

где η^- — величина скачка радиального смещения свободной поверхности жидкости на фронте ударной волны.

Произведем некоторые оценки, полагая $r_0 = 10^{-1}$ м, $h = 10^{-2}$ м, $\eta^- = 10^{-3}$ м. Для воды при комнатной температуре $\nu = 1,05 \cdot 10^{-6}$ м²/с, что дает $v_{\text{qmin}} \approx 10,5$ м/с. Для жидкостей с меньшей вязкостью процесс формирования центробежных солитонов облегчается. Например, для ацетона ($\nu = 4,26 \cdot 10^{-7}$ м²/с) $v_{\text{qmin}} \approx 4,2$ м/с.

Полученные результаты показывают, что режим возбуждения центробежных солитонов в поступательно-вращательном потоке вполне осуществим для реальных жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браже Р. А. Центробежные солитоны в поступательно-вращательном потоке жидкости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 516—519.
2. Новиков И. И. Прикладная магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат. 1969. 360 с.
3. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука. 1979. 384 с.
4. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Усредненное описание волн в уравнении Кортевега — де Вриза — Бюргера // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 3. С. 871—880.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: 1977. 662 с.
6. Кудряшов Н. А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465—470.
7. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука. 1973. 176 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию
11.1.1989

УДК 539.3 : 534.1

© 1989

А. О. Ватульян, В. Л. Кубликов

О ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Изучается класс плоских задач электроупругости об установившихся колебаниях тел с гладкой границей. На основе построенного фундаментального решения и его анализа формулируется система граничных интегральных уравнений относительно компонент вектора перемещений и потенциала.

1. Пусть тело занимает двумерную связную область Ω в плоскости x_1x_3 , ограниченную гладким замкнутым контуром L . Пусть $L = L^1 \cup L^2$ ($L^1 \cap L^2 = \emptyset$), где часть границы L^1 электродирована, а другая часть L^2 неэлектродирована.

Для вывода основной системы интегральных уравнений применим обобщение теоремы взаимности Бетти на случай электроупругой среды [1], считая режим колебаний установившимся по закону $\exp(-i\omega t)$. В соответствии с теоремой рассмотрим два состояния среды $u_i^{(n)}$, $u_3^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)}$, $D_k^{(n)}$, $n = 1, 2$.

Эти состояния описываются системой уравнений электроупругости (здесь в отличие от [1] рассмотрим неоднородное уравнение для электрического поля)

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + X_i^{(n)} + \rho\omega^2 u_i^{(n)} = 0, \quad i = 1, 3; \quad D_{k,k}^{(n)} + f^{(n)} = 0; \quad n = 1, 2 \quad (1.1)$$

где f — плотность электрического заряда, D_k — компоненты вектора электрической индукции. С учетом определяющих соотношений $\sigma_{ij}^{(n)} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n)} - e_{kij} E_k^{(n)}$, $n = 1, 2$ из первых двух уравнений (1.1) имеем [1]

$$\int_{\Omega} (X_i^{(1)} u_i^{(2)} - X_i^{(2)} u_i^{(1)}) d\Omega + \int_L (p_i^{(1)} u_i^{(2)} - p_i^{(2)} u_i^{(1)}) dL = e_{kij} \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}^{(1)} E_k^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} E_k^{(1)}) d\Omega \quad (1.2)$$

Аналогично из последнего уравнения (1.1), используя соотношения

$$D_k^{(n)} = e_{kij} \varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{kj} E_j^{(n)}, \quad n = 1, 2$$

и считая электрическое поле потенциальным: $E_k = -\varphi_{,k}$, получаем

$$-\int_L (D_k^{(1)}\varphi^{(2)} - D_k^{(2)}\varphi^{(1)}) n_k dL - \int_{\Omega} (f^{(1)}\varphi^{(2)} - f^{(2)}\varphi^{(1)}) d\Omega = e_{kij} \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}^{(1)} E_k^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} E_k^{(1)}) d\Omega \quad (1.3)$$

