Доказательство с помощью функции $V = c_1 | x_1 | + \ldots + c_n | x_n |$ проводится на основании условий (2) по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Действительно, справедливы соотношения

$$V \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i | x_i | \triangleq a (\| \mathbf{y} \|), \quad D^+V = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign} x_k \Big[\sum_{r=1}^{n} a_{kr} x_r \Big] \leqslant \sum_{i=1}^{m} l_i | x_i | \triangleq -b (\| \mathbf{y} \|)$$

(D^+ — верхнее производное число Дини [2], $b(r)$ — функция того же класса, что и $a(r)$ и, следовательно [2], движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически у-устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Серия математики, механики, химии, физики, астрономии, 1957. № 4. С 9—16.
2. *Озиранер А. С.*, *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364—384.
3. *Воротников В. И.*, *Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 268—271.
4. *Кривошеев Ю. А.*, *Луценко А. В.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем с постоянной и почти постоянной матрицей // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 203—210.
5. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.

Китай

Поступила в редакцию
22.IX.1987

УДК 532.5:534

Р. А. Браже

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СОЛИТОНОВ В ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Учитывается вязкость среды при выводе эволюционного уравнения, описывающего распространение нелинейных центробежных волн по свободной поверхности поступательно-вращательного потока жидкости. Для полученного при этом уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза (БКдВ) записывается стационарное решение в виде ударной волны с солитонными осцилляциями вблизи фронта. Оценивается влияние вязкости на структуру волнового фронта и условия формирования предсказанных ранее автором [1] центробежных солитонов, играющих важную роль в ряде атмосферных процессов [1].

1. Вывод эволюционного уравнения. Задача о распространении центробежных волн по свободной поверхности поступательно-вращательного потока идеальной несжимаемой жидкости сводится [1] к решению уравнения Лапласа для угловой компоненты векторного потенциала поля скоростей с нелинейными граничными условиями. При наличии вязкости кинематическое граничное условие остается без изменения:

$$v_{r1} = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial z} v_{z1} \right) \tag{1.1}$$

а динамическое условие получается из осевой проекции уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и имеет вид

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z1} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r_0} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость среды, а смысл остальных обозначений сохранен прежним.

---

[1] *Браже Р. А.* Вихревые и солитонные явления в атмосферном электричестве. Ульяновск, 1988. 26 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.04.88, № 2949 — В88.

Используя описанную в [1] процедуру метода возмущений, из (1.1), (1.2) можно получить уравнение БКдВ для радиального возмущения свободной поверхности потока в переменных $\xi = z + c_0 t$, $\tau = -t$:

$$\eta_\tau + {}^3/_2 c_0 h^{-1}\eta\eta_\xi + {}^1/_2 c_0 h^2 \eta_{\xi\xi\xi} + \nu\eta_{\xi\xi} = 0 \tag{1.3}$$

При этом сделано допущение о слабой диссипации:

$$\nu/(c_0 l) \ll 1 \quad (c_0 = r_0^{-1} v_\varphi \sqrt{(R^2 - r_0^2)/2} = v_\varphi \sqrt{h/r_0}) \tag{1.4}$$

где c_0 — скорость распространения линейной центробежной волны [2] по свободной поверхности закрученного потока толщиной $h = R - r_0 \ll r_0$, а l — длина возмущенной части потока.

В отсутствие вязкости (1.3) переходит в уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ), односолитонное решение которого в переменных z, t имеет вид [2]

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \frac{z + Vt}{L}, \quad L = 2\sqrt{\frac{h^3}{\eta_0}}, \quad V = c_0\left(1 + \frac{\eta_0}{2h}\right)$$

Поделив уравнение (1.3) на ${}^1/_2 c_0 h^2$, приведем его к каноническому виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau'} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

$$(x = -\xi,\ \tau' = -{}^1/_2 c_0 h^2 \tau,\ u = 3\eta h^{-3},\ \nu' = 2\nu c_0^{-1} h^{-2})$$

2. Стационарное решение. Уравнение (1.5) при слабой диссипации описывает ударную волну с осцилляциями вблизи фронта [3]. Для исследования структуры этих осцилляций предложено [4] вначале записать периодическое решение уравнения КдВ, получающегося из (1.5) при $\nu' = 0$, а затем входящие в это решение произвольные постоянные считать медленно изменяющимися функциями x и τ', для которых выведены усредненные уравнения Уитема [5], обобщенные на случай малой диссипации.

Воспользуемся далее результатами работы [4]. Искомое решение уравнения КдВ имеет вид

$$u(x, \tau') = \frac{2a}{s^2} \operatorname{dn}^2 \left[\left(\frac{a}{6s^2}\right)^{1/2} (x - U\tau'),\ s\right] + U - \frac{2a}{3s^2}(2 - s^2) \tag{2.1}$$

где $\operatorname{dn}(y, s)$ — функция Якоби модуля s, a — амплитуда колебаний, а U определяет фазовую скорость волны в системе отсчета, связанной с переменными x, τ'.

В системе отсчета $X = x - U\tau'$, в которой волна имеет стационарный профиль, среднее значение волновой функции $\langle u \rangle$, амплитуду колебаний a и длину волны λ, можно записать в виде [4]

$$\begin{gathered} \langle u \rangle = {}^1/_2 [1 - (2 - s^2 - 3\mathrm{E}/\mathrm{K}) f^{-1/2}]\, u^-, \quad a = {}^3/_4 s^2 f^{-1/2} u^- \\ \lambda = 4\sqrt{2} f^{1/4} \mathrm{K}\, (u^-)^{-1/2}, \quad f(s) = (1 - s^2 + s^4) \end{gathered} \tag{2.2}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля s, u^- — величина скачка на фронте ударной волны, причем $U = {}^1/_2 u^-$.

