Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 531.36

Ляо Сяосинь

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Методом функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости по отношению к части переменных линейных систем с постоянными коэффициентами.

Пусть имеем систему линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения (A — постоянная $(n \times n)$-матрица)

$$\mathbf{x}^{\cdot} = A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = (y_i, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$m > 0, \quad p \geqslant 0, \quad n = m + p \tag{1}$$

Рассмотрим вопрос об асимптотической y-устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ [1—4].

Пусть B, B_ε — симметричные $(n \times n)$-матрицы, а $B^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ — блоки этих матриц соответственно размера $m \times m$, $m \times p$, $p \times m$, $p \times p$, такие, что (E_m — единичная $(m \times m)$-матрица)

$$B = \begin{Vmatrix} B^{(1)} & B^{(2)} \\ B^{(3)} & B^{(4)} \end{Vmatrix}, \quad B_\varepsilon = \begin{Vmatrix} B^{(1)} - \varepsilon E_m & B^{(2)} \\ B^{(3)} & B^{(4)} \end{Vmatrix}$$
$$\varepsilon = \text{const} > 0$$

Квадратичная форма $v = v(\mathbf{x})$, $v(0) = 0$ называется: 1) постоянно положительной по всем переменным, если $v(\mathbf{x}) \geqslant 0$ при всех $\|\mathbf{x}\| < \infty$ [5]; 2) y-определенно положительной, если $v(\mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|)$ при всех $\|\mathbf{x}\| < \infty$ [2], где $a(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая при $r \in [0, \infty)$ функция, $a(0) = 0$.

Проверку y-определенной положительности $v(\mathbf{x})$ можно свести к проверке условий $\Delta_{ii} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ Сильвестра постоянной положительности по всем переменным вспомогательной формы $v^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B_\varepsilon \mathbf{x}$ (постоянной положительности матрицы B_ε). Здесь Δ_{ii} — главные диагональные миноры матрицы B_ε.

Лемма. Для того чтобы форма $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ была y-определенно положительной, необходимо и достаточно, чтобы форма $v^*(\mathbf{x})$ (матрица B_ε) была постоянно положительной при достаточно малом ε.

Наряду с B, B_ε будем рассматривать матрицы C, C_ε той же структуры и размера.

Теорема 1. Если матричное уравнение Ляпунова $A^T B + BA = -C$ имеет решение в классе симметричных постоянных матриц B, C, таких, что B_ε (C_ε) — постоянно оложительна (отрицательна) при достаточно малом ε, то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. На основании леммы существует квадратичная y-определенно положительная форма $v = \mathbf{x}^T B\mathbf{x}$, такая, что ее производная $v^{\cdot}$ в силу системы (1) y-определенно отрицательна. Кроме того, в силу $v^{\cdot} \leqslant 0$ правые части первых m уравнений системы (1) ограничены и, следовательно [2], движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Теорема 2. Если существуют постоянные $c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $c_j \geqslant 0$ $(j = m + 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие условиям

$$l_i = c_i a_{ii} + \sum_{k=1,\ k \neq i}^{n} c_k |a_{ki}| < 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2}$$
$$l_j \leqslant 0 \quad (j = m + 1, \ldots, n), \quad A = (a_{kr}) \ (k, r = 1, \ldots, n)$$

то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически y-устойчиво.

Доказательство с помощью функции $V = c_1 | x_1 | + \ldots + c_n | x_n |$ проводится на основании условий (2) по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Действительно, справедливы соотношения

$$V \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i | x_i | \triangleq a(\| \mathbf{y} \|), \quad D^+V = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign} x_k \Big[\sum_{r=1}^{n} a_{kr} x_r \Big] \leqslant \sum_{i=1}^{m} l_i | x_i | \triangleq -b(\| \mathbf{y} \|)$$

(D^+ — верхнее производное число Дини [2], $b(r)$ — функция того же класса, что и $a(r)$ и, следовательно [2], движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически y-устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Серия математики, механики, химии, физики, астрономии, 1957. № 4. С 9—16.
2. *Озиранер А. С.*, *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364—384.
3. *Воротников В. И.*, *Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 268—271.
4. *Кривошеев Ю. А.*, *Луценко А. В.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем с постоянной и почти постоянной матрицей // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 203—210.
5. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.

Китай

Поступила в редакцию
22.IX.1987

УДК 532.5:534

Р. А. Браже

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СОЛИТОНОВ В ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Учитывается вязкость среды при выводе эволюционного уравнения, описывающего распространение нелинейных центробежных волн по свободной поверхности поступательно-вращательного потока жидкости. Для полученного при этом уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза (БКдВ) записывается стационарное решение в виде ударной волны с солитонными осцилляциями вблизи фронта. Оценивается влияние вязкости на структуру волнового фронта и условия формирования предсказанных ранее автором [1] центробежных солитонов, играющих важную роль в ряде атмосферных процессов [1].

1. Вывод эволюционного уравнения. Задача о распространении центробежных волн по свободной поверхности поступательно-вращательного потока идеальной несжимаемой жидкости сводится [1] к решению уравнения Лапласа для угловой компоненты векторного потенциала поля скоростей с нелинейными граничными условиями. При наличии вязкости кинематическое граничное условие остается без изменения:

$$v_{r1} = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial z} v_{z1} \right) \tag{1.1}$$

а динамическое условие получается из осевой проекции уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и имеет вид

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z1} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r_0} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_{z1}}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость среды, а смысл остальных обозначений сохранен прежним.

---

[1] *Браже Р. А.* Вихревые и солитонные явления в атмосферном электричестве. Ульяновск, 1988. 26 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.04.88, № 2949 — В88.