Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 539.374

Н. Х. Арутюнян, Ю. Н. Радаев

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Решение задачи о кручении цилиндрического стержня для общего, изотропного, несжимаемого упругого материала получено в [1]. В настоящей работе приводится аналитическое решение упругопластической задачи кручения при конечных деформациях, представленное в квадратурах от эллиптических функций. Нелинейная кинематика упругопластического деформирования вводится в определяющие уравнения при помощи мультипликативного разложения градиента деформации на упругую и пластическую составляющие [2, 3]. Упругая деформация и скорость пластической деформации связаны с напряженным состоянием тела согласно определяющему уравнению Муни — Ривлина [4] и ассоциированному с условием пластичности Треска закону течения при конечных деформациях [5]. В пластической зоне для определения угла поворота базиса из собственных векторов тензора напряжений относительно радиального направления получено нелинейное уравнение в частных производных первого порядка и начальные данные на упругопластической границе. Интегрирование указанного уравнения приводится к нахождению общего интеграла уравнения Риккати с правой частью, определяемой по угловой скорости течения материала в пластической зоне. Доказано, что пренебрежение конечностью деформаций приводит к завышенной оценке жесткости стержня.

1. Нелинейная кинематика упругопластического деформирования. Деформация упругопластического тела из естественного (ненапряженного) состояния определяется отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \lambda)$, где $\mathbf{x}$ — положение, которое занимает точка $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации после деформации, λ — параметр нагружения. Введем следующие обозначения: $\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \mathbf{x}$ — градиент деформации, $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ — левый тензор деформации Коши — Грина, $\mathbf{V} = \mathbf{B}^{1/2}$ — левый тензор растяжения, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda)$ — пространственное поле скоростей, $\mathbf{L} = \operatorname{grad} \mathbf{v}$ — пространственный градиент скорости. Точкой будем обозначать материальное дифференцирование по λ.

В качестве основных кинематических характеристик упругопластического деформирования введем градиент упругой деформации $\mathbf{F}^e$ и градиент пластической деформации $\mathbf{F}^p$ [2, 3]. Разложение полной деформации на упругую и пластическую при этом основывается на понятии о конфигурации упругопластического тела, полностью свободной от внутренних напряжений (такая конфигурация мысленно ставится в соответствие каждой актуальной конфигурации и определяется отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \lambda)$). Так как напряжения в этой конфигурации равны нулю, то отображение $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{X}, \lambda)$ определяет чисто пластическое деформирование, а отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \lambda)$ — чисто упругое. Правило дифференцирования композиции отображений приводит к мультипликативному разложению градиента деформации [2]

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e\mathbf{F}^p \tag{1.1}$$

Сомножители $\mathbf{F}^e$ и $\mathbf{F}^p$ не определены однозначно, так как произвольный локальный поворот элементов в конфигурации, полностью свободной от внутренних напряжений, снова дает конфигурацию, в которой каждый элемент тела разгружен. Поэтому не ограничивая общности можно принять, что полярное разложение Коши тензора $\mathbf{F}^e$ не содержит ортогонального множителя [3], т. е. $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e$. Дифференцируя по λ мультипликативное разложение градиента деформации и учитывая, что $\mathbf{L} = \mathbf{F}^{\cdot}\mathbf{F}^{-1}$ [4], получим

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}^{e\cdot}\mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e\mathbf{F}^{p\cdot}\mathbf{F}^{p-1}\mathbf{F}^{e-1} \tag{1.2}$$

Введем тензор $\mathbf{L}^p$ — пространственный градиент скорости пластической деформации: $\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^{p\cdot}\mathbf{F}^{p-1}$. Симметричная часть тензора $\mathbf{L}^p$ обозначается $\mathbf{D}^p$ и называется тензором скорости пластической деформации. Разрешая уравнение (1.2) относительно $\mathbf{L}^p$ и взяв симметричные части от обеих частей полученного тензорного равенства, имеем

$$\mathbf{D}^p = \mathrm{sym}\,[\mathbf{V}^{e-1}(\mathbf{L} - \mathbf{V}^{e\cdot}\mathbf{V}^{e-1})\,\mathbf{V}^e] \tag{1.3}$$

где sym $\mathbf{A}$ — симметричная часть тензора $\mathbf{A}$. С помощью уравнения (1.3) кинематика упругопластического деформирования вводится в определяющее уравнение упругопластических сред.

Построение кинематики упругопластического деформирования впервые осуществлено в [5]. Оно основано на аддитивном разложении тензора деформации, который определяется в сопутствующей (конвективной) системе координат как разность метрических коэффициентов, соответствующих отсчетной и актуальной конфигурациям. Этот же подход использован в [6].

