УДК 539.374

А. И. Бунимович, Г. Е. Якунина

О ФОРМЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ БЕЗОТРЫВНОМ ПРОНИКАНИИ В ПЛАСТИЧЕСКИ СЖИМАЕМЫЕ СРЕДЫ

В работе [1] была сформулирована вариационная задача о форме тонких тел вращения минимального сопротивления, проникающих с постоянной скоростью в пластически сжимаемые и упругопластические среды, моделирующие соответственно грунты и металлы, в предположении справедливости гипотезы плоских сечений. Был проведен анализ решения и найдены оптимальные тела вращения, проникающие в пластически сжимаемые среды, при наличии трения и при задании одного из геометрических параметров, определяющих форму тела.

Ниже в тех же предположениях решается более сложная задача об оптимальной форме тела вращения при одновременном задании двух геометрических параметров, определяющих его форму.

1. Постановка задачи. Сила сопротивления D, действующая на безотрывно проникающее с постоянной скоростью u в пластически сжимаемую среду тонкое остроконечное тело вращения длины $x_k = L$ с осью x и образующей

$$y = f(x), \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant k_0 = \text{const}, \quad f''(x) < 0, \quad f(0) = 0 \tag{1.1}$$

определяется функционалом

$$D = 2\pi \int\limits_0^{x_k} p_0 (f' + \mu_0) f\, dx, \qquad p_0 = Af'^2 + Bff'' + G = \beta^2 \tag{1.2}$$

где p_0 — давление среды на поверхность проникающего тела, μ_0 — коэффициент сухого трения, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $G \geqslant 0$ зависят от свойств среды [1, 2].

В ряде задач, где существенны как линейные размеры, так и внутренние габариты проникающего тела наиболее целесообразно определять его форму заданием двух геометрических параметров, выбор которых зависит от конструктивных требований. При этом, как следует из [1], в качестве одного из параметров целесообразно выбрать максимальный диаметр тела $d = 2R_0$. В качестве второго параметра может быть выбрана длина тела L, его объем V или боковая поверхность S.

2. Форма тела минимального сопротивления при задании его длины L и максимального диаметра d. Решение задачи ищется в классе функций $f(x)$ с закрепленными концами:

$$f(0) = 0, \; f(L) = d/2 = R_0.$$

Так как объем тела V и площадь поверхности S произвольны, то, как показано в [1] на основе подробного анализа условий минимума, вдоль каждой из дуг, из которых может состоять экстремаль, должно выполняться уравнение

$$\Phi(f') f = -C_1 + \lambda_4' f' - \lambda_5 k_0 + \lambda_6 G + \lambda_6' Bff' - \lambda_6 f'^2 (A - B), \quad k_0 = f' + \alpha^2 \tag{2.1}$$
$$\Phi(f') = 2(A - B) f'^3 + \mu_0 (A - 2B) f'^2 - \mu_0 G$$

где $\lambda_4(x)$, $\lambda_5(x)$, $\lambda_6(x)$ — множители Лагранжа. Необходимые условия минимума имеют вид [1]

$$\lambda_4(x) \geqslant 0, \quad \lambda_5(x) \geqslant 0, \quad \lambda_6(x) \leqslant 0 \tag{2.2}$$

Если вдоль дуги экстремума $\lambda_4 \neq 0$ или $\lambda_5 \neq 0$, то $\lambda_6 = 0$ и, наоборот, если $\lambda_6 \neq 0$, то $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Показано, что функции $\lambda_4(x)$ и $\lambda_6(x)$ вдоль оптимального контура непрерывны, причем

$$\lambda_4(x_c) = \lambda_6(x_c) = 0, \; \lambda_4(0) = \lambda_6(0) = 0 \tag{2.3}$$

где x — точка сопряжения дуг экстремалей. Сопротивление оптимального тела в рассматриваемом случае определяется формулой [1]

$$C_p = -{}^1/_2 C_1 (R_0/f_k' - L) \tag{2.4}$$

Выясним, из каких дуг может состоять экстремаль и какова их последовательность.

Было показано [1], что независимо от заданных условий экстремаль всегда оканчивается дугой нулевого давления $p_0 = 0$, начинаться с этой дуги она не может. Экстремаль не может начинаться дугой $f'' \neq 0$, $\beta \neq 0$, так как в этом случае следовало бы $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 \equiv 0$, а из уравнения (2.1) при $C_1 \neq 0$ и $f(0) = 0$ вытекает, что $f'(0) = \infty$. Это противоречит (1.1), следовательно экстремаль должна начинаться с дуги $f'' = 0$.

