Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 539.374

Ю. И. Няшин, С. А. Чернопазов

К ПОСТАНОВКЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматривается дифференциальная и вариационная постановка задачи контактного взаимодействия упругопластического тела с жесткой опорой. В качестве определяющих соотношений приняты уравнения теории пластического течения с изотропным упрочнением, являющиеся частным вариантом теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина [1, 2]. Приводится доказательство существования и единственности обобщенного решения. Для упрощения изложения задача рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат.

Контактные задачи с определяющими соотношениями деформационной теории пластичности приведены в работе [3]. Вариационные постановки с использованием обобщенных определяющих соотношений пластичности сформулированы в [4, 5]. Однако указанных там ограничений на обобщенные определяющие соотношения, по-видимому, недостаточно для единственности решения.

1. Дифференциальная постановка задачи. Рассматривается квазистатический процесс деформирования упругопластического тела, занимающего область Ω в R^3 с гладкой границей S. Предполагается, что перемещения и градиенты перемещений малы, поэтому можно пренебречь квадратами градиентов, а также вращениями элементов тела, связь со стороны жесткой опоры является идеальной односторонней. Задача формулируется в системе отсчета, неподвижной относительно жесткой опоры. В качестве поверхности нагружения принято условие пластичности Мизеса.

Предполагается, что в каждый момент времени исследуемая область Ω может состоять из двух частей: $\Omega^e = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \sigma_i(\mathbf{x}) < \sigma_T\}$ и $\Omega^p = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \sigma_i(\mathbf{x}) = \sigma_T\}$. Здесь σ_i — интенсивность напряжений. В области Ω^e деформирование материала происходит упруго, область Ω^p в общем случае состоит из зоны активного нагружения Ω^{pa} и зоны разгрузки Ω^{pr}, заранее неизвестных и подлежащих определению.

Условия определения указанных выше зон имеют вид ($f = \sigma_i - \sigma_T$, $g_{ij} = \partial f/\partial\sigma_{ij}$):

если $\mathbf{x} \in \Omega^p$ и $g_{ij}dS_{ij} \leqslant 0$, то $\mathbf{x} \in \Omega^{pr}$,

если $\mathbf{x} \in \Omega^p$ и $g_{ij}dS_{ij} > 0$, то $\mathbf{x} \in \Omega^{pa}$.

Определяющие соотношения в области Ω запишем как

$$dS_{ij} = 2G(de_{ij} - d\lambda\, g_{ij}), \qquad d\sigma = K\, d\varepsilon \tag{1.1}$$

где $d\sigma$, $d\varepsilon$ — приращения среднего давления и средней деформации. Скалярный множитель $d\lambda$ в области Ω^e и Ω^{pr} равен нулю. В области Ω^{pa}

$$d\lambda = E_a^{-1} g_{ij}\, dS_{ij} \tag{1.2}$$

Предполагается, что касательный модуль E_a [6] удовлетворяет условиям

$$\alpha \geqslant E_a \geqslant k > 0, \qquad E_a \in L_\infty(\Omega^p) \tag{1.3}$$

Принимая во внимание соотношение (1.2), а также условия определения зон Ω^{pr} и Ω^{pa}, запишем определяющие соотношения для множителя

$d\lambda$ в виде [7]

$$d\lambda = 0 \text{ в } \Omega^e \tag{1.4}$$

$$d\lambda \geqslant 0, \quad E_a d\lambda - g_{ij} dS_{ij} \geqslant 0$$

$$d\lambda (E_a d\lambda - g_{ij} dS_{ij}) = 0 \text{ в } \Omega^p \tag{1.5}$$

Перейдем к описанию граничных условий. В общем случае граница S состоит из трех частей: $S = S_\sigma \bigcup S_u \bigcup S_c$. Поверхность S_c включает в себя фактическую поверхность контакта и зоны возможного контакта.

Для определения части S_c предположим, что граница абсолютно жесткой опоры описывается уравнением $\Psi(\mathbf{x}) = 0$, при этом $\Psi(\mathbf{x}) < 0$ внутри штампа и $\Psi(\mathbf{x}) > 0$ снаружи.