2. Полные соотношения между полем скоростей и напряжениями в упругопластической среде. Условие пластичности для идеального упругопластического материала имеет вид

$$f(\sigma) = k \tag{2.1}$$

где σ — тензор напряжений Коши, k — предел текучести. Для точек тела, деформирующихся упруго при всех значениях параметра нагружения λ вплоть до текущего, при условии несжимаемости имеем следующее определяющее уравнение в форме Ривлина [4]:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \Sigma_1\mathbf{B} + \Sigma_{-1}\mathbf{B}^{-1}, \qquad f(\sigma) < k \tag{2.2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, p — гидростатическое давление, Σ_1, Σ_{-1} — коэффициенты реакции гиперупругого материала. В области пластического течения ($f(\sigma) = k$) полный градиент деформации представляется в виде (1.1). Упругий тензор $\mathbf{F}^e$ определяется по тензору напряжений из уравнения, аналогичного (2.2),

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \Sigma_1\mathbf{F}^{e2} + \Sigma_{-1}(\mathbf{F}^{e2})^{-1} \tag{2.3}$$

Ассоциированный с условием пластичности (2.1) закон течения при конечных деформациях имеет вид [5] (Λ — неопределенный множитель)

$$\mathbf{D}^p = \Lambda\partial f/\partial\sigma \tag{2.4}$$

Из уравнений (1.3) и (2.4) следует

$$\mathrm{sym}\,[\mathbf{F}^{e-1}(\mathbf{L} - \mathbf{F}^{e\cdot}\mathbf{F}^{e-1})\,\mathbf{F}^e] = \Lambda\partial f/\partial\sigma \tag{2.5}$$

Полные соотношения между полем скоростей и напряжениями в упругопластической среде можно получить, обратив уравнение (2.3) и подставив результат в (2.5) [7]. Отметим, что эйлерово поле скоростей входит в полные соотношения посредством градиента $\mathbf{L}$ и в виде конвективного члена в выражении для материальной производной $\mathbf{F}^{e\cdot}$. В дальнейшем будем считать, что коэффициенты реакции гиперупругого материала являются константами (материал Муни — Ривлина [4]): $\Sigma_1 = \mu\,(^1/_2 + \beta)$, $\Sigma_{-1} = -\mu\,(^1/_2 - \beta)$, $\mu > 0$, $|\beta| \leqslant {}^1/_2$. В качестве условия пластичности используется критерий максимального касательного напряжения Треска.

Отметим также, что уравнения (2.4), (2.5) справедливы, только если происходит активное нагружение на пределе текучести

$$f(\sigma) = k, \quad \mathrm{tr}\,[(\partial f/\partial\sigma)\,\sigma^{\cdot}] = 0$$

В случае, когда $f(\sigma) < k$ или

$$f(\sigma) = k, \quad \mathrm{tr}\,[(\partial f/\partial\sigma)\,\sigma^{\cdot}] < 0$$

(т. е. в последнем случае имеет место разгрузка от достигнутого упругопластического состояния), множитель Λ равен нулю. Таким образом, полные соотношения между полем скоростей и напряжениями при разгрузке имеют вид

$$\mathrm{sym}\,[\mathbf{F}^{e-1}(\mathbf{L} - \mathbf{F}^{e\cdot}\mathbf{F}^{e-1})\,\mathbf{F}^{e}] = 0$$

где вместо тензора $\mathbf{F}^e$ следует подставить его выражение через тензор напряжений Коши σ согласно (2.3).

3. Конечные упругопластические деформации цилиндрического стержня при кручении. Рассмотрим цилиндрический стержень из несжимаемого упругопластического материала. Через R_0 обозначим радиус сечения стержня в естественном (ненапряженном) состоянии, которое примем в качестве отсчетного.

Чисто упругое деформирование стержня при кручении определяется отображением [1, 4]: $r = E^{-1/2}R$, $\theta = \Theta + DZ$, $r = EZ$. Здесь R, Θ, Z и r, θ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации и в пространстве соответственно, D — крутка, E — удлинение. Ненулевые физические компоненты тензора напряжений Коши определяются по формулам

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = {}^1/_2\Sigma_1 D^2r^2 + A, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \Sigma_1 D^2 r^2\\ \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - (E^{-1} - E^2)\,\Sigma_1 + (E^{-2} + D^2E^{-1}r^2 - E)\,\Sigma_{-1}\\ \sigma_{\theta z} = DEr\,(\Sigma_1 - E^{-1}\Sigma_{-1})\end{gathered} \tag{3.1}$$

В решение Ривлина входит константа A, которая находится из граничного условия $\sigma_{rr} = 0$ при $r = E^{-1/2}R_0$ в том случае, если весь материал стержня деформируется упруго, и из условия непрерывности тензора напряжений при переходе через упругопластическую границу (уравнение которой в силу симметрии задачи можно представить в виде $r = c$) в случае существования области пластического течения.