Так как тело выпукло, то всегда $(R_0/f_k') > L$, и так как $C_p > 0$, то из (2.4) следует, что $C_1 \leqslant 0$. Однако $C_1 = 0$, только если $f_k' = 0$, при этом экстремаль состоит из двух дуг: $f = kx$ и $p_0 = 0$. Если $C_1 \neq 0$, то экстремаль может состоять из трех дуг

$$1)\ f'' = 0, \quad 2)\ f'' \neq 0,\ \beta = p_0^{1/2} = (Af'^2 + Bff'' + G)^{1/2} \neq 0, \quad 3)\ \beta^2 = p_0 = 0$$

Теорема. В условиях рассматриваемой задачи единственно возможная последовательность дуг экстремали *1*, *2*, *3*.

Вначале покажем, что дуга *3* может находиться только в конце экстремали. Вдоль дуги *3* должно выполняться условие

$$f' = [(C_0/f)^\gamma - G/A]^{1/2} = z^{1/2}, \quad z > 0, \quad \gamma = 2A/B \tag{2.5}$$

где f' — решение уравнения, C_0 — постоянная интегрирования.

Рассмотрим нункцию

$$F_0(f) = \Phi(f') + C_1/f = F_1(z) = 2(A - B)z^{3/2} + \mu_0(A - 2B)z + (C_1/C_0)(z + G/A)^{1/\gamma} - \mu_0 G \tag{2.6}$$

Учитывая, что $C_1 \leqslant 0$, $z > 0$ и для рассматриваемых сред всегда $A - B > 0$, $A - 2B < 0$, получаем, что $d^2F_1/dz^2 > 0$. Так как $F_1(0) < 0$ и $F_1(z) \to +\infty$ при $z \to \infty$, то $F_1(z)$ имеет единственный минимум и, следовательно, существует единственное значение $f = f_1$, при котором $F_0(f_1) = 0$.

Лемма 1. Дуга *2* не может располагаться после дуги *3*. Предположим, что это не так. Тогда по (2.2) и (2.6) в точке сопряжения должно быть выполнено условие

$$\Phi(f_{c2}')f_{c2} = -C_1, \quad F_0(f_{c2}) = 0 \tag{2.7}$$

где f_{c2} — ордината точки сопряжения дуги *3* с дугой *2*.

Экстремаль не может начинаться дугой *3*, поэтому перед дугой *3* обязательно есть дуга $\beta \neq 0$, и так как при сопряжении с ней в точке (x_{c1}, f_{c1}) имеем $\lambda_6(x_{c1}) = 0$, $\lambda_6'(x_{c1}) \leqslant 0$, то

$$[\Phi(f_{c1}'^{+})f_{c1}^{+} + C_1] \leqslant 0, \quad F_0(f_{c1}) \leqslant 0 \tag{2.8}$$

Так как $f_{c1} < f_{c2}$, то $z_{c1} > z_{c2}$, но тогда из (2.6) следует, что $F_0(f_{c1}) = F_1(z_{c1}) \leqslant 0$ и $F_1(z) \leqslant 0$ для всех z в интервале $z < z_{c1} \leqslant z_1$, а значит, $F_0(f_{c2}) = F_1(z_{c2}) < 0$, что противоречит (2.7).

Лемма 2. Дуга *1* не может располагаться после дуги *3*.

Предположим, что это не так. Тогда, как следует из (2.2), вдоль дуги $f = kx + C_2$, где $C_2 > 0$, должно выполняться соотношение

$$\lambda_4'(x) = \Phi(k)x + \Phi(k)C_2/k + C_1/k \tag{2.9}$$

Для выполнения условий (1.4), (1.5) с учетом того, что $\lambda_4(x)$ и $\lambda_6(x)$ — непрерывные функции вдоль всей экстремали, необходимо, чтобы $\Phi(k) < 0$. Но тогда, так как $C_1 \leqslant 0$, всегда $\lambda_4'(x) < 0$, и что не может быть выполнено.

Обобщая результаты лемм 1 и 2, получаем, что дуга *3* может находиться только на последнем участке экстремали. Как уже отмечалось, начинается экстремаль дугой *1*. Далее может следовать дуга *2*. Аналогично только что проведенному доказательству леммы 2 можно показать, что за дугой *2* не может располагаться дуга *1*.