Сравнивая соотношения (1.2) и (1.3), имеем

$$\int_{\Omega} F_i^{(1)} \chi_i^{(2)} d\Omega + \int_L T_{ij}^{(1)} \chi_j^{(2)} n_i dL = \int_{\Omega} F_i^{(2)} \chi_i^{(1)} d\Omega + \int_L T_{ij}^{(2)} \chi_j^{(1)} n_i dL \quad (1.4)$$

$$\{u_1, \varphi, u_3\} = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}, \quad \{X_1, f, X_3\} = \{F_1, F_2, F_3\}$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij}, \quad T_{i2} = D_i, \quad i, j = 1, 3$$

Считая в (1.4) первым состоянием искомое распределение смещений и потенциала при $F_i^{(1)} = 0$, $\chi_j^{(1)} = \chi_j$, $T_{ij}^{(1)} = T_{ij}$, в качестве второго (известного) выберем состояние, соответствующее сосредоточенной обобщенной нагрузке в точке $x = \xi$, где $x = (x_1, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_3)$: $F_i^{(2)} = \delta_{im} \delta(x, \xi)$ (δ_{im} — символ Кронекера, $\delta(x, \xi)$ — двумерная дельта-функция). Этой обобщенной нагрузке соответствует фундаментальное решение $\Psi_j^{(m)}$ системы (1.1). Таким образом, из (1.4) получим

$$\int_L T_{ij}(x_1, x_3) \Psi_j^{(m)}(\xi_1 - x_1, \xi_3 - x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x =$$

$$= \chi_m(\xi_1, \xi_3) + \int_L A^{(m)}(\xi_1, \xi_3, x_1, x_3) dL_x, \quad \xi \in \Omega \quad (1.5)$$

$$A^{(m)}(\xi_1, \xi_3, x_1, x_3) = T_{ij}^{(m)}(\xi_1 - x_1, \xi_3 - x_3) \chi_j(x_1, x_3) n_i(x_1, x_3).$$

Соотношение (1.5) позволяет находить перемещение и потенциал χ_j внутри тела, если они известны на его границе.

2. Построим фундаментальное решение системы (1.1) уравнений электроупругости в одном из практически важных случаев, когда материал среды — пьезокерамика, поляризованная в направлении оси x_3 .

Решая систему (1.1) в этом случае [2] при помощи двумерного интегрального преобразования Фурье, имеем

$$\Psi_k^{(m)}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} P_k^{(m)}(\alpha_1, \alpha_3, k) \exp[i(\alpha_1 t_1 + \alpha_3 t_2)] d\alpha_1 d\alpha_3 \quad (2.1)$$

$$P_k^{(m)}(\alpha_1, \alpha_3, k) = \frac{P_{km}(\alpha_1, \alpha_3, k)}{p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)}, \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}$$

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3, k) = \begin{vmatrix} c_{11}\alpha_1^2 + c_{44}\alpha_3^2 - c_{33}k^2 & (e_{15} + e_{31})\alpha_1\alpha_3 & (c_{13} + c_{44})\alpha_1\alpha_3 \\ (e_{15} + e_{31})\alpha_1\alpha_3 & -\partial_{11}\alpha_1^2 - \partial_{33}\alpha_3^2 & e_{15}\alpha_1^2 + e_{33}\alpha_3^2 \\ (c_{13} + c_{44})\alpha_1\alpha_3 & e_{15}\alpha_1^2 + e_{33}\alpha_3^2 & c_{44}\alpha_1^2 + c_{33}\alpha_3^2 - c_{33}k^2 \end{vmatrix}$$

Здесь Γ — поверхность, совпадающая всюду с плоскостью R^2 , за исключением множества вещественных нулей полинома $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)$, которые она огибает в соответствии с принципом предельного поглощения [3], $p_{km}(\alpha_1, \alpha_3, k)$ получается из $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)$ заменой k -го столбца на столбец $(\delta_{1m}, \delta_{2m}, \delta_{3m})$.