Проанализируем упругое решение. Ортонормированный базис $\mathbf{l}'$, $\mathbf{m}'$, $\mathbf{n}'$ из собственных векторов тензора напряжений может быть получен в результате поворота на угол ψ' ортонормированного базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ относительно вектора $\mathbf{e}_r$. Угол ψ' определяется равенством

$$\mathrm{tg}\,\psi' = 2DEr\,\{[(D^2r^2 + E^{-1} + E^2)^2 - 4E]^{1/2} + D^2r^2 + E^{-1} - E^2\}^{-1} \tag{3.2}$$

Главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 выражаются через квадраты главных растяжений v_1^2, v_2^2, v_3^2 следующим образом:

$$\begin{gathered}\sigma_i = -p + v_i^2\Sigma_1 + v_i^{-2}\Sigma_{-1}\\ v_1^2 = E^{-1},\ 2v_{2,3}^2 = D^2r^2 + E^{-1} + E^2 \pm [(D^2r^2 + E^{-1} + E^2)^2 - 4E]^{1/2}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Можно показать, что для квадратов главных растяжений справедливы неравенства $v_2^2 > v_1^2 \geqslant v_3^2$, поэтому в силу (3.3) модуль максимального касательного напряжения равен $^1/_2(\sigma_2 - \sigma_3)$ или

$$|\tau_{\max}| = {}^1/_2\,(\Sigma_1 - E^{-1}\Sigma_{-1})\,[(D^2r^2 + E^{-1} + E^2)^2 - 4E]^{1/2} \qquad (3.4)$$

Величина $|\tau_{\max}|$ является возрастающей функцией r. Максимальное касательное напряжение действует на площадке с нормалью $\mathbf{v}' = \cos(\psi' - \pi/4)\,\mathbf{e}_z - \sin(\psi' - \pi/4)\,\mathbf{e}_\theta$. Значения удлинения E^* и крутки D^*, при которых максимальное касательное напряжение на контуре сечения стержня впервые достигает предела текучести k, определяются из системы уравнений

$$(E^{*3} - 1)\,[(^1/_2 + \beta)\,E^* + {}^1/_2 - \beta] = {}^1/_4 D^{*2}R_0^2\,[(^1/_2 + \beta)\,E^* + 1 - 2\beta]$$
$$(2k)^2\,(\Sigma_1 - E^{*-1}\Sigma_{-1})^{-2} = [(D^{*2}R_0^2 + 1)\,E^{*-1} + E^{*2}]^2 - 4E^*$$

Можно показать, что эта система уравнений разрешима и ее корень E^* удовлетворяет неравенству $E^* > 1$. Соответствующий крутящий момент имеет величину

$$M^* = {}^1/_2\pi D^* E^{*-1} R_0^4\,(\Sigma_1 - E^{*-1}\Sigma_{-1})$$

При дальнейшем увеличении нагрузки в сечении стержня возникает область пластического течения. В качестве параметра нагружения выберем $\lambda = E$, тогда крутка, крутящий момент и радиус упругого ядра будут функциями E. В упругой области имеем решение Ривлина (3.1). Эйлерово поле скоростей имеет следующие физические компоненты:

$$v_r = -r/(2E), \quad v_\theta = D^{\cdot} rz/E, \quad v_z = z/E \qquad (3.5)$$

Актуальное положение упругопластической границы $r = c$, крутка и удлинение должны удовлетворять уравнению

$$(2k)^2\,(\Sigma_1 - E^{-1}\Sigma_{-1})^{-2} = (D^2c^2 + E^{-1} + E^2)^2 - 4E, \; E > E^* \qquad (3.6)$$

являющемуся следствием (3.4), а также условия непрерывности тензора напряжений при $r = c$.

Сделаем ряд предположений относительно поля напряжений и скоростей в пластической зоне, справедливость которых будет подтверждена построенным на их основе решением задачи:

1) ортонормированный базис $\mathbf{l}''$, $\mathbf{m}''$, $\mathbf{n}''$ из собственных векторов тензора напряжений получается поворотом базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ на некоторый угол ψ'' относительно вектора $\mathbf{e}_r$, причем при $r = c$ должно выполняться равенство $\psi'' = \psi'$;

2) угол ψ'' и главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 (а также главные упругие растяжения v_1^e, v_2^e, v_3^e) — функции только r и E;

3) радиальная компонента скорости v_r зависит только от r и E, $v_z = 2\alpha\,(E)\,z$, $v_\theta = \gamma\,(E)\,rz$.