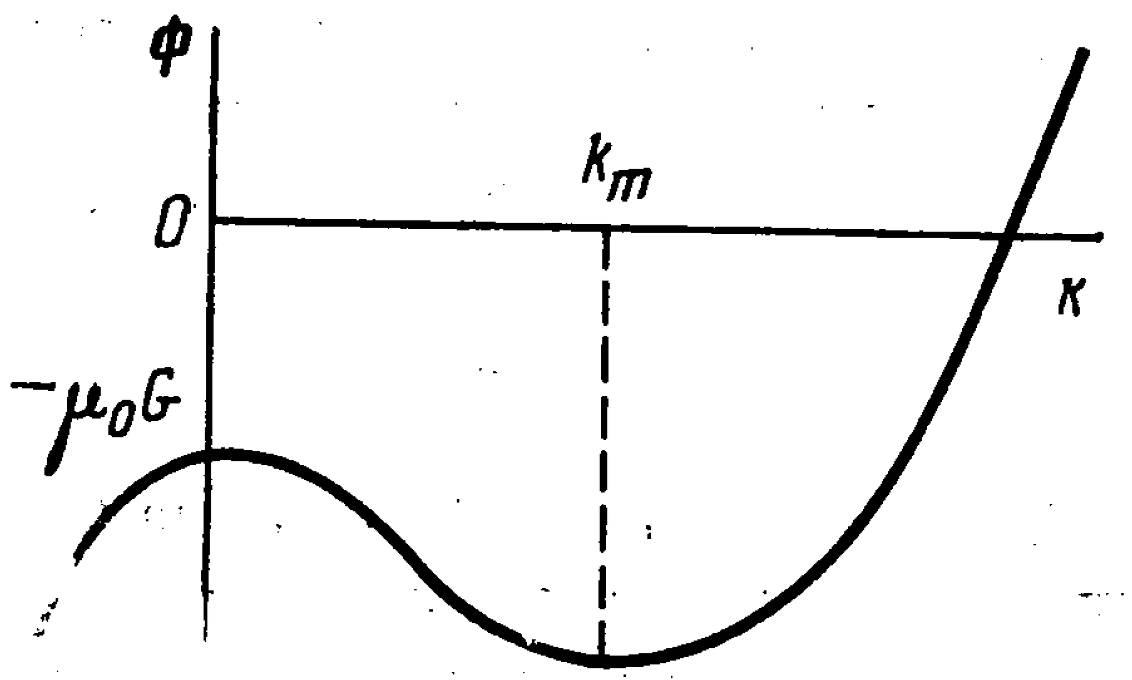
Таким образом, теорема доказана.

Как будет показано ниже, возможны случаи, когда дуга *2* у экстремали отсутствует, но порядок следования дуг *1* и *3* при этом сохраняется.

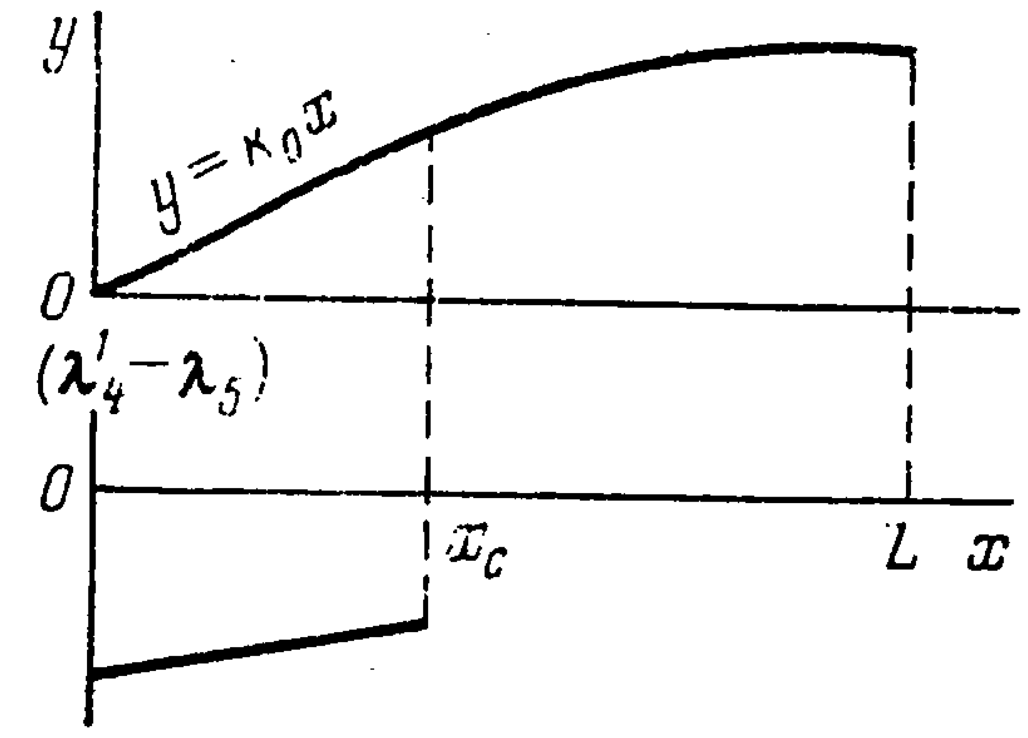
Экстремаль всегда начинается дугой *1*. В свою очередь для дуги *1* возможны два варианта: а) $f = k_0 x$, б) $f = kx$, $(k_0 > k)$. Если экстремаль начинается дугой *б*, то $\lambda_5 \equiv 0$, и из (2.2) при $f = 0$ получаем

