Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 6, 1989

УДК 539.3 + 624.074

В. Д. Потапов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Исследуется устойчивость движения упругого стержня, расположенного в вязкой среде и сжатого силой, являющейся случайным процессом. Получены условия устойчивости стержня при действии силы в виде стационарного процесса с дробно-рациональной спектральной плотностью. Анализируется зависимость статистических моментов амплитуды конечного прогиба стержня при стационарном режиме движения от параметров сжимающей силы и амплитуды начального искривления. Ряд вопросов устойчивости и продольного изгиба вязкоупругих конструкций, находящихся под действием нагрузок в виде случайных процессов, рассмотрен в [1]—[3].

1. Стационарный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью. Рассмотрим шарнирно опертый по концам упругий стержень длиной l, сжатый силами F. Стержень находится в сплошной вязкой среде. Уравнение равновесия для него имеет вид

$$\partial w/\partial t = -A\,\{EIw^{\mathrm{IV}} + [F_0 + F_1(t)]\,w''\} \tag{1.1}$$

Здесь A — константа вязкости материала среды, F_0, $F_1(t)$ — детерминированная (постоянная во времени) составляющая сжимающей нагрузки и случайная пульсация с нулевым математическим ожиданием. Остальные обозначения общепринятые.

Пусть в начальный момент времени прогиб стержня определяется синусоидой

$$w(0, x) = f_k^\circ \sin(k\pi x/l)$$

Ищем решение уравнения (1.1) в виде такой же синусоиды, амплитуда $f_k(t)$ которой — решение уравнения

$$df_k/d\tau + k^4\,[(1-\alpha_k) - \beta_k\psi(\tau)]\,f_k = 0 \tag{1.2}$$

$$\tau = \gamma t, \quad \gamma = \frac{\pi^4 EIA}{l^4}, \quad \alpha_k = \frac{F_0 l^2}{k^2\pi^2 EI}, \quad \beta_k\psi(\tau) = \frac{F_1(\tau)\,l^2}{k^2\pi^2 EI}$$

(β_k — детерминированная постоянная).

Предположим, что случайный процесс $\psi(\tau)$ — результат прохождения нормального «белого шума» через линейный фильтр

$$d^i\psi/d\tau^i + a_1 d^{i-1}\psi/d\tau^{i-1} + \ldots + a_i\psi = \mu\xi \tag{1.3}$$

где $a_1, \ldots, a_i$, μ — постоянные.

При квазистатической постановке решение стохастически нелинейной задачи сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$f_k(0) = f_k^\circ, \quad \psi(0) = d\psi/d\tau\,|_{\tau=0} = \ldots = d^{i-1}\psi/d\tau^{i-1}\,|_{\tau=0} = 0$$

Искомые функции f_k, ψ, $d\psi/d\tau, \ldots, d^{i-1}\psi/d\tau^{i-1}$ определяют компоненты многомерного марковского процесса, и их совместная плотность распределения вероятностей может быть найдена из уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК). Следует обратить внимание на то, что это уравнение имеет одинаковый вид при рассмотрении белого шума как в смысле Ито, так и в смысле Стратоновича.

Введением новой переменной $z_k = \ln f_k$ нелинейная задача сводится к линейной, причем

$$dz_k/d\tau = -k^4 [(1 - \alpha_k) - \beta_k \psi], \quad z_k (0) = \ln f_k^\circ \tag{1.4}$$

Для определения плотности распределения процесса z_k в момент времени τ достаточно найти его математическое ожидание и дисперсию.

После усреднения левой и правой частей равенства (1.4) по множеству реализаций получим уравнение относительно математического ожидания, в результате интегрирования которого имеем

$$\langle z_k \rangle = \ln f_k^\circ - k^4 (1 - \alpha_k) \tau \tag{1.5}$$

Случайная флуктуация функции z_k определяется из уравнения

$$dz_k^*/d\tau = k^4 \beta_k \psi, \qquad z_k^* = z_k - \langle z_k \rangle \tag{1.6}$$

При учете уравнения (1.3) отсюда следует уравнение

$$\frac{d^{i+1} z_k^*}{d\tau^{i+1}} + a_1 \frac{d^i z_k^*}{d\tau^i} + \ldots + a_i \frac{dz_k^*}{d\tau} = k^4 \beta_k \mu \xi$$

решение которого найдем, воспользовавшись преобразованием Лапласа

$$z (p) = k^4 \beta_k \mu (p \Delta (p))^{-1} F (p) \tag{1.7}$$

$$\Delta (p) = p^i + a_1 p^{i-1} + \ldots + a_i$$

$$\left(z (p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} z_k^* (\tau) \, d\tau, \qquad F (p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} \xi (\tau) \, d\tau \right)$$

Наложим одно ограничение на постоянные коэффициенты уравнения (1.3): будем считать, что все корни $p_1, p_2, \ldots, p_i$ характеристического уравнения $\Delta (p) = 0$ имеют отрицательные вещественные части.

Выражение $(p\Delta (p))^{-1}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{p \Delta (p)} = \frac{1}{a_i p} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\nu_j} c_j^{(\lambda)} (p - p_j)^{-\lambda}, \qquad \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = i \tag{1.8}$$

причем ν_j — кратность корня p_j, $c_j^{(\lambda)}$ — постоянные, которые находятся путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях p в числителях левой и правой частей равенства (1.8).