Отличные от нуля физические компоненты тензора напряжений в силу указанных предположений можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{rr} = \sigma_1, \;\; \sigma_{\theta\theta} = \sigma_2 - 2k\sin^2\psi''$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_2 - 2k\cos^2\psi'', \;\; \sigma_{\theta z} = k\sin 2\psi'' \qquad (3.7)$$

Уравнения равновесия сводятся к одному (остальные удовлетворяются за счет выбора гидростатического давления p [4]):

$$\partial\,(r\sigma_1)/\partial r = \sigma_2 - 2k\sin^2\psi'' \qquad (3.8)$$

Интегрируя уравнение (3.8), получим

$$\sigma_1 = \int (\sigma_2 - \sigma_1 - 2k\sin^2\psi'')\,r^{-1}\,dr \qquad (3.9)$$

С помощью определяющего соотношения (2.3) разность главных напряжений $\sigma_2 - \sigma_1$ может быть выражена через главные упругие растяжения

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (v_2^{e2} - v_1^{e2}) \Sigma_1 + (1/v_2^{e2} - 1/v_1^{e2}) \Sigma_{-1}$$

Подставляя последнее выражение в (3.9), заключаем, что тензор напряжений в пластической зоне определяется по главным упругим растяжениям v_1^e, v_2^e и углу ψ''. Для нахождения восьми неизвестных функций v_1^e, v_2^e, v_3^e, ψ'', v_r, v_θ, v_z, Λ тензорное уравнение (2.5) позволяет получить систему из шести уравнений в частных производных первого порядка, к которым необходимо добавить уравнение несжимаемости и критерий текучести Треска

$$v_1^e v_2^e v_3^e = 1, \qquad (v_2^{e2} - v_3^{e2}) \Sigma_1 + (1/v_2^{e2} - 1/v_3^{e2}) \Sigma_{-1} = 2k \tag{3.10}$$

Тензорное уравнение (2.5) представим в виде системы скалярных уравнений. Компоненты тензоров $\mathbf{F}^e$, $\mathbf{F}^{e-1}$, $\mathbf{F}^{e\cdot}$, $\mathbf{L}$, $\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}$ возьмем относительно базиса $\mathbf{l}''$, $\mathbf{m}''$, $\mathbf{n}''$. Матрицы тензоров $\mathbf{F}^e$ и $\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}$ в этом базисе имеют диагональный вид

$$[\mathbf{F}^e] = \operatorname{diag}(v_1^e, v_2^e, v_3^e), \qquad [\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}] = \operatorname{diag}(0, 1, -1) \tag{3.11}$$

где $[\mathbf{A}]$ — матрица тензора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{l}''$, $\mathbf{m}''$, $\mathbf{n}''$. Элементы матрицы $[\mathbf{L}]$ обозначим L_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$:

$$L_{11} = \partial v_r/\partial r, \quad L_{12} = -v_\theta \cos\psi''/r, \quad L_{13} = v_\theta \sin\psi''/r$$
$$L_{21} = \cos\psi'' \partial v_\theta/\partial r, \quad L_{22} = v_r \cos^2\psi''/r + 2\alpha(E)\sin^2\psi'' + {}^1/_2 r\gamma(E) \times$$
$$\times \sin 2\psi'', \quad L_{23} = [\alpha(E) - v_r/(2r)] \sin 2\psi'' + r\gamma(E)\cos^2\psi''$$
$$L_{31} = -\sin\psi''\partial v_\theta/\partial r, \quad L_{32} = [\alpha(E) - v_r/(2r)]\sin 2\psi'' - r\gamma(E) \times$$
$$\times \sin^2\psi'', \quad L_{33} = v_r \sin^2\psi''/r + 2\alpha(E)\cos^2\psi'' - {}^1/_2 r\gamma(E)\sin 2\psi'' \tag{3.12}$$

Физические компоненты материальной производной по параметру нагружения E от тензора $\mathbf{F}^e$ образуют симметричную матрицу и имеют следующий вид:

$$F_{rr}^{e\cdot} = (\partial/\partial E + v_r \partial/\partial r) v_1^e$$
$$F_{r\theta}^{e\cdot} = -v_\theta (v_2^e \cos^2\psi'' + v_3^e \sin^2\psi'' - v_1^e)/r$$
$$F_{rz}^{e\cdot} = -v_\theta (v_2^e - v_3^e) \sin 2\psi''/(2r)$$
$$F_{\theta\theta}^{e\cdot} = (\partial/\partial E + v_r\partial/\partial r)(v_2^e \cos^2\psi'' + v_3^e \sin^2\psi'')$$
$$2F_{\theta z}^{e\cdot} = (\partial/\partial E + v_r\partial/\partial r)[(v_2^e - v_3^e)\sin 2\psi'']$$
$$F_{zz}^{e\cdot} = (\partial/\partial E + v_r\partial/\partial r)(v_2^e \sin^2\psi'' + v_3^e\cos^2\psi'') \tag{3.13}$$