В дальнейшем везде рассматриваются малые перемещения, поэтому естественно отнести к S_c точки S, лежащие на поверхности жесткой опоры (эти точки образуют фактическую поверхность контакта S_k), и точки S, достаточно близко расположенные к опоре. Это можно сделать, определив уравнением $\Psi(\mathbf{x}) = C$ $(C > 0)$ эквидистантные поверхности, тогда $S_c = \{\mathbf{x} \in S \mid 0 \leqslant \Psi(\mathbf{x}) \leqslant \varepsilon_c\}$. Здесь ε_c — фиксированный положительный параметр, назначаемый из физических соображений. Используя функцию $\Psi(\mathbf{x})$, определим поверхность фактического контакта $S_k = \{\mathbf{x} \in S_c \mid \Psi(\mathbf{x}) = 0\}$ и область возможного контакта $S^0 = \{\mathbf{x} \in S_c \mid 0 < \Psi(\mathbf{x}) \leqslant \varepsilon_c\}$.

Полагаем, что на поверхности S^0 тело не подвержено действию поверхностных сил, т. е. $\sigma_{ij}n_j = 0$ (n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S).

Используя результаты работы [8], условие непроникания на поверхности S_c запишем в линеаризованном виде относительно искомой функции

$$du_\nu \leqslant \delta$$

$$du_\nu = \mathbf{v}\, d\mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = -\operatorname{grad}\Psi(\mathbf{x})/|\operatorname{grad}\Psi(\mathbf{x})|, \quad \delta = \Psi(\mathbf{x})/|\operatorname{grad}\Psi(\mathbf{x})|$$

Величина δ определяет зазор в зоне возможного контакта S^0 $(\delta > 0)$, в зоне фактического контакта $\delta = 0$.

Принимая во внимание вышесказанное, уравнения и граничные условия задачи запишем в виде

$$d\sigma_{ij,j} + dF_i = 0 \text{ в } \Omega \tag{1.6}$$

$$d\sigma_{ij} = dS_{ij} + \delta_{ij}\, d\sigma, \quad d\sigma = {}^1/_3 K \delta_{ij}\, d\mathrm{E}_{ij}, \quad dS_{ij} = 2G(de_{ij} - g_{ij}\, d\lambda)$$

$$de_{ij} = dE_{ij} - {}^1/_3 \delta_{ij}\delta_{kl}\, dE_{kl}, \quad dE_{ij} = {}^1/_2 (du_{i,j} + du_{j,i}) \text{ в } \Omega \tag{1.7}$$

$$du_i = 0 \text{ на } S_u, \quad d\sigma_{ij}n_j = dP_i \text{ на } S_\sigma \tag{1.8}$$

$$du_\nu \leqslant \delta, \quad du_\nu < \delta \Rightarrow \sigma_\nu{}^t + d\sigma_\nu = 0, \quad du_\nu = \delta \Rightarrow \sigma_\nu{}^t + d\sigma_\nu \leqslant 0$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{0} \text{ на } S_c \tag{1.9}$$

$$(d\sigma_\nu = \mathbf{v}\, d\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}, \quad d\boldsymbol{\sigma}_T = d\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v} - d\sigma_\nu \mathbf{v})$$

К этим соотношениям добавляются (1.4) и (1.5), записанные для области Ω^p.

Здесь $d\sigma$ — приращение тензора напряжений, $\sigma_\nu{}^t = \mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}^t\mathbf{v}$ — реакция жесткой опоры, $\boldsymbol{\sigma}^t$ — тензор напряжений в момент времени t. В зоне возможного контакта $\sigma_\nu{}^t = 0$, в зоне фактического контакта $\sigma_\nu{}^t \leqslant 0$. Состояние тела в начальный момент времени считаем ненапряженным и недеформированным, полагая при этом, что $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0}$.