Из уравнения (1.7) при учете (1.8) имеем

$$\langle z_k^{*2} (\tau) \rangle = k^8 \beta_k^2 \mu^2 \left[\frac{\tau}{a_i^2} + \frac{2}{a_i} \int_0^\tau \Phi (\tau, \theta) \, d\theta + \int_0^\tau \Phi^2 (\tau, \theta) \, d\theta \right] \tag{1.9}$$

$$\Phi (\tau, \theta) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\nu_j - 1} \frac{1}{(\lambda - 1)!} c_j^{(\lambda)} \exp [p_j (\tau - \theta)] (\tau - \theta)^{\lambda - 1}$$

Плотности распределения вероятностей случайных функций $z_k (\tau)$, $f_k (\tau)$ определяются выражениями

$$v [z_k (\tau)] = [2\pi \langle z_k^{*2} (\tau) \rangle]^{-1/2} \exp \left\{ - \frac{[z_k (\tau) - \langle z_k (\tau) \rangle]^2}{2 \langle z_k^{*2} (\tau) \rangle} \right\}$$

$$v [f_k (\tau)] = [2\pi \langle z_k^{*2} (\tau) \rangle f_k^2 (\tau)]^{-1/2} \exp \left\{ - \frac{[\ln f_k (\tau) - \langle z_k (\tau) \rangle]^2}{2 \langle z_k^{*2} (\tau) \rangle} \right\}$$

Располагая этими плотностями, получим моменты n-го порядка амплитуды прогиба стержня

$$\langle f_k^n(\tau)\rangle = \langle \exp[nz_k(\tau)]\rangle = \exp[n\langle z_k(\tau)\rangle + {}^1/_2 n^2 \langle z_k^{*2}(\tau)\rangle] \qquad (1.10)$$

Интегралы от функций $\Phi(\tau, \theta)$, $\Phi^2(\tau, \theta)$, фигурирующие в равенстве (1.9), содержат слагаемые типа

$$I_1 = \frac{1}{(\lambda-1)!} c_j^{(\lambda)} \int\limits_0^\tau (\tau-\theta)^{\lambda-1} \exp[p_j(\tau-\theta)]\, d\theta$$

Поскольку вещественные части корней $p_1, p_2, \ldots, p_j$ отрицательны, величины I_1 с увеличением τ стремятся к постоянным, значения которых зависят от $c_j^{(\lambda)}$, p_j и λ.

Таким образом, начиная с некоторого достаточно большого момента времени τ для моментов $\langle f_k^n(\tau)\rangle$ справедливы соотношения

$$\langle f_k^n(\tau)\rangle \leqslant f_k^{\circ n} \exp[-nk^4(1-\alpha_k)\tau + {}^1/_2 n^2 k^8 \beta_k^2 \mu^2 a_i^{-2}\tau + \mathrm{const}]$$

Отсюда следует, что при неограниченном увеличении времени статистические моменты амплитуды прогиба стержня стремятся к нулю, если соблюдаются условия

$$\alpha_k < 1 - {}^1/_2 n\mu^2 a_i^{-2} k^4 \beta_k^2 = 1 - {}^1/_2 n\mu^2 a_i^{-2}\beta_1^2 \qquad (1.11)$$

Таким образом, неравенства (1.11) являются критерием асимптотической n-устойчивости [4] движения стержня (асимптотической устойчиво с и по отношению к моментам n-го порядка решения уравнения (1.2)) Поскольку $\alpha_k < \alpha_1$ при $k > 1$, то очевидно, что условия (1.11) будут выполняться для любого k, если выполняется условие для $k = 1$.

Отсюда можно сделать следующий вывод: если движение стержня асимптотически n-устойчиво в случае, когда начальное искривление его оси описывается одной полуволной синусоиды, то оно будет асимптотически устойчиво и в случаях, когда его начальный прогиб описывается одной синусоидой с большим числом полуволн. Заметим, что при анализе устойчивости упругого стержня в детерминистической постановке эйлерова критическая сила также определяется из условия, что в момент бифуркации искривление оси стержня описывается одной полуволной синусоиды.

Для сравнения приведем условие устойчивости, найденное [1] в предположении, что процесс $\psi(\tau)$ представляет собой белый шум $\xi(\tau)$ в смысле Стратоновича. В этом случае условие асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (1.2) по отношению к моментам n-го порядка оказалось следующим: $\alpha_k < {}^1/_2 n\beta_1^2$. Условие асимптотического затухания момента $\langle f_k^n(\tau)\rangle$ (1.11) при случайном процессе $\psi(\tau)$, имеющем дробно-рациональную спектральную плотность, оказывается точно таким же, если принять коэффициент интенсивности белого шума равным μ/a_i. Следовательно, условие устойчивости медленного движения упругого стержня в вязкой среде может быть получено из рассмотрения не системы $i+1$ стохастических дифференциальных уравнений первого порядка, а одного (более простого) уравнения.

Пример. Допустим, что случайный процесс $\psi(\tau)$ — результат прохождения нормального белого шума через линейный фильтр первого порядка

$$d\psi/d\tau = -\eta\psi + \mu\xi, \quad \psi(0) = 0; \quad \eta, \mu = \mathrm{const} \qquad (1.12)$$

Из уравнений (1.6), (1.12) найдем

$$\langle z_k^{*2}(\tau)\rangle = k^8\beta_k^2\mu^2\eta^{-2}[\tau - 2\eta^{-1}(1-e^{-\eta\tau}) + {}^1/_2\eta^{-1}(1-e^{-2\eta\tau})]$$

Моменты амплитуды прогиба стержня таковы:

$$\langle f_k^n(\tau)\rangle = \{f_k^\circ \exp[(-1+\alpha_k + {}^1/_2 n\mu^2\eta^{-2}\beta_1^2)k^4\tau + n\mu^2\eta^{-3}k^8\beta_k^2(-{}^3/_4 + e^{-\eta\tau} - {}^1/_4 e^{-2\eta\tau})]\}^n$$

Очевидно, что при неограниченном увеличении времени моменты стремятся к нулю, если соблюдается условие (1.11) при $a_i = \eta$.