Элементы симметричной матрицы $[\mathbf{F}^{e\cdot}]$ обозначим $F_{ik}^{e\cdot}$ $(i, k = 1, 2, 3)$:

$$F_{11}^{e\cdot} = F_{rr}^{e\cdot}, \qquad F_{12}^{e\cdot} = F_{r\theta}^{e\cdot}\cos\psi'' + F_{rz}^{e\cdot}\sin\psi''$$
$$F_{13}^{e\cdot} = F_{rz}^{e\cdot}\cos\psi'' - F_{r\theta}^{e\cdot}\sin\psi'' \tag{3.14}$$
$$F_{22}^{e\cdot} = F_{\theta z}^{e\cdot}\sin 2\psi'' + F_{\theta\theta}^{e\cdot}\cos^2\psi'' + F_{zz}^{e\cdot}\sin^2\psi''$$
$$F_{23}^{e\cdot} = F_{\theta z}^{e\cdot}\cos 2\psi'' - {}^1/_2(F_{\theta\theta}^{e\cdot} - F_{zz}^{e\cdot})\sin 2\psi''$$
$$F_{33}^{e\cdot} = -F_{\theta z}^{e\cdot}\sin 2\psi'' + F_{\theta\theta}^{e\cdot}\sin^2\psi'' + F_{zz}^{e\cdot}\cos^2\psi''$$

Рассматривая уравнение (2.5) как матричное в базисе из собственных векторов тензора напряжений $\mathbf{l}''$, $\mathbf{m}''$, $\mathbf{n}''$, учитывая формулы (3.11)—(3.14) и исключая множитель Λ, получим систему из пяти скалярных уравнений

$$\partial v_r/\partial r - F_{rr}^{e\cdot}/v_1^e = 0$$

$$v_2^e v_3^e (v_r/r + 2\alpha) + (v_2^e - v_3^e)\sin 2\psi'' F_{\theta z}^{e\cdot} - (v_3^e \cos^2\psi'' + v_2^e \sin^2\psi'') F_{\theta\theta}^{e\cdot} -$$
$$- (v_3^e \sin^2\psi'' + v_2^e \cos^2\psi'') F_{zz}^{e\cdot} = 0$$
$$\cos\psi'' (v_1^{e2}\partial v_\theta/\partial r - v_2^{e2} v_\theta/r) - (v_1^e + v_2^e)(\cos\psi'' F_{r\theta}^{e\cdot} + \sin\psi'' F_{rz}^{e\cdot}) = 0$$
$$\sin\psi'' (v_3^{e2} v_\theta/r - v_1^{e2}\partial v_\theta/\partial r) + (v_1^e + v_3^e)(\sin\psi'' F_{r\theta}^{e\cdot} - \cos\psi'' F_{rz}^{e\cdot}) = 0$$
$$2r\gamma(E)(v_3^{e2}\cos^2\psi'' - v_2^{e2}\sin^2\psi'') + (v_3^e + v_2^e)(2\alpha - v_r/r)\sin 2\psi'' -$$
$$- (v_2^e + v_3^e)[(F_{zz}^{e\cdot} - F_{\theta\theta}^{e\cdot})\sin 2\psi'' + 2\cos 2\psi'' F_{\theta z}^{e\cdot}] = 0 \qquad (3.15)$$

Непосредственной подстановкой выражений для $F_{r\theta}^{e\cdot}$ и $F_{rz}^{e\cdot}$ из (3.13) в третье и четвертое уравнения системы (3.15) можно доказать, что они эквивалентны и сводятся к следующему уравнению:

$$\partial v_\theta/\partial r - v_\theta/r = 0$$

В силу предположения 3) оно удовлетворяется тождественно. Так как $\mathrm{tr}\,[\partial f/\partial\sigma] = 0$, то уравнение несжимаемости $v_1^e v_2^e v_3^e = 1$ эквивалентно уравнению

$$\partial v_r/\partial r + v_r/r = -2\alpha\,(E) \qquad (3.16)$$

Условие непрерывности осевой скорости v_z на упругопластической границе дает: $\alpha = (2E)^{-1}$. Из уравнения (3.16) следует, что $v_r = -\alpha r$. Таким образом, в пластической зоне компоненты скорости v_r, v_z имеют такой же вид (3.5), как и в области упругого ядра. Можно показать, что второе уравнение системы (3.15) удовлетворяется тождественно при подстановке в него величин $F_{\theta\theta}^{e\cdot}$, $F_{zz}^{e\cdot}$, $F_{\theta z}^{e\cdot}$ из (3.13). Первое уравнение системы (3.15) и условие непрерывности при $r = c$ будут удовлетворены, если положить, что $v_1^{e2} = E^{-1}$ в пластической зоне. Тогда уравнение (3.10) определяют квадраты упругих растяжений:

