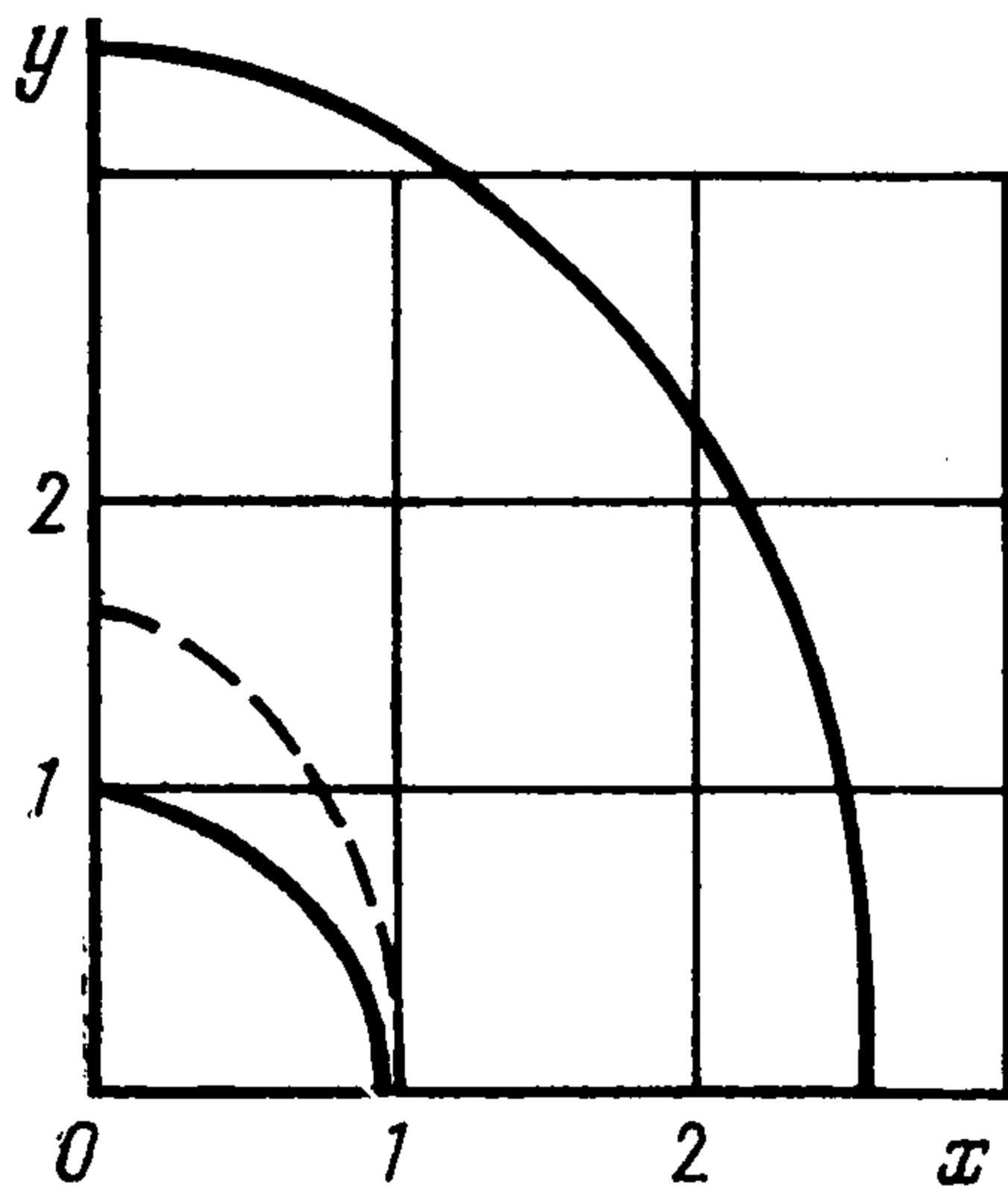
Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= b^4a_3' + (B_0 - 4B_2b^2c_3^2), \quad \alpha_0 = -12kb^2 \\ a_3' &= -2a_2, \quad a_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} H(\omega(\tau), \overline{\omega(\tau)}) \tau d\tau \end{aligned}$$

Из равенства (19) вытекает, что

$$B_0 = 3B_2b^2c_3^2 + 2b^4a_2 - 6kb^2 \quad (19)$$

Проведем параметрическое исследование решений (8) и (14). Решение имеет смысл, когда $|\omega(t)| \geq 1$, $|t| = 1$ и функция $\omega'(\eta)$ не имеет нулей при $|\eta| \geq 1$. В «непрерывном» случае эти условия накладывают следующие ограничения на область изменения параметров:



$$c(1 - B_0/k + B_2c^2/k) \geq 1, \quad (1 - B_0/k - 3B_2c^2/k) > 0$$

$$c = \exp((4A_0 - 2p + 2k)/(4k)) \quad (20)$$

В «разрывной» задаче соответствующие ограничения имеют вид

$$c_3(1 - 2b^2 + b^4) \geq 1, \quad |b| < 1/\sqrt{3}, \quad b^4 = -B_2c_3^2/(9k) \quad (21)$$

Последнее соотношение (21) показывает, что должно выполняться условие $B_2 \leq 0$. В частности, если $B_2 = 0$, а следовательно, и $b = 0$, то из условия (19) следует, что и $B_0 = 0$. Сравнивая решения (8) и (14), убеждаемся, что лишь в одномерной задаче ($B_0 = B_2 = 0$) упругопластические границы подобны — это окружности различных радиусов.

Следует отметить, что упругопластическая задача в непрерывном случае может быть также решена методом функциональных уравнений [4], использованным для решения задачи в разрывной постановке.

На фигуре показаны положения упругопластической границы в непрерывном (штриховая линия) и разрывном (сплошная) случае при $A_0 = 0,632$, $B_0 = -0,23$, $B_2 = -0,05$, $k = 1$, $p = 0,2$. При этом вначале задавали B_2 и $c_3 = 3$. Затем из условия (18) определяли A_0 , а далее из (19) и B_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А., Михлин С. Г., Дэвидсон Б. Б. Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с.
2. Ивлев Д. Д. Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 716—718.
3. Галин Л. А. Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984. 232 с.
4. Анин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.

Жишнев

Поступила в редакцию
11.V.1988

УДК 539.375

© 1989

Е. И. Шифрин

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ О ТРЕЩИНАХ

Получены изопериметрические оценки решений краевых задач для одного класса псевдодифференциальных уравнений. Этот класс уравнений включает в себя уравнения задач о плоских трещинах нормального разрыва, расположенных в однородном линейно упругом пространстве и неоднородном пространстве, модуль Юнга которого зависит степенным образом от расстояния до плоскости трещины. Применительно к задачам о трещинах установленные неравенства дают, в частности, изопериметрические оценки максимального раскрытия трещины и ее объема при произвольных нагрузках.

1. Прежде чем переходить к формулировке и доказательству полученных результатов напомним основные определения и теоремы, используемые ниже.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются равноизмеримыми, если $\forall a, b, \mu \{x: a < f(x) < b\} = \mu \{x: a < g(x) < b\}$. Здесь $\mu \{ \dots \}$ — мера соответствующего множества.