2. Динамическая постановка задачи. Для оценки влияния инерционных сил на устойчивость стержня, находящегося под действием продольной силы в виде случайного стационарного процесса, вновь рассмотрим тот же самый стержень, уравнение движения для которого отличается от (1.1) дополнительным слагаемым $-Amd^2w/dt^2$ в правой части, где m — погонная масса стержня, постоянная по его длине.

Считая, что искривление стержня в начальный и текущий моменты времени представимы в виде одной синусоиды, для амплитуды прогиба получим уравнение

$$d^2f_k/d\tau^2 + \Omega^2 df_k/d\tau + k^4\Omega^2 [1 - \alpha_k - \beta_k\psi(\tau)] f_k = 0, \qquad \Omega^2 = \pi^2 EI/(ml^4\gamma^2) \tag{2.1}$$

Допустим, что функция $\psi(\tau)$ — нормальный белый шум $\xi(\tau)$.

В теории устойчивости стохастических систем известна теорема [4], в соответствии с которой для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решения уравнения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_2 > \Delta/2$, где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 1 & k^4\Omega^2(1-\alpha_k) \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -k^4\Omega^4\beta_1^2 \\ 1 & \Omega^2(1-\alpha_k) \end{vmatrix}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_k < 1 \text{ и } \alpha_k < 1 - {}^1/_2\beta_1^2$$

Второе из этих условий совпадает с условием асимптотической устойчивости стержня в среднеквадратичном при квазистатической постановке задачи [1].

Были сформулированы также [4] достаточные условия асимптотической устойчивости решения уравнения (2.1) по отношению к статистическим моментам n-го порядка: $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_2 > {}^1/_2(n-1)\Delta$, которым соответствуют соотношения

$$\alpha_k < 1, \; \alpha_k < 1 - {}^1/_2(n-1)\beta_1^2$$

Последнее неравенство совпадает с условием асимптотической n-устойчивости стержня при квазистатической постановке задачи [1], где они были необходимыми и достаточными.

Заметим, что условия устойчивости стержня как динамической системы с одной степенью свободы при действии на него силы в виде гауссовского белого шума были получены в книге [5]. Там же рассмотрено применение метода моментных функций к исследованию устойчивости стержня при действии на него стационарной нагрузки с дробно-рациональной спектральной плотностью.

3. Устойчивость стержня как системы с бесконечным числом степеней свободы. Рассмотрим стержень, прогиб которого в начальный момент времени равен

$$w(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^\circ \sin\frac{k\pi}{l}x$$

При возбуждении стержня нагрузкой в виде случайного стационарного процесса из квазистатической постановки задачи следует

$$w(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^\circ \exp[-k^4(1-\alpha_k)\tau + k^2 z_1^*(\tau)] \sin\frac{k\pi}{l}x$$

В случае, когда $\psi(\tau)$ — гауссовский процесс, справедливо равенство

$$\langle \exp[\delta z_1^*(\tau)]\rangle = \exp[{}^1/_2\delta^2 \langle z_1^*(\tau)\rangle]$$

при учете которого выражение для статистического момента n-го порядка прогиба стержня запишем в виде

$$\langle w^n(\tau, x)\rangle = \sum_{i_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=1}^{\infty} f_{i_1}{}^\circ \ldots f_{i_n}{}^\circ \exp[\varkappa(\tau)] \sin\frac{i_1\pi}{l}x \ldots \sin\frac{i_n\pi}{l}x$$

$$\varkappa(\tau) = [-(i_1^4 + \ldots + i_n^4) + \delta\alpha_1]\,\tau + {}^1/_2\delta^2 \langle z_1^{*2}(\tau)\rangle$$

$$\delta = i_1^2 + \ldots + i_n^2$$

Принимая во внимание соотношение (1.11), условие асимптотической устойчивости стержня по отношению к моментам n-го порядка запишем следующим образом:

$$\alpha_1\delta < (i_1^4 + \ldots + i_n^4) - {}^1/_2(\mu a_i^{-1}\delta\beta_1)^2$$

Учитывая равенство

$$n\delta^{-2}(i_1^4 + \ldots + i_n^4) - 1 = \delta^{-2}[(i_1^2 - i_2^2)^2 + (i_1^2 - i_3^2)^2 + \ldots + (i_{n-1}^2 - i_n^2)^2]$$