Определим множества

$$M = \{d\mathbf{v} \in (C^2(\overline{\Omega}))^3 \mid dv_i = 0 \text{ на } S_u, \ dv_\nu \leqslant \delta \text{ на } S_c\}$$

$$Q = \{d\mu \in L_2(\Omega) \mid d\mu \geqslant 0 \text{ в } \Omega^p, \ d\mu = 0 \text{ в } \Omega^e\}$$

Пару функций $(d\mathbf{u},\ d\lambda) \in M \times Q$, удовлетворяющих уравнениям и граничным условиям (1.4)—(1.9), назовем классическим решением.

Заметим, что соотношения (1.4)—(1.9) позволяют связать поля перемещений $\mathbf{u}^t$, деформаций $\mathbf{E}^t$, напряжений $\boldsymbol{\sigma}^t$ в момент времени t с соответствующими полями $\mathbf{u}^{t+dt} = \mathbf{u}^t + d\mathbf{u}$, $\mathbf{E}^{t+dt} = \mathbf{E}^t + d\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\sigma}^{t+dt} = \boldsymbol{\sigma}^t + d\boldsymbol{\sigma}$ в момент времени $t + dt$.

2. Вариационная постановка. Пусть $(d\mathbf{u},\ d\lambda)$ классическое решение. Умножим скалярно уравнение равновесия (1.6) на $d\mathbf{v} - d\mathbf{u}$, где $d\mathbf{v} \in M$, и проинтегрируем по области Ω. Применяя затем к полученному выражению теорему Остроградского—Гаусса и принимая во внимание граничные условия (1.8), (1.9) и первые три определяющие соотношения (1.7), можно получить неравенство

$$a(d\mathbf{u}, d\mathbf{v} - d\mathbf{u}) - \int_\Omega 2Gg_{ij}\, d\lambda\, de_{ij}(d\mathbf{v} - d\mathbf{u})\, d\Omega - \langle \mathbf{f}, d\mathbf{v} - d\mathbf{u}\rangle \geqslant 0,$$

$$\forall\, d\mathbf{v} \in M \tag{2.1}$$

$$a(d\mathbf{u}, d\mathbf{v}) = \int_\Omega 2G\, de_{ij}(d\mathbf{u})\, de_{ij}(d\mathbf{v})\, d\Omega + \int_\Omega 3\, d\sigma(d\mathbf{u})\, dE(d\mathbf{v})\, d\Omega \tag{2.2}$$

$$\langle \mathbf{f}, d\mathbf{v}\rangle = \int_\Omega dF_i\, dv_i\, d\Omega + \int_{S_\sigma} dP_i\, dv_i\, dS_\sigma - \int_{S_c} \sigma_\nu{}^t\, dv_\nu\, dS_c \tag{2.3}$$

Используя соотношения (1.4) и (1.5), составим другое неравенство

$$\int_\Omega (d\mu - d\lambda)(E_a\, d\lambda - g_{ij}\, dS_{ij}(d\mathbf{u}))\, d\Omega \geqslant 0, \quad \forall\, d\mu \in Q \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$dv = (d\mathbf{v},\ d\mu) \in M \times Q, \quad du = (d\mathbf{u},\ d\lambda) \in M \times Q$$

$$b(d\mu, d\lambda) = \int_\Omega d\mu\, d\lambda\, (E_a + 2Gg_{ij}g_{ij})\, d\Omega$$

$$c(d\mu, d\mathbf{v}) = \int_\Omega d\mu\, de_{ij}(d\mathbf{v})\, 2Gg_{ij}\, d\Omega$$

$$A(du,\ dv) = a(d\mathbf{u},\ d\mathbf{v}) + b(d\mu,\ d\lambda) - c(d\mu,\ d\mathbf{u}) - c(d\lambda,\ d\mathbf{v})$$

Складывая неравенства (2.1) и (2.4) и применяя принятые выше обозначения, получим

$$A(du,\ dv - du) - \langle \mathbf{f},\ d\mathbf{v} - d\mathbf{u}\rangle \geqslant 0, \ \forall dv \in M \times Q \tag{2.5}$$

Рассмотрим задачу: определить

$$du \in M \times Q : A(du,\ dv - du) - \langle \mathbf{f},\ d\mathbf{v} - d\mathbf{u}\rangle \geqslant 0, \ \forall dv \in M \times Q \tag{2.6}$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что если существует классическое решение задачи, то оно удовлетворяет вариационному неравенству (2.6).