$$v_2^{e2} = k\Psi + \Xi, \qquad v_3^{e2} = -k\Psi + \Xi, \qquad v_1^{e2} = E^{-1}$$
$$\Psi \equiv (\Sigma_1 - E^{-1}\Sigma_{-1})^{-1}, \ \Xi \equiv [k^2(\Sigma_1 - E^{-1}\Sigma_{-1})^{-2} + E]^{1/2}$$
$$(c\,(E) < r < R_0 E^{-1/2}, \ E > E^*) \qquad (3.17)$$

Последнее уравнение системы (3.15) после ряда преобразований можно представить в виде

$$r\partial\psi''/\partial r - 2E\partial\psi''/\partial E + 2r\gamma\,(E)\,E\,\{[P\,(E) - 1/2]\cos^2\psi'' - [P\,(E) +$$
$$+ 1/2]\sin^2\psi''\} + 3P\,(E)\sin 2\psi'' = 0$$
$$P\,(E) \equiv [(2k)^{-2}\,E\Psi^{-2} + 1/4]^{1/2} \qquad (3.18)$$
$$(c\,(E) < r < R_0 E^{-1/2}, \ E > E^*)$$

При $r = c$ должно выполняться условие непрерывности $\psi'' = \psi'$, где угол ψ' определен формулой (3.2), следовательно,

$$\mathrm{tg}\,\psi''|_{r=c} = E\,(2\Xi - E^2 - E^{-1})^{1/2}(\Xi + k\Psi - E^2)^{-1} \qquad (3.19)$$

Угол ψ'' является решением нелинейной задачи Коши (3.18), (3.19) для уравнения в частных производных первого порядка со свободной начальной кривой, интеграл которой может быть найден методом характеристик [8].

4. Качественный анализ процесса упругопластического деформирования. Не интегрируя задачу Коши (3.18), (3.19), можно качественно исследовать напряженно-деформированное состояние стержня при кручении за пределом упругости. Отметим, что процесс нагружения не является простым, так как угол ψ'' зависит от E и, следовательно, главные оси тензора напряжений изменяют свою ориентацию при возрастании E. Напряженное состояние соответствует грани $\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$ призмы Треска. Площадки скольжения в актуальной конфигурации имеют нормали $\mathbf{v}'' = \cos(\psi'' - \pi/4)\,\mathbf{e}_z - \sin(\psi'' - \pi/4)\,\mathbf{e}_\theta$. Поверхности скольжения представляют собой коаксиальные цилиндрические поверхности $r = \text{const}$. Вектор касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}''$, действующий на площадке скольжения, имеет следующие физические компоненты: $\tau_r'' = 0$, $\tau_\theta'' = k\cos(\psi'' - \pi/4)$, $\tau_z'' = k\sin(\psi'' - \pi/4)$. Поэтому линии скольжения, т. е. линии, касающиеся в каждой точке направления $\boldsymbol{\tau}''$, представляют собой винтовые линии, намотанные на цилиндры $r = \text{const}$, под постоянным (для каждого цилиндра $r = \text{const}$) углом $\psi'' - \pi/4$. Радиальное сжатие материала является чисто упругой деформацией. Но это не означает, что стержень после закручивания за предел упругости и последующего снятия крутящего момента восстанавливается до своего отсчетного (естественного) состояния. Действительно, упругая часть деформации полностью обратима только для мысленных процессов, заканчивающихся полной разгрузкой.

Таким образом, полная упругопластическая деформация стержня при кручении может рассматриваться как суперпозиция чисто упругой деформации радиального сжатия и деформации сдвига вдоль винтовых линий, геометрия которых полностью определяется углом ψ''. Плоские сечения стержня в процессе упругопластического деформировании остаются плоскими, смещаясь вдоль оси z со скоростью $v_z = z/E$, одновременно сжимаясь в радиальном направлении со скоростью $v_r = -r/(2E)$ и поворачиваясь вокруг оси z с угловой скоростью $\gamma(E)\,z$.