$$\lambda_4'(0)k = C_1 \leqslant 0 \tag{2.10}$$

При условии $\lambda_4(0) = 0$ выполнение равенства (2.4) возможно лишь при $C_1 = 0$. Тогда $\lambda_4(x) \equiv 0$ и k определяется из уравнения $\Phi(k) = 0$. При этом $f_k' = 0$ и дуга *2* у экстремали существовать не может. Пусть теперь экстремаль начинается дугой *а*.



Фиг. 1



Фиг. 2

Дуга *2* может следовать за дугой *a* только в том случае, если $\Phi(k_0) > 0$. Однако существуют такие значения μ_0, когда данное условие будет нарушено, т. е. при достаточно больших коэффициентах трения μ_0 независимо от задания величин L и d, экстремаль будет состоять только из двух дуг: *1* и *3*.

Покажем, что в то же время будет существовать такое значение μ_0^*, что при $\mu_0 < \mu_0^*$ в зависимости от задания L и d экстремаль обязана содержать дугу *2*. Обозначим $k_1 = R_0/L$. Рассмотрим μ_0 такие, что $\Phi(k_1) > 0$. Начинаться дугой *б* в этом случае экстремаль не может, так как $k > k_1$. В то же время, так как $k_0 > k_1$, то, как следует из общего вида функции $\Phi(k)$ (фиг. 1); $k_m = {}^1/_3\mu_0 (2B - A)/(A - B)$, $\Phi(k_0) > 0$, что предполагает возможность существования дуги 2. Пусть это не так, т. е. пусть вслед за дугой *a* при всех μ_0, когда $\Phi(k_1) > 0$, следует дуга *3*. При сопряжении дуг в точке (x_c, f_c) из (2.1) — (2.3) получаем условие

$$(\lambda_4' - \lambda_5)(x_c) \leqslant 0 \tag{2.11}$$

На дуге *a* функция $\lambda_4' - \lambda_5$ линейна (фиг. 2)

$$(\lambda_4' - \lambda_5)(x) = \Phi(k_0)\, x + C_1/k_0 \tag{2.12}$$

Так как предположили, что дуги *2* нет, то форма экстремали при заданных L и d с изменением μ_0 не меняется. Но тогда, так как $(dC_p/d\mu_0) > 0$, из (2.4) получаем $(d(-C_1)/d\mu_0) > 0$, и

$$d\,[(\lambda_4' - \lambda_5)(x_c)]/d\mu_0 < 0$$

Из (2.11), (2.12), так как $\Phi(k_0) > 0$, находим μ_0^*:

$$(\lambda_4' - \lambda_5)(x_c) = 0$$

При $\mu_0 < \mu_0^*$ условие (2.11) будет нарушено, т. е. в этом случае получаем противоречие с предположением, что дуги *2* не существует. Можно увидеть, что значение μ_0^* определяется из системы уравнений

$$k_0\,((R_0/f_k') - L)\,\Phi(k_0) = (Ak_0^2 + G)(\mu_0 + k_0)\, f_c$$

$$L = \int\limits_{f_c}^{R_0} \frac{df}{[(C_0/f)^\gamma - G/A]^{1/2}} + \frac{f_c}{k_0}$$

$$C_0 = f_c\,(k_0^2 + G/A)^{1/\gamma}, \quad f_k = [(C_0/R_0)^\gamma - G/A]$$

Если найденная величина $\mu_0^* > 0$, то при $0 \leqslant \mu_0 \leqslant \mu_0^*$ экстремаль состоит из трех дуг, а при $\mu_0 > \mu_0^*$ из двух. Если при заданных L и d значение $\mu_0^* < 0$, то в этом случае экстремаль состоит из двух дуг и не зависит от изменения коэффициента трения μ_0.