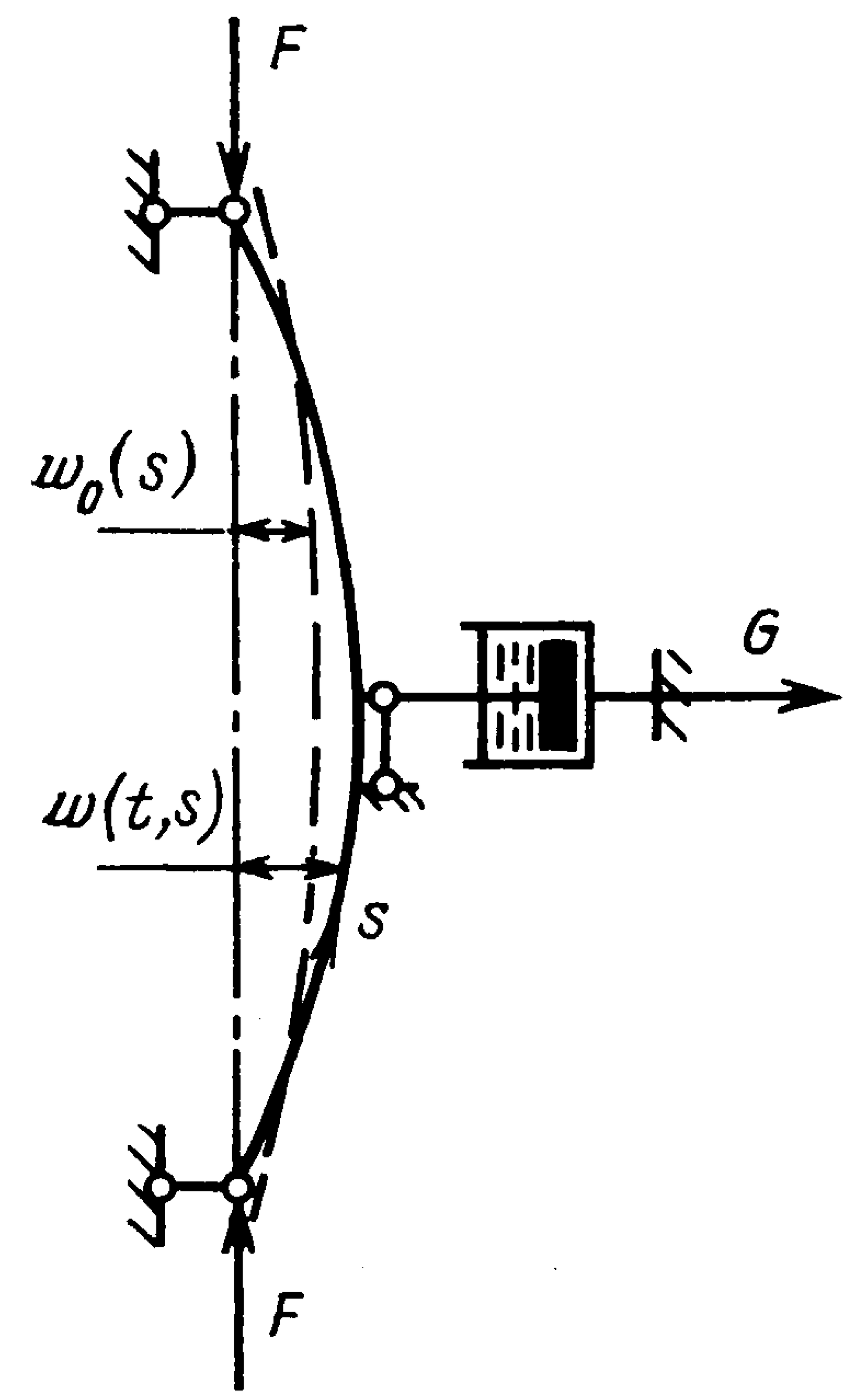
имеем

$$\alpha_1 < \frac{\delta}{n}\left\{\frac{1}{\delta^2}[(i_1^2 - i_2^2)^2 + \ldots + (i_{n-1}^2 - i_n^2)^2] + \left(1 - \frac{n\mu^2}{2a_i^2}\beta_1^2\right)\right\}$$

Очевидно, что полученное неравенство для безразмерного значения математического ожидания сжимающей силы ($\alpha_1 > 0$) соблюдается тем более, если оно соблюдается при $i_1 = \ldots = i_n = 1$:

$$\alpha_1 < 1 - {}^1/_2 n(\mu a_i^{-1}\beta_1)^2$$

Таким образом, стержень (как распределенная система) n-устойчив по отношению к произвольному (детерминированному) начальному возмущению прогиба, если соблюдается условие n-устойчивости стержня по отношению к начальному возмущению прогиба, задаваемому в виде одной полуволны синусоиды. Заметим, что этот вывод сохраняется и в том случае, когда амплитуды искривления стержня в начальный момент времени статистически независимы от нагрузки и статистические моменты n-го порядка для них существуют.



Фиг. 1

Полученный результат имеет принципиальное значение. Напомним, что условие устойчивости стержня, сжатого постоянной (детерминированной) силой, следует из анализа его поведения при наличии прогиба в виде одной полуволны синусоиды. Присутствие в разложении прогиба других синусоид (с бóльшим порядковым номером) влияет на величину прогиба, но не меняет условие его устойчивости. Как видно, при стохастической постановке задачи ситуация оказывается аналогичной.

4. Стационарное решение в случае конечных прогибов стержня. Рассмотрим стержень, имеющий начальное искривление $w_0(s)$. Для упрощения последующих рассуждений будем считать, что в середине стержня наложена вязкая связь, в которой возникает реакция $G = -2w^{\cdot}\,(Al)$ (фиг. 1). Полагая прогибы стержня конечными, но достаточно малыми, запишем уравнение медленного движения

$$-EI\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right]-\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial s}\right)^2\right]\right\}=$$

$$=Fw-\frac{1}{Al}w^{\cdot}\int_0^s\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right]ds,\qquad 0\leqslant s\leqslant\frac{l}{2}\tag{4.1}$$

При $l/2 \leqslant s \leqslant l$ аналогичное уравнение записывается из условия симметрии стержня.