Окружная компонента скорости v_θ определена с точностью до множителя $\gamma(E)$. Если допускать решения с разрывом касательной компоненты скорости вдоль поверхностей скольжения, то $\gamma(E)$ — в принципе произвольная функция параметра нагружения. Поэтому появляется возможность для каждой, взятой по произволу функции $\gamma(E)$ построить согласованное, всюду непрерывное поле напряжений. Вычисляя крутящий момент и осевое усилие, получим

$$M = {}^1/_2\pi c^3 E\Psi^{-1}(2\Xi - E^2 - E^{-1})^{1/2} + 2\pi k\int\limits_c^{R_0E^{-1/2}} r^2\sin 2\psi''\,dr$$

$$\begin{aligned}N &= \pi c^2(E^2 - E^{-1})\,\Psi^{-1} + {}^1/_2\pi c^2(E^{-1}\Sigma_{-1} - {}^1/_2\Sigma_1)(2\Xi - E^2 - E^{-1}) + \\ &+ {}^1/_2\pi(R_0{}^2E^{-1} - c^2)\{\Sigma_1(k\Psi + \Xi - E^{-1}) + \Sigma_{-1}[(k\Psi + \Xi)^{-1} - E]\} - \\ &- \pi k(R_0{}^2E^{-1} - c^2) - 6\pi k\int\limits_c^{R_0E^{-1/2}} r\cos^2\psi''\,dr\end{aligned}\qquad(4.1)$$

Радиус упругого ядра $r = c(E)$ определяется из уравнения $N = 0$. Следовательно, положение упругопластической границы и крутящий момент, соответствующие удлинению E, зависят от выбора угловой скорости $\gamma(E)\,z$ течения материала в пластической зоне. Задача кручения в теории течения при конечных деформациях статически неопределима: главные направления тензора напряжений зависят от выбора поля скоростей.

Рассмотрим предельное состояние, когда весь материал стержня переходит в состояние пластического течения. Значение удлинения $E = E_*$, при котором достигается предельное состояние, можно вычислить следующим образом: в силу симметрии $\operatorname{ctg}\psi''|_{r=0} = 0$ и поэтому из начального условия (3.19) следует, что предельное удлинение E_* — корень уравнения

$$-\Sigma_1E^4 + \Sigma_{-1}E^3 + 2kE^2 + \Sigma_1E - \Sigma_{-1} = 0 \qquad (4.2)$$

который должен превосходить значение E^*, удовлетворяющее неравенству $E^* > 1$. Таким образом, критерием перехода стержня в предельное состояние при кручении может служить величина E_*, которая зависит от коэффициентов реакции Σ_1, Σ_{-1} и предела текучести k. Переходя в равенстве (4.1) к пределу при $E \to E_*$, получим

$$M_* = \int_0^{R_0 E_*^{-1/2}} r^2 \sin 2\psi''|_{E=E_*} dr \tag{4.3}$$

где E_* — корень уравнения (4.2).

По теории малых деформаций величина предельного крутящего момента определяется следующим образом [9]:

$$M_*^{\inf} = 2/3\pi k R_0^3 \tag{4.4}$$

Оценивая интеграл в правой части равенства (4.3) и используя соотношение (4.4), получаем оценку

$$M_*/M_*^{\inf} \leqslant E_*^{-3/2} < 1 \tag{4.5}$$

на основании которой может быть сформулировано следующее утверждение: предельный крутящий момент цилиндрического стержня радиуса R_0, вычисленный по геометрически нелинейной теории течения, по меньшей мере в $E_*^{3/2}$ раз меньше предельного крутящего момента, определяемого по теории течения при малых деформациях, если только в этих теориях используется одно и то же условие пластичности (2.1).

5. **Полное решение упругопластической задачи кручения.** Полное решение задачи дается формулами (3.7), (3.8), (3.10), (3.17) (4.1). Угол ψ'' является интегралом задачи Коши (3.18), (3.19), и должен быть определен в криволинейном треугольнике, ограниченном на плоскости r, E кривыми $r = c(E)$, $r = R_0/E^{1/2}$, $E = E_*$. Задача Коши поставлена корректно, так как кривые $r = R_0 E^{-1/2}$, $r = 0$ — характеристики дифференциального уравнения (3.18). После замены переменных

$$\xi = \ln r, \quad \eta = \ln E^{1/2}, \quad w = \ln \operatorname{tg} \psi'' + 6\int [(2k)^{-2} (e^{\eta}\Sigma_1 - e^{-\eta}\Sigma_{-1})^2 + 1/4]^{1/2} d\eta$$

уравнение (3.18) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \partial w/\partial\xi - \partial w/\partial\eta + 2\gamma (e^{2\eta}) e^{2\eta+\xi} \times \\ \times \{e^{h(\eta)} [P(e^{2\eta}) - 1/2] e^{-w} - e^{-h(\eta)} [P(e^{2\eta}) + 1/2] e^{w}\} = 0 \\ h(\eta) = 6\int [(2k)^{-2} (e^{\eta}\Sigma_1 - e^{-\eta}\Sigma_{-1})^2 + 1/4]^{1/2} d\eta \end{gathered} \tag{5.1}$$