Используя результаты проведенного выше анализа необходимых условий экстремума, выпишем систему уравнений для нахождения параметров, определяющих дуги экстремали при $\mu_0 < \mu_0^*$ в явном виде.

Пусть f_{c1} и f_{c2} — соответственно ординаты точек перехода с дуги *1* на дугу *2* и с дуги *2* на дугу *3*. Пусть f_{c2}' — тангенс угла между касательной к контуру с ординатой f_{c2} и осью x. Для определения этих параметров, а также величин C_1, C_0, f_k', которые дают возможность получить вид экстремали в явном виде при задании L и $d = 2R_0$, имеем систему уравнений

$$\Phi(k_0)\, f_{c1} = -C_1, \quad \Phi(f_{c2}')\, f_{c2} = -C_1$$

$$L = f_{c1}/k_0 + I_1(f_{c1}, f_{c2}) + I_2(f_{c2}, R_0)$$

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2) = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} x_n'(f)\, df \quad (n = 1, 2) \tag{2.13}$$

$$R_0 = C_0/[f_k'^2 + G/A]^{1/\gamma}, \quad f_{c2} = C_0/[f_{c2}'^2 + G/A]^{1/\gamma}$$

$$(-C_1)\,[(R_0 - Lf_k')/f_k'] = \int_0^L (Af'^2 + Bff'' + G)(f' + \mu_0) f\, dx$$

Здесь

$$x_1'(f) = \chi_+^{1/3} + \chi_-^{1/3}, \quad \chi_\pm = -q/2 \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$$

$$q = 2(A - B) fN, \quad p = (2B - A)\mu_0 fN, \quad N = 1/(\mu_0 Gf - C_1), \quad x_2'(f) =$$
$$= [(C_0/f)^\gamma - G/A]^{1/2} \tag{2.14}$$

При известных коэффициентах среды A, B, G, μ_0, а также при заданных величинах R_0 и L система шести уравнений (2.13) однозначно определяет величины f_{c1}, f_{c2}, f_{c2}', C_1, f_k', C_0, которые в свою очередь из (2.14) однозначно определяют отрезки дуг экстремали:

1) $f = k_0 x$ при $f \leqslant f_{c1}$,

2) $x = f_{c1}/k_0 + I_1(f_{c1}, f)$ при $f_{c1} \leqslant f \leqslant f_{c2}$,

3) $x = f_{c1}/k_0 + I_1(f_{c1}, f_{c2}) + I_2(f_{c2}, f)$ при $f_{c2} \leqslant f \leqslant L$.

При $\mu_0 > \mu_0^*$ экстремаль состоит из двух дуг, для которых координаты сопряжения f_c и C_0 находятся из системы уравнений

$$L = f_c/k + I_2(f_c, R_0), \quad f_c = C_0/[k^2 + G/A]^{1/\gamma}$$

где в свою очередь в зависимости от конкретных значений L и d коэффициент k либо равен k_0, либо определяется из уравнения $\Phi(k) = 0$.

Таким образом, проведено детальное исследование формы тела минимального сопротивления, проникающего в пластически-сжимаемые среды, в зависимости от коэффициента трения среды о поверхность тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунимович А. И., Якунина Г. Е.* О форме тел вращения минимального сопротивления, движущихся в пластически сжимаемой и упругопластической средах // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 496—503.
2. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А.* Вопросы динамики грунтов // М.: Изд-во МГУ, 1974. 239 с.

Москва

Поступила в редакцию 2.XII.1988

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ И ЧИТАТЕЛЕЙ ЖУРНАЛА!

До 1 декабря 1989 г. Вы можете подписаться на № 1, 1990 г., а до 1 февраля 1990 г. — на № 2, 1990 г. нашего журнала. Цена номера — 1 р. 90 к., индекс 70706. Подписка принимается во всех отделениях Союзпечати.

Справку о содержании этих номеров можно получить в редакции.