Допустим, что $w_0\,(s) = f_0 \sin \pi l^{-1} s$. Ищем $w\,(t, s)$ в виде

$$w\,(t, s) = f\,(t)\sin \pi l^{-1} s$$

После применения процедуры Бубнова — Галеркина — Канторовича — Власова из уравнения (4.1) получим

$$d\zeta/d\tau = -\nu\left[\zeta\left(1+{}^1\!/_8\zeta^2\right)-\zeta_0\left(1+{}^1\!/_8\zeta_0^2\right)-\alpha\zeta+\varkappa\zeta^2(\zeta-\zeta_0-\alpha\zeta)\right];$$

$$\tau=\gamma t,\quad \zeta=\pi\frac{f}{l},\quad \zeta_0=\pi\frac{f_0}{l},\quad \nu=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)^{-1},\quad \varkappa=\nu\left(\frac{1}{2\pi^2}+\frac{1}{16}\right)$$

Будем считать, что $\alpha = \alpha_1 + \beta_1\xi\,(\tau)$; $\alpha_1, \beta_1 = \text{const}$, $\xi\,(\tau)$ — гауссовский дельта-коррелированный «белый шум».

Далее ограничимся рассмотрением только стационарного режима, для которого уравнение ФПК принимает вид $(\partial v/\partial\tau = 0)$.

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}(av)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(b^2 v)=0$$

причем

$$a=\mu\left\{[(1-\alpha_1)\zeta-\zeta_0](1+\varkappa\zeta^2)+{}^1\!/_8(\zeta^3-\zeta_0^3)\right\},\quad b=\mu\beta_1\zeta(1+\varkappa\zeta^2)$$

Плотность распределения амплитуды прогиба стержня определяется выражением

$$v(\zeta)=c\zeta^{-\rho}(1+\varkappa\zeta^2)^{\rho/2-3}\exp\left(-\frac{2}{\mu\beta_1^2}\varepsilon\right)$$

$$\varepsilon=\frac{\zeta_0}{\zeta}\left(1+\frac{\zeta_0^2}{8}\right)-\frac{1-\varkappa^2\zeta_0^3\zeta}{16\varkappa(1+\varkappa\zeta^2)}+\sqrt{\varkappa}\,\zeta_0\left(1+\frac{3}{16}\zeta_0^2\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\varkappa}\,\zeta,$$

$$\rho=2\left(1+\frac{1-\alpha_1}{\mu\beta_1^2}\right),\quad\left(\int_0^\infty v(\zeta)\,d\zeta=1\right)$$

Постоянная c находится из условия нормировки, приведенного выше в скобках.

Статистический момент n-го порядка величины ζ равен

$$\langle\zeta^n\rangle=c\int_0^\infty\zeta^{n-\rho}(1+\varkappa\zeta^2)^{\rho/2-3}\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\mu\beta_1^2}\right)d\zeta\tag{4.2}$$