Величина s находится путем численного решения уравнения

$$\nu'(X - X_0) = F(s),\ F(s) = \ln [f(s)\mathrm{E} - (1 - s^2)(1 - s^2/2)\mathrm{K}] - {}^5/_4 \ln f(s) \tag{2.3}$$

где X_0 — координата начала волны, выбираемая произвольно.

Подставляя выражения (2.2), (2.3) в (2.1), можно полностью определить осцилляционную структуру волны в слабодиссипативной среде. С ростом диссипации профиль фронта ударной волны становится монотонным. Решение уравнения БКдВ для этого случая рассмотрено в [6] с помощью преобразований Бэклунда.

Из (2.3) следует, что вдали от переднего фронта центробежной волны ($X \ll X_0$) $s \ll 1$ и функция $\operatorname{dn}(y, s)$ близка к суперпозиции гармонических функций [7]. Напротив, вблизи фронта ($X \approx X_0$) $s \to 1$ и $\operatorname{dn}(y, s) \to \operatorname{sech} y$, т. е. осцилляции принимают вид последовательности солитонов, расстояние между которыми $\lambda_s = \lambda$, причем величина λ определена в (2.2).

Полагая в (2.3) $X_0 - X = \lambda_s$ и переходя к первоначальным обозначениям, можно найти минимальную скорость вращения потока, обеспечивающую формирование солитоноподобных осцилляций на переднем фронте ударной волны:

$$v_{\varphi\,\min} = \frac{8\nu}{h}\sqrt{\frac{2r_0}{3\eta^-}\,\frac{f(s)^{1/4}\mathrm{K}}{F(s)}}, \quad \eta^- = \frac{h^3 u^-}{3}$$

[2] Здесь исправлена допущенная в [1] ошибка: в выражениях (3.3), (3.4) при нелинейных членах должен быть коэффициент ${}^3/_2$.

где η^- — величина скачка радиального смещения свободной поверхности жидкости на фронте ударной волны.

Произведем некоторые оценки, полагая $r_0 = 10^{-1}$ м, $h = 10^{-2}$ м, $\eta^- = 10^{-3}$ м. Для воды при комнатной температуре $\nu = 1{,}05 \cdot 10^{-6}$ м²/с, что дает $v_{\varphi \min} \approx 10{,}5$ м/с. Для жидкостей с меньшей вязкостью процесс формирования центробежных солитонов облегчается. Например, для ацетона ($\nu = 4{,}26 \cdot 10^{-7}$ м²/с) $v_{\varphi \min} \approx 4{,}2$ м/с.

Полученные результаты показывают, что режим возбуждения центробежных солитонов в поступательно-вращательном потоке вполне осуществим для реальных жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Браже Р. А.* Центробежные солитоны в поступательно-вращательном потоке жидкости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 516—519.
2. *Новиков И. И.* Прикладная магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат. 1969. 360 с.
3. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука. 1979. 384 с.
4. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Усредненное описание волн в уравнении Кортевега — де Вриза — Бюргерса // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 3. С. 871—880.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: 1977. 662 с.
6. *Кудряшов Н. А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465—470.
7. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука. 1973. 176 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию 11.I.1989

УДК 539.3 : 534.1

А. О. Ватульян, В. Л. Кубликов

О ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Изучается класс плоских задач электроупругости об установившихся колебаниях тел с гладкой границей. На основе построенного фундаментального решения и его анализа формулируется система граничных интегральных уравнений относительно компонент вектора перемещений и потенциала.

1. Пусть тело занимает двумерную связную область Ω в плоскости x_1x_3, ограниченную гладким замкнутым контуром L. Пусть $L = L^1 \cup L^2$ $(L^1 \cap L^2 = \varnothing)$, где часть границы L^1 электродирована, а другая часть L^2 неэлектродирована.

Для вывода основной системы интегральных уравнений применим обобщение теоремы взаимности Бетти на случай электроупругой среды [1], считая режим колебаний установившимся по закону $\exp(-i\omega t)$. В соответствии с теоремой рассмотрим два состояния среды $u_1^{(n)}$, $u_3^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)}$, $D_k^{(n)}$, $n = 1, 2$.

Эти состояния описываются системой уравнений электроупругости (здесь в отличие от [1] рассмотрим неоднородное уравнение для электрического поля)

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + X_i^{(n)} + \rho\omega^2 u_i^{(n)} = 0, \quad i = 1,3; \qquad D_{k,k}^{(n)} + f^{(n)} = 0; \qquad n = 1, 2 \tag{1.1}$$

где f— плотность электрического заряда, D_k — компоненты вектора электрической индукции. С учетом определяющих соотношений $\sigma_{ij}^{(n)} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)} - e_{kij}E_k^{(n)}$, $n = 1, 2$ из первых двух уравнений (1.1) имеем [1]

$$\int\limits_\Omega (X_i^{(1)}u_i^{(2)} - X_i^{(2)}u_i^{(1)})\, d\Omega + \int\limits_L (p_i^{(1)}u_i^{(2)} - p_i^{(2)}u_i^{(1)})\, dL = e_{kij}\int\limits_\Omega (\varepsilon_{ij}^{(1)}E_k^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}E_k^{(2)})\, d\Omega \tag{1.2}$$

Аналогично из последнего уравнения (1.1), используя соотношения

$$D_k^{(n)} = e_{kij}\varepsilon_{ij}^{(n)} + э_{kj}E_j^{(n)}, \quad n = 1, 2$$