Интеграл $h(\eta)$ может быть выражен через эллиптические интегралы первого и второго рода следующим образом:

$$\begin{gathered} 1/6 h(\eta) = (1/4 + 4a^2b^2)^{1/2} [\mathbf{F}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{E}(\varepsilon, \delta) + \\ + [q^2(\eta) + 1/4]^{1/2} [q^2(\eta) - 4a^2b^2]^{1/2}/q(\eta) \\ \varepsilon = \arccos [2ab/q(\eta)], \quad \delta = (1 + 16a^2b^2)^{-1/2} \\ a^2 \equiv \Sigma_1/(2k), \quad b^2 \equiv -\Sigma_{-1}/(2k), \quad q(\eta) \equiv a^2 e^{\eta} + b^2 e^{-\eta} \end{gathered}$$

После преобразования к новым независимым переменным ω, η ($\omega = \xi + \eta$) и замены $\chi = e^{\omega}$ уравнение (5.1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати (ω входит как параметр)

$$\partial\chi/\partial\eta = 2e^{\omega}\gamma (e^{2\eta}) e^{\eta} \{e^{h(\eta)} [P(e^{2\eta}) - 1/2] - e^{-h(\eta)} [P(e^{2\eta}) + 1/2] \chi^2\} = 0 \tag{5.2}$$

Заменим переменную η по формуле

$$\varkappa = 2\int \gamma (e^{2\eta}) e^{\eta - h(\eta)} [P(e^{2\eta}) + 1/2] d\eta \tag{5.3}$$

и обозначим $\Omega(\varkappa) \equiv e^{2h(\eta)}[P(e^{2\eta}) - {}^1/_2]/[P(e^{2\eta}) + {}^1/_2]$, где вместо η следует подставить обращение интеграла (5.3). Тогда уравнение (5.2) приводится к виду

$$e^{-\omega}\partial\chi/\partial\varkappa = \Omega(\varkappa) - \chi^2 \tag{5.4}$$

Функция $\Omega(\varkappa)$ определяется по угловой скорости течения материала в пластической зоне.

Общий интеграл уравнения Риккати (5.4), а следовательно, и интеграл задачи Коши (3.18), (3.19) находятся квадратурами, если известно хотя бы одно частное решение. Удобно искать это частное решение в форме ряда по степеням $\varkappa$ (при необходимости центр разложения всегда можно сдвинуть):

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \varkappa^n, \quad \gamma_0 = 0, \quad \chi_n = \chi_n(\omega); \quad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \varkappa^n$$

Коэффициенты разложения χ_n определяются по рекуррентной формуле

$$(m+1)\, e^{-\omega}\chi_{m+1} = \Omega_m - \sum_{p=1}^{m-1} \chi_p \chi_{m-p}, \quad m = 2, 3, \ldots$$

$$\chi_1 = e^{\omega}\Omega_0, \quad \chi_2 = {}^1/_2 e^{\omega}\Omega_1$$

Формальный ряд по степеням $\varkappa$, представляющий интеграл $\chi(\varkappa, \omega)$ уравнения Риккати (5.4), будет также и фактическим решением уравнения Риккати в силу теоремы Коши о существовании и единственности аналитического решения для дифференциального уравнения с аналитической правой частью (см., например, [10]), если $\Omega(\varkappa)$ считать аналитической функцией $\varkappa$. Последнее условие удовлетворяется, если угловая скорость $\gamma(e^{2\eta})$ — положительная аналитическая функция η. Действительно, тогда существует аналитическая функция (обращение интеграла (5.3)) $\eta = \eta(\varkappa)$ и так как $h(\eta)$, $P(e^{2\eta})$ — аналитические функции η, то и функция $\Omega(\varkappa)$ будет аналитической. Следствием указанной теоремы Коши является также сходимость рекуррентных соотношений для χ_m.

Приведенное решение задачи о кручении цилиндрического стержня является полным, так как определены и тензор напряжений, и поле скоростей в упругой и пластической зонах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rivlin R. S.* Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Phil. Trans. Roy. Soc. L. Ser. A. 1949. V. 242. № 845. P. 173—195.
2. *Lee E. H.* Elastic — plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1—6.
3. *Lee E. H.* Some comments on elastic-plastic analysis // Intern. J. Solids and Struct. 1981. V. 17. № 9. P. 859—872.
4. *Truesdell C.*, *Noll W.* The non-linear field theories of mechanics // Handbuch der Physik. Bd III/3. B.: Springer-Verlag, 1965. 602 p.
5. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз. 1962. 284 с.
6. *Green A. E.*, *Naghdi P. M.* A general theory of an elastic-plastic continuum // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1965. V. 18. № 4. P. 251—281.
7. *Lubarda V. A.*, *Lee E. H.* A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. P. 35—40.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 407 с.
10. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2. Ч. 2. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1933. 287 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1988