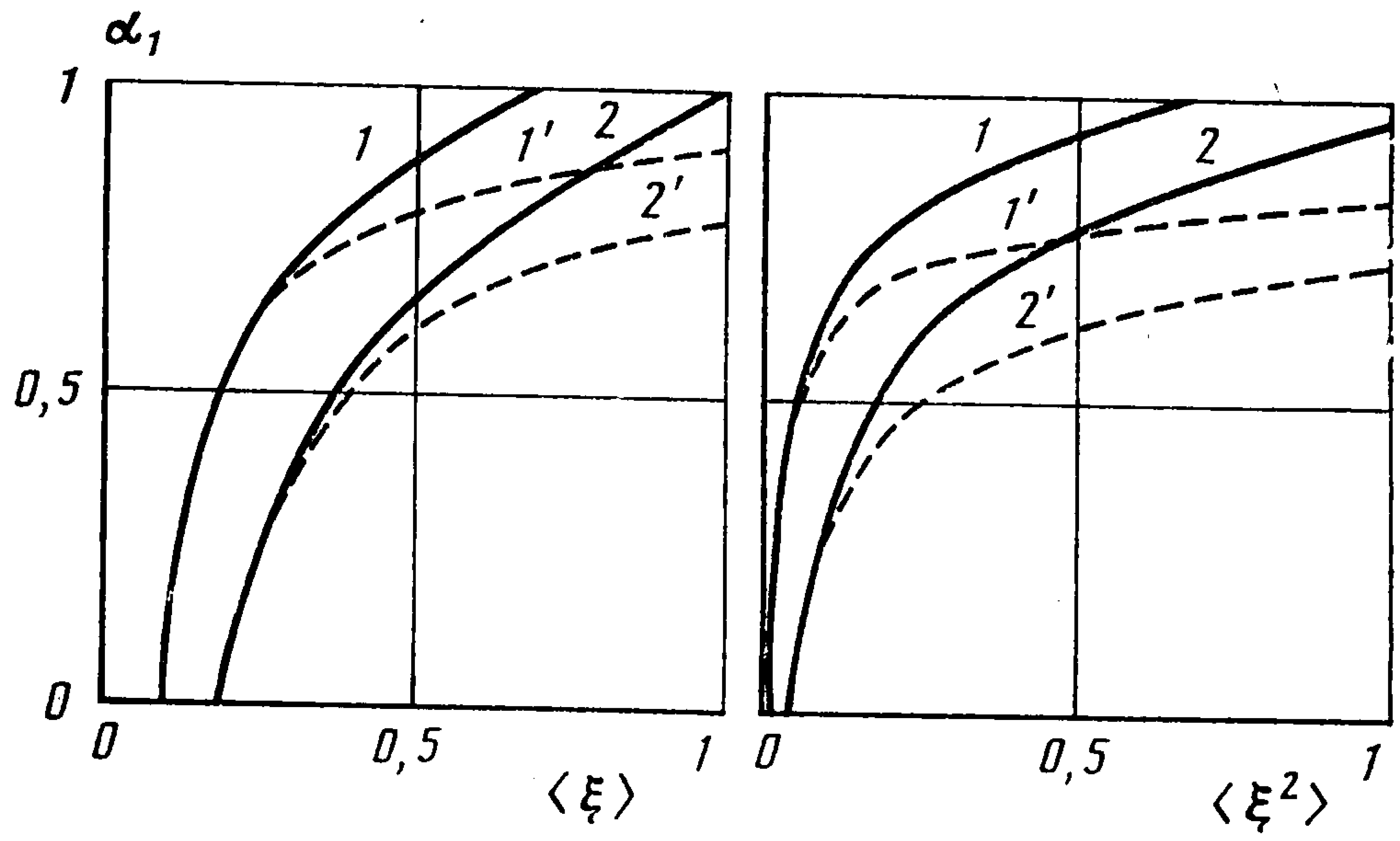
Допустим, что $\zeta_0 = 0$. Тогда

$$\frac{1}{c}=\int_0^\infty\zeta^{-\rho}(1+\varkappa\zeta^2)^{\rho/2-3}\exp\left[-\frac{1}{8\mu\beta_1^2\varkappa(1+\varkappa\zeta^2)}\right]d\zeta$$

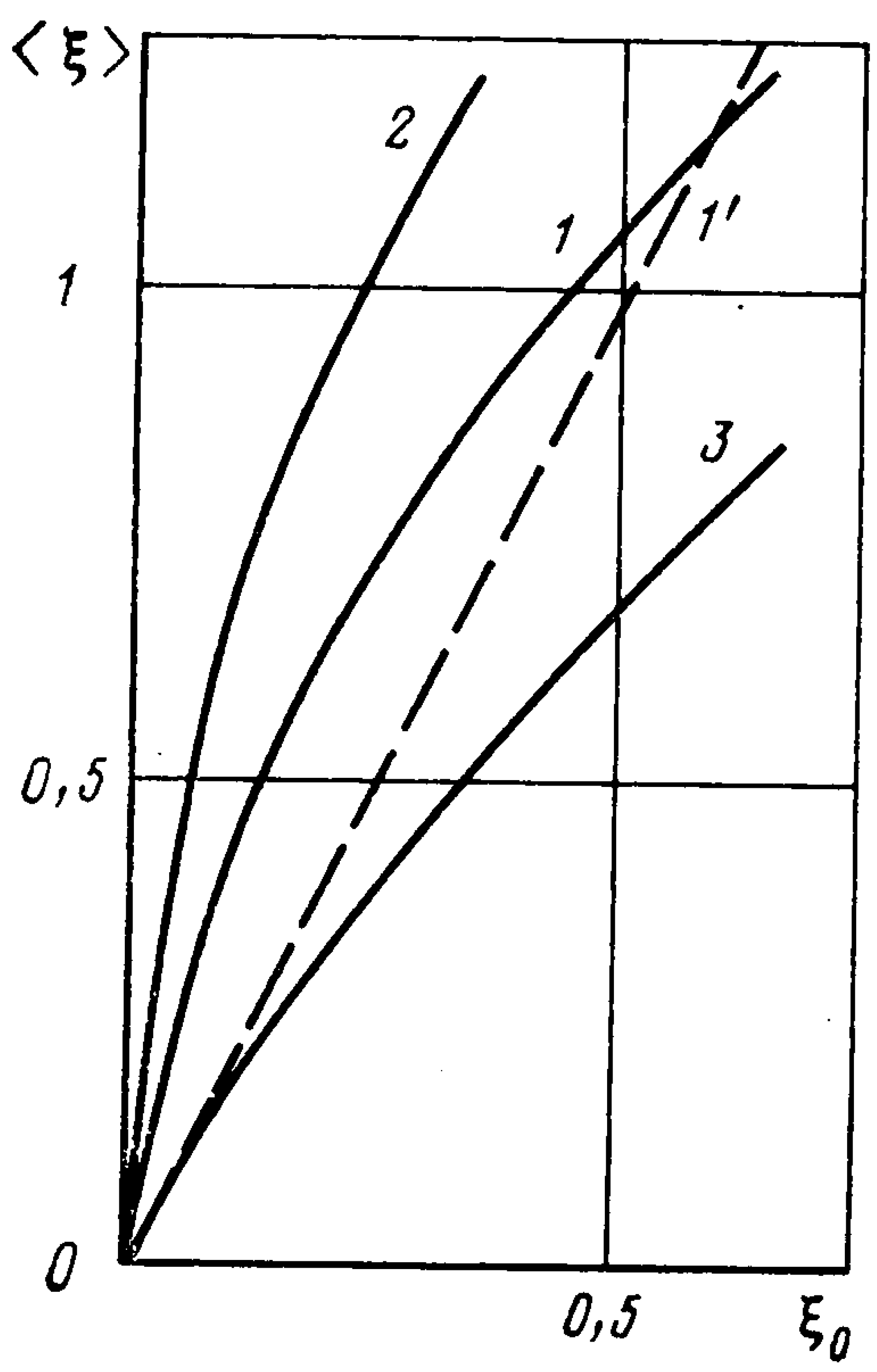
Для существования плотности распределения $v\,(\zeta)$ и статистических моментов необходимо выполнение условий

$$\alpha_1>1+{}^1\!/_2\,\mu\beta_1^2,\quad \alpha_1>1-{}^1\!/_2(n-1)\,\mu\beta_1^2\,(n<5)\tag{4.3}$$