Исследуем структуру множества нулей $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)$. Переходя к безразмерным координатам $\alpha_1 = k\beta \cos \psi$, $\alpha_3 = k\beta \sin \psi$ и учитывая однородность полинома $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)$, получим

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3, k) = k^6 p_0(\beta \cos \psi, \beta \sin \psi, 1) = k^6 F_{01} \beta^2 [\beta^2 - R_1^2][\beta^2 - R_2^2] =$$

$$= \beta^2 (F_{01} \beta^4 + F_{02} \beta^2 + F_{03})$$

$$p_{km}(\alpha_1, \alpha_3, k) = k^4 p_{km}(\beta \cos \psi, \beta \sin \psi, 1) = F_{k1}^{(m)} \beta^4 + F_{k2}^{(m)} \beta^2 + F_{k3}^{(m)}$$

$$F_{01} = p_0(\cos \psi, \sin \psi, 0), \quad F_{k1}^{(m)} = p_{km}(\cos \psi, \sin \psi, 0)$$

$$F_{02} = -c_{33} \left(\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \right), \quad F_{03} = c_{33}^2 f_{22}$$

$$F_{12}^{(m)} = -c_{33} \begin{vmatrix} \delta_{1m} & f_{12} \\ \delta_{2m} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad F_{22}^{(m)} = -c_{33} \left(\begin{vmatrix} f_{11} & \delta_{1m} \\ f_{12} & \delta_{2m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{2m} & g_{12} \\ \delta_{3m} & g_{22} \end{vmatrix} \right)$$

$$F_{32}^{(m)} = -c_{33} \begin{vmatrix} g_{11} & \delta_{2m} \\ g_{12} & \delta_{3m} \end{vmatrix}, \quad F_{k3}^{(m)} = c_{33}^2 \delta_{2k} \delta_{2m}; \quad k = 1, 2, 3$$

$$f_{11} = c_{11} \cos^2 \psi + c_{44} \sin^2 \psi, \quad f_{12} = (e_{15} + e_{31}) \sin \psi \cos \psi$$