Имеет место и обратное утверждение. Пусть du — решение задачи (2.6), тогда du — классическое решение.

Доказательство состоит в следующем.

Полагая $d\mu = d\lambda$, получим из неравенства (2.6) неравенство (2.1). Используя геометрические и физические соотношения (1.7) (полагая при этом, что решение du удовлетворяет им точно), из неравенства (2.1) можно установить, что решение du удовлетворяет уравнениям равновесия (1.6) и граничным условиям (1.8), (1.9).

Возьмем теперь $d\mathbf{v} = d\mathbf{u}$. Тогда неравенство (2.6) при учете третьего определяющего соотношения (1.7) примет вид (2.4). В области Ω^e имеем $d\lambda = 0$ по определению множества Q. В области Ω^p в силу произвольности выбора $d\mu$ и определения множества Q из неравенства (2.4) следуют соотношения (1.4), (1.5).]

Введем в рассмотрение обобщенное решение задачи (2.6). Под последним будем понимать решение вариационного неравенства (2.6) в более широком классе функций $V \times Q$, где

$$V = \{d\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3,\ dv_i = 0 \text{ на } S_u,\ dv_\nu \leqslant \delta \text{ на } S_c\}$$

$(H^1(\Omega))^3$ — векторное пространство С. Л. Соболева, $S \in C^1$.

Доказательство существования и единственности обобщенного решения требует проверки условий следующей теоремы [9].

Теорема. Пусть U — гильбертово пространство, $A(dv, du)$ — коэрцитивная билинейная непрерывная форма на U, $V \times Q \subset U$ — замкнутое выпуклое множество, $\mathbf{f} \in U^*$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (2.6).

Введем в рассмотрение пространства $(Z(\Omega))^3 = \{d\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 \mid dv_i = 0 \text{ на } S_u\}$, $U = (Z(\Omega))^3 \times L_2(\Omega)$. Ниже потребуются нормы в пространствах $L_2(\Omega)$, $(Z(\Omega))^3$ [10] и U

$$\|d\mu\|_{L_2} = \Big(\int_\Omega (d\mu)^2\, d\Omega\Big)^{1/2}, \quad \|d\mathbf{v}\|_Z = \Big(\int_\Omega d\mathbf{E}_{ij}(d\mathbf{v})\, d\mathbf{E}_{ij}(d\mathbf{u})\, d\Omega\Big)^{1/2}$$

$$\|dv\|_U = (\|d\mathbf{v}\|_Z^2 + \|d\mu\|_{L_2}^2)^{1/2}$$

Форма $A(dv, du)$ линейна по каждому аргументу. Проверим свойство ограниченности.

Из соотношения (2.2) следует, что

$$|a(d\mathbf{v}, d\mathbf{u})| \leqslant \beta \|d\mathbf{u}\|_Z \|d\mathbf{v}\|_Z, \quad \forall\, d\mathbf{u}, d\mathbf{v} \in (Z(\Omega))^3, \quad \beta = E/(1-2\nu) \tag{2.7}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Для отображения $b(d\mu, d\lambda)$ после вычисления производных от функции нагружения можно установить неравенство

$$|b(d\mu, d\lambda)| \leqslant \beta_1 \|d\mu\|_{L_2} \|d\lambda\|_{L_2},\ \forall d\lambda,\ d\mu \in L_2 \tag{2.8}$$

$$\beta_1 = \max E_a + 3G = \alpha + 3G$$

Докажем теперь ограниченность отображения $c(d\mu, d\mathbf{v})$.