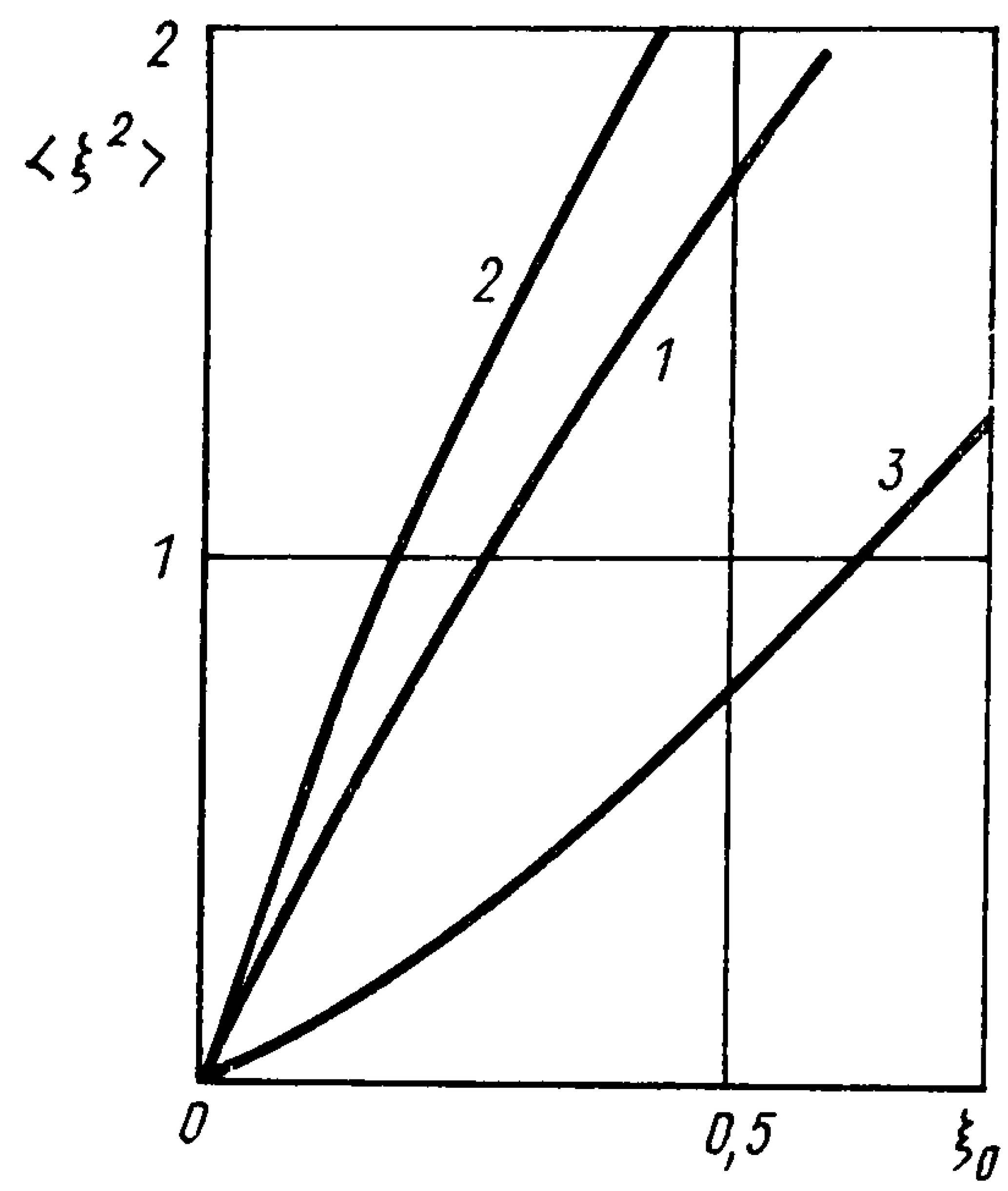
Очевидно, при удовлетворении первого соотношения соблюдается и второе.