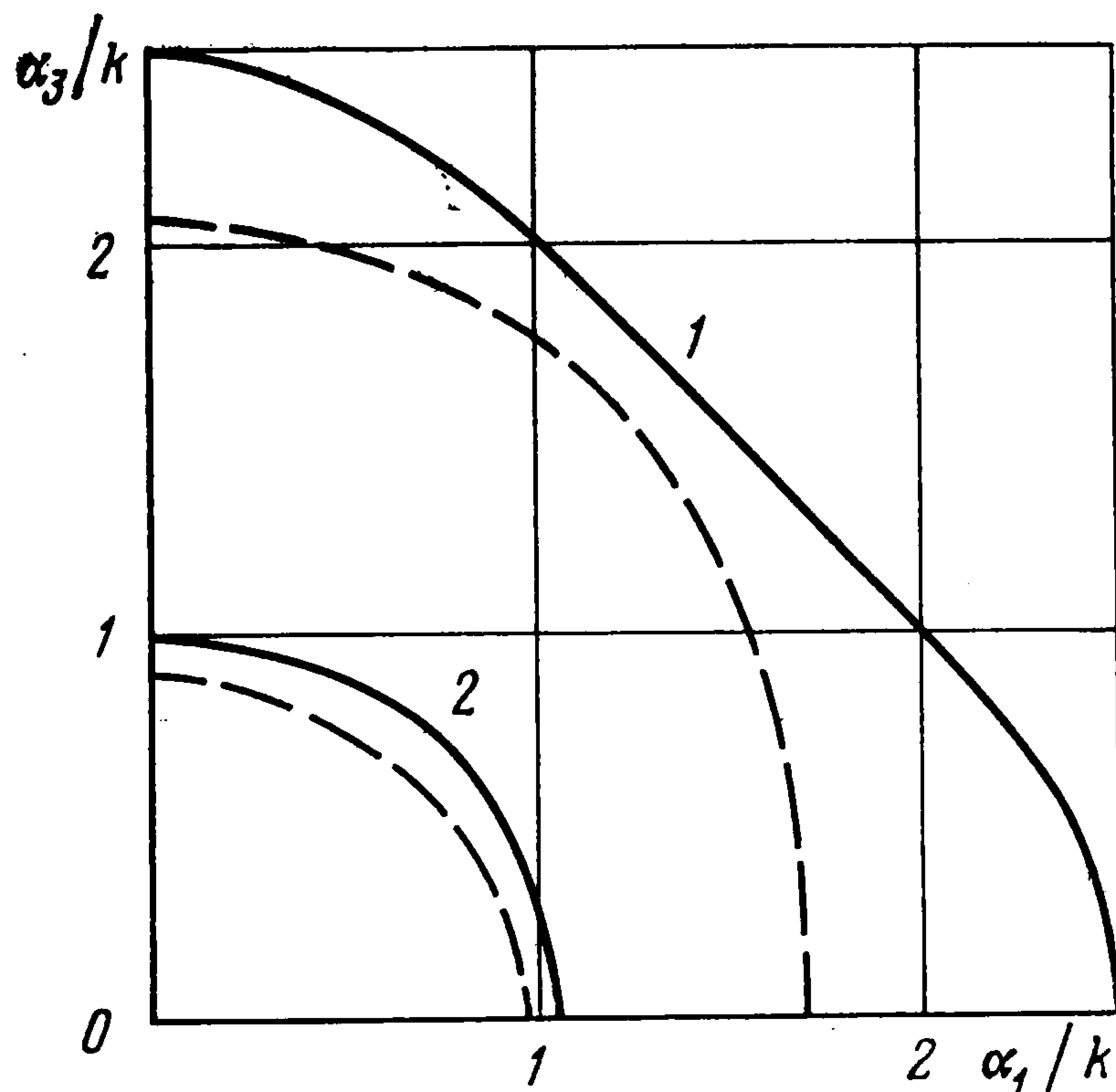
$$f_{22} = g_{11} = -(\varepsilon_{11} \cos^2 \psi + \varepsilon_{33} \sin^2 \psi), \quad g_{12} = e_{15} \cos^2 \psi + e_{33} \sin^2 \psi$$

$$g_{22} = c_{44} \cos^2 \psi + c_{33} \sin^2 \psi; \quad R_{1,2}^2 = -(2F_{01})^{-1} [F_{02} \pm (F_{02}^2 - 4F_{01}F_{03})^{1/2}]$$

причем $F_{01}(\psi) \neq 0$ для всех $\psi \in [0, 2\pi]$. Отметим, что

$$R_k(\psi + \pi) = R_k(\psi) = R_k(-\psi), \quad k = 1, 2$$

Графики функций $R_1(\psi)$ и $R_2(\psi)$ для CdS (сплошные линии) и керамики ЦТС-19 (штриховые линии) представлены на фигуре для $\psi \in [0, \pi/2]$ (кривые 1 и 2 соответственно). Таким образом, поверхность Γ в (2.1) может быть представлена в виде $\Gamma = \sigma_+(\psi) \times [0, 2\pi]$, где контур $\sigma_+(\psi)$ выходит из начала координат и совпадает с вещественной положительной полуосью, отклоняясь от нее в вещественных полюсах $R_k(\psi)$ ($k = 1, 2$) в нижнюю полуплоскость.



Далее преобразуем (2.1) к виду

$$\Psi_k^{(m)}(r \cos \eta, r \sin \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_+(\psi)} P_k^{(m)}(\beta \cos \psi, \beta \sin \psi, 1) \exp[ikr \cos(\psi - \eta)] \beta d\beta d\psi \quad (2.2)$$

$$r = [(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_3 - x_3)^2]^{1/2}, \quad \cos \eta = (\xi_1 - x_1)/r, \quad \sin \eta = (\xi_3 - x_3)/r$$