Применяя неравенство Коши и выполняя цепочку преобразований, получим

$$|c(d\mu, d\mathbf{v})| \leqslant \|d\mu\|_{L_2} \Big(\int_\Omega [e_{ij}(d\mathbf{v})\, 2Gg_{ij}]^2\, d\Omega\Big)^{1/2} \leqslant \beta_2 \|d\mu\|_{L_2} \|d\mathbf{v}\|_Z$$

$$\forall\, d\mu \in L_2, \quad \forall\, d\mathbf{v} \in (Z(\Omega))^3, \quad \beta_2 = G\sqrt{6} \tag{2.9}$$

Неравенства (2.7), (2.8) и (2.9) позволяют получить оценку

$$|A(dv, du)| \leqslant 2\beta_3 \|du\|_U \|dv\|_U,\ \forall du,\ dv \in U \tag{2.10}$$

$$\beta_3 = \max(\beta, \beta_1, \beta_2)$$

Таким образом $A(dv, du)$ — билинейная ограниченная и вследствие этого непрерывная форма на U.

Проверим условие коэрцитивности. Для отображения $a(d\mathbf{v}, d\mathbf{v})$ имеет место неравенство

$$a(d\mathbf{v}, d\mathbf{v}) \geqslant \beta_4 \|d\mathbf{v}\|_Z^2,\ \forall\, d\mathbf{v} \in (Z(\Omega))^3,\ \beta_4 = E/(1+\nu) = 2G \tag{2.11}$$

Используя неравенства (2.11), (2.9) и второе неравенство в (1.3), выполним цепочку преобразований

$$A(dv, dv) \geqslant 2G\|d\mathbf{v}\|_Z^2 + (k + 3G)\|d\mu\|_{L_2}^2 - G\sqrt{6}\, \|d\mu\|_{L_2} \|d\mathbf{v}\|_Z \geqslant$$

$$\geqslant 2G\|d\mathbf{v}\|_Z^2 + (k + 3G)\|d\mu\|_{L_2}^2 - G(3 + \beta^*)\|d\mu\|_{L_2}^2 -$$

$$- G(2 - {}^1\!/_2\beta^*)\|d\mathbf{v}\|_Z^2 = {}^1\!/_2 G\beta^* \|d\mathbf{v}\|_Z^2 + (k - G\beta^*)\|d\mu\|_{L_2}^2,$$

$$\forall\, dv \in u, \quad \forall \beta^* \in [0, 1]$$

Возьмем $\beta^* = 2k/(3G)$. Тогда

$$A\ (dv,\ dv) \geqslant \beta_5 \| dv \|_U{}^2, \quad \forall dv \in U, \ \beta_5 = {}^1/_3 k$$

От объемных и поверхностных сил потребуем, чтобы $\mathfrak{f} \in U^*$. Таким образом, все условия теоремы выполняются и задача (2.6) имеет единственное обобщенное решение.

Следует отметить, что численное решение задачи (2.6) может быть найдено методом конечных элементов в сочетании с методом релаксации.

Авторы благодарят П. В. Трусова за внимание к работе, советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность: Основы математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
2. *Ильюшин А. А.*, *Ленский В. С.* О соотношениях и методах современной теории пластичности // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 240—255.
3. *Кравчук А. С.* Вариационный метод исследования контактного взаимодействия и его реализация на ЭВМ // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1984. Вып. 25. С. 33—50.
4. *Кузьменко В. И.* О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 473—481.
5. *Кузьменко В. И.* Контактные задачи теории пластичности с учетом трения на контактной поверхности // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 1. С. 45—52.
6. Термопрочность деталей машин / Под ред. Биргера И. А., Шорра Б. Ф. М.: Машиностроение, 1985. 455 с.
7. *Reddy B. D.*, *Griffin T. B.*, *Marais M. J.* A penalty approach to the rate problem in small-strain plasticity // IMA. J. Appl. Math. 1985. V. 34. № 3. P. 303—321.
8. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно и нелинейно упругих тел конечных размеров // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 329—337.
9. *Киндерлерер Д.*, *Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
10. *Дюво Г.*, *Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.

Пермь

Поступила в редакцию
6.XII.1988