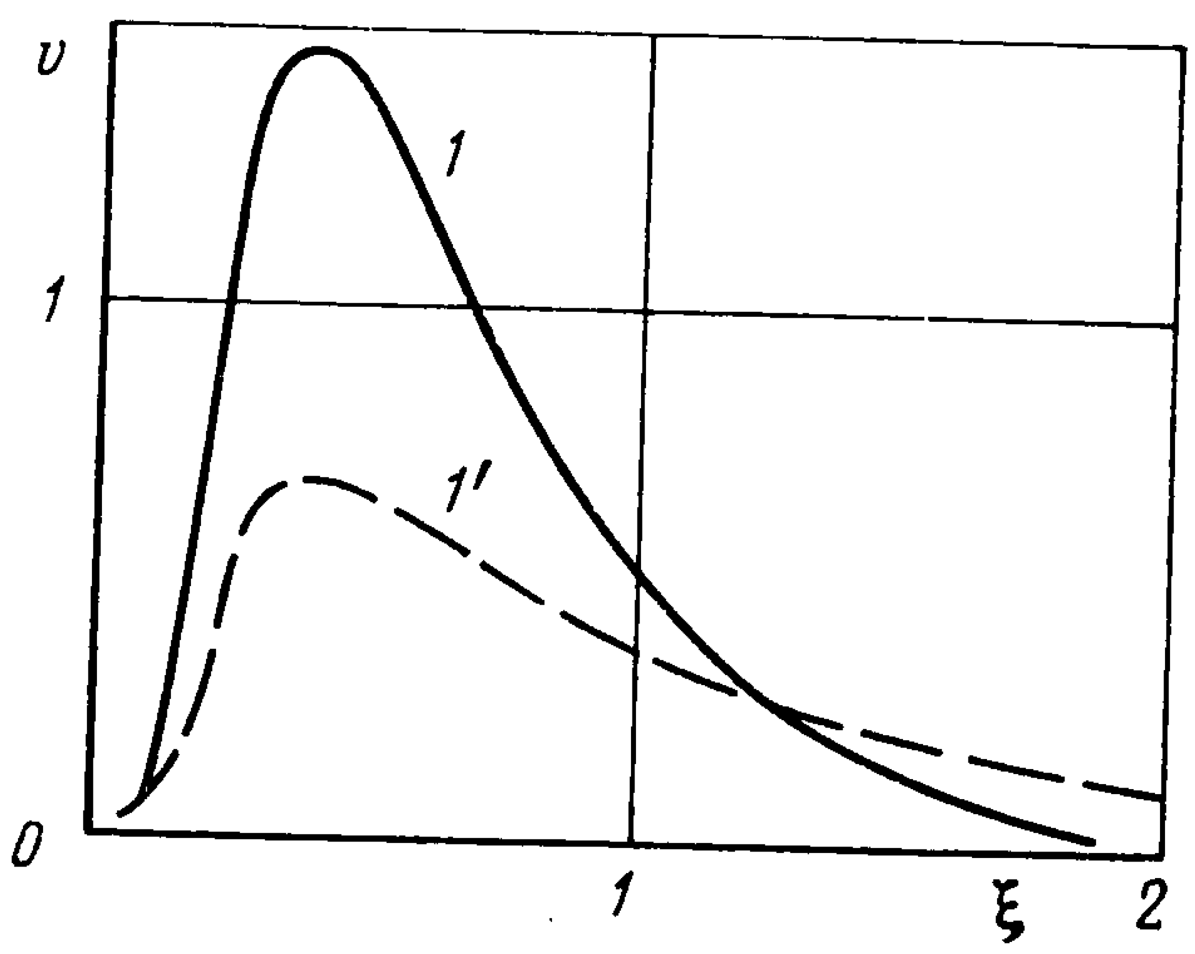
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Из рассмотрения линейной задачи можно показать, что условие

$$\alpha_1 < 1 - {}^1/_2 (n - 1) \mu \beta_1^2 \tag{4.4}$$

является условием асимптотической n-устойчивости движения прямого стержня. Как видно, неравенства (4.3) противоположны неравенству (4.4). Отсюда следует, что при нарушении условий асимптотической устойчивости движения стержня может возникнуть стационарный режим. Критерием появления стационарного режима является существование плотности распределения его амплитуды.

Здесь видна аналогия в результатах решения стохастической и детерминированной задач.

Действительно, при сжатии прямого стержня постоянной (детерминированной) силой ме́ньшей эйлеровой ($\alpha_1 < 1$) в нем имеет место только одна форма равновесия — прямолинейная, которая является устойчивой. Если же сила больше эйлеровой ($\alpha_1 > 1$), то наряду с прямолинейной существует и другая — изгибная форма равновесия стержня, причем первая не устойчива, а вторая устойчива.

Анализ выражения (4.2) свидетельствует о том, что при $\zeta_0 \neq 0$ момент $\langle \zeta^n \rangle$ при $n < 5$ существует при любых α_1, β_1. Заметим, что в случае малых прогибов статистический момент n-го порядка существует только при выполнении условий (4.4).

Здесь вновь уместно отметить аналогию в решениях детерминированной и стохастической задач. При рассмотрении линейной детерминированной задачи о продольном изгибе стержня, имеющего начальное искривление оси, решение существует, если сжимающая сила меньше эйлеровой ($\alpha_1 < 1$). Если же учитываются конечные прогибы стержня, то решение задачи существует при любом значении сжимающей силы.

Интересно сравнить результаты решения той же самой задачи при линейной и нелинейной постановках. На фиг. 2 показаны графики изменения первого и второго моментов величины ζ в зависимости от α_1 при $\beta_1 = 0{,}5$. Кривые *1*, *2* построены по результатам решения нелинейной задачи при $\zeta_0 = 0{,}1$ и $0{,}2$. Кривые *1'*, *2'* соответствуют решению линейной задачи. На фиг. 3, 4 приведены графики изменения первого и второго моментов величины ζ в зависимости от ζ_0. Кривым *1—3* отвечают следующие значения параметров: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0{,}5$; $\alpha_1 = 0{,}5$ и $\beta_1 = 1$. При линейной постановке указанные моменты не существуют за исключением одного случая $\langle \zeta \rangle \sim \zeta_0$ при $\alpha_1 = 0{,}5$ и $\beta_1 = 1$, что показано на фиг. 3 линией *1'*. На фиг. 5 представлены графики изменения стационарной плотности распределения вероятностей при $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0{,}5$ и $\zeta_0 = 0{,}1$. Кривая *1* соответствует решению нелинейной задачи, а *1'* — линейной задачи.

Как видно из представленных результатов, учет конечных прогибов приводит не только к количественному, но и к качественному отличию в результатах по сравнению с решением задачи в предположении малости прогибов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов В. Д.* Устойчивость элементов конструкций, находящихся под действием стационарных нагрузок // ПМТФ. 1981. № 4. с. 151—155.
2. *Потапов В. Д.* Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1985. 312 с.
3. *Арутюнян Н. Х.*, *Дроздов А. Д.*, *Колмановский В. Б.* Устойчивость вязкоупругих тел и элементов конструкций // Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 19. С. 3—77.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
5. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1988