Используя разложения

$$P_k^{(m)}(\beta \cos \psi, \beta \sin \psi, 1) = \frac{H_{k0}^{(m)}}{\beta^2} + \frac{H_{k1}^{(m)}}{\beta^2 - R_1^2} + \frac{H_{k2}^{(m)}}{\beta^2 - R_2^2}$$

$$H_{kl}^{(m)}(\psi) = \frac{F_{k1}^{(m)} R_l^4 + F_{k2}^{(m)} R_l^2 + F_{k3}^{(m)}}{F_{01} R_l^2 [R_1^2 - R_2^2]}$$

$$H_{k0}^{(m)}(\psi) = \frac{F_{k3}^{(m)}}{F_{01} R_1^2 R_2^2}; \quad k = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2$$

преобразуем равенство (2.2) к виду, содержащему только однократные интегралы, что важно для приложений

$$\Psi_k^{(m)}(r \cos \eta, r \sin \eta) = \frac{1}{2\pi^2} J_k + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \sum_{j=1}^2 H_{kj}^{(m)}(\psi) \{ \pi i \exp[iz_j(r, \psi, \eta)] - 2S_j(r, \psi, \eta) \} d\psi, \quad k = 1, 2, 3; \quad J_1 = J_3 = 0,$$

$$z_j(r, \psi, \eta) = krR_j(\psi) |\cos(\psi - \eta)|$$

$$S_j(r, \psi, \eta) = \cos z_j \operatorname{ci} z_j + \sin z_j \operatorname{si} z_j; \quad \operatorname{si}(t) = - \int_t^\infty \frac{\sin t}{t} dt; \quad \operatorname{ci}(t) = - \int_t^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

При вычислении $\Psi_2^{(m)}$ необходимо осуществить регуляризацию интеграла J_2 , используя понятие конечного значения по Адамару [5]

$$J_2 = \int_0^\pi \int_1^\infty H_{20}(\psi) \cos[kr \cos(\psi - \eta)] \frac{d\beta}{\beta} d\psi + \\ + \int_0^\pi \int_0^1 H_{20}(\psi) \{\cos[kr\beta \cos(\psi - \eta)] - 1\} \frac{d\beta}{\beta} d\psi = \\ = \int_0^\pi H_{20}(\psi) [C + \ln |kr \cos(\psi - \eta)|] d\psi.$$

где C — постоянная Эйлера.

Итак, формула (2.3) определяет фундаментальное решение $\Psi_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, 3$) системы уравнений (1.1).

3. Выведем основную систему граничных интегральных уравнений. Для этого необходимо в (1.5) осуществить предельный переход при $\xi \rightarrow y \in L$. Применяя известную процедуру [4], имеем (L_ε — дуга окружности радиуса ε с центром в y)

$$\lim_{\xi \rightarrow y} \int_L A^{(m)}(\xi_1, \xi_3, x_1, x_3) dL_x = \chi_j(y_1, y_3) C_j^{(m)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L-L_\varepsilon} A^{(m)}(y_1, y_3, x_1, x_3) dL_x. \quad (3.1)$$

$$C_j^{(m)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_\varepsilon} T_{ij}^{(m)}(y_1 - x_1, y_3 - x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x$$

Рассмотрим предел первого интеграла в правой части (3.1), полагая в представлении (2.2) $\beta = v/\varepsilon$ и переходя к локальной системе координат $x_1 = y_1 + \varepsilon \cos \theta$, $x_3 = y_3 + \varepsilon \sin \theta$

$$C_j^{(m)} = -\frac{ik}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{k=1,2} c_{ijkl} \int_0^{2\pi} N_l(\eta) I_{ik}^{(m)}(\varepsilon, \eta) d\eta + \right. \\ \left. + e_{lij} \int_0^{2\pi} N_l(\eta) I_{i2}^{(m)}(\varepsilon, \eta) d\eta \right], \quad j = 1, 3 \quad (3.2)$$

Для $j = 2$ получим аналогичное выражение, заменяя в (3.2) c_{ijkl} на e_{ikl} и e_{lij} на e_{il} . Здесь

$$N_l(\theta) = \begin{cases} \cos \theta, & l = 1, \\ \sin \theta, & l = 3, \end{cases}, \quad I_{ik}^{(m)}(\varepsilon, \eta) = \\ = \int_0^\pi \int_{\sigma_+} P_k^{(m)}(v \cos \eta, v \sin \eta, \varepsilon^2) v^2 \exp[-ikv \cos(\eta - \theta)] N_i(\theta) dv d\theta$$

Вычислим предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{ik}^{(m)}(\varepsilon, \eta) = P_k^{(m)}(\cos \eta, \sin \eta, 0) \int_0^\pi \int_0^\infty N_i(\theta) \exp[-ikv \cos(\eta - \theta)] dv d\theta = \\ = -\frac{\pi i}{k} P_k^{(m)}(\cos \eta, \sin \eta, 0) \left[N_i(\eta) + \frac{4i}{\pi} \sum_{t=1}^\infty (-1)^t \frac{t}{4t^2 - 1} N_i\left(\frac{\pi}{2} - 2t\eta\right) \right] \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.3) в (3.2) и производя необходимые преобразования, находим, что

$$C_j^{(m)} = -1/2 \delta_{jm} \quad (3.4)$$

Предел второго интеграла в правой части (3.1) есть главное значение по Коши. Отметим попутно, что аналогично вычисляется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_\varepsilon} T_{ij}(x_1, x_3) \Psi_j^{(m)}(y_1 - x_1, y_3 - x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x = 0 \quad (3.5)$$

Таким образом, при учете равенство (3.1), (3.4), (3.5) после перехода к пределу при $\xi \rightarrow y$ в (1.5) получим

$$\int_L T_{ij}(x_1, x_3) \Psi_j^{(m)}(y_1 - x_1, y_3 - x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x = \frac{1}{2} \chi_m(y_1, y_3) + \\ + \text{v. p.} \int_L T_{ij}^{(m)}(y_1 - x_1, y_3 - x_3) \chi_j(x_1, x_3) n_i(x_1, x_3) dL_x, \quad (y_1, y_3) \in L, \quad m = 1, 2, 3$$

Итак, плоская задача об установившихся колебаниях электроупругой среды сведена к системе трех сингулярных интегральных уравнений. Отметим, что для систем такого типа достаточно эффективны хорошо разработанные методы граничных элементов [4], что позволяет проводить расчет механических и электрических полей для широкого класса задач линейной электроупругости.

Авторы благодарят И. И. Воровича за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
2. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Врубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
6.XII.1988.

УДК 539.374

© 1989

Ф. М. Эрлихман

ДВЕ ПОСТАНОВКИ ОДНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Сравниваются решения двух упругопластических задач, когда на упругопластической границе все компоненты тензора напряжений непрерывны и когда тангенциальная компонента терпит разрыв.

Рассмотрим бесконечное тело с круговым отверстием единичного радиуса, нагруженное постоянным усилием $\sigma_r = -p$, $\tau_{r\theta} = 0$. Пусть на бесконечности напряжения определяются потенциалами Колосова — Мусхелишвили (A_0, B_0, B_2 — действительные числа)

$$\Phi(z) = A_0, \quad \Psi(z) = B_0 + B_2 z^2$$

Предположим, что в возникшей вокруг отверстия пластической зоне выполняется условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

На неизвестной упругопластической границе Γ , вообще говоря, возможен разрыв тангенциальной компоненты тензора напряжений. Последнее обстоятельство вытекает, с одной стороны, из нелинейности условия [1], а также из разрыва коэффициента Пуассона при переходе через упругопластическую границу [2].

В случае непрерывности всех компонент тензора напряжений на упругопластической границе решим задачу методом, изложенным в [3]. Пусть φ_1 и φ_2 — «пластическая» и «упругая» функции Эри. Введем функцию $\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1$. Из определения функции φ_3 следует [3]

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = f(z), \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = B_0 + B_2 z^2 - 2k \exp(-2i\theta), \quad z \rightarrow \infty$$

$$f(z) = 4A_0 - 4k \ln z - 2k + 2p, \quad \theta = \arg z$$