

Таблица 1

Таблица 2

Вариант	$z/r$	$\sigma_r/P$	$-\sigma_\theta/P$	Вариант	$r/b$	$\tau_{xz}/(\mu tb)$	$\tau_{yz}/(\mu tb)$
1	1,21	0,0012	2,68	1	0,7	—	1,769
	1,3	0,44	2,22		0,8	—	0,84
	1,6	-0,25	1,98		1,0	—	1,3617
	2,0	-1,0014	1,72		$i$	1,354	—
2	1,15	0,003	4,21	2	0,8	—	1,96
	1,2	-0,12	3,84		0,9	—	0,972
	1,3	0,34	3,33		1,0	—	1,47
	1,43	-1,002	2,43		$i$	1,362	—

вений принять  $A = R$  и  $m = 0$ , то задача сводится к определению напряженного состояния круглой пластинки, ослабленной центральным круговым отверстием и двумя прямолинейными разрезами. При  $r/R \leq 0,2$  и  $l \leq r$  полученные результаты для  $\sigma_\theta$ , КИН и значения критической нагрузки  $P$  совпадают с известными [7].

Кручение полого квадратного бруса с двумя разрезами (фиг. 2). Из граничных условий (2.6) с учетом отображающих функций (1.1) и (1.6) после некоторых преобразований (сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $\tau$ ) получаем две системы бесконечных линейных алгебраических уравнений.

Удерживая первые пять уравнений, в каждой системе определяем величины касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по формуле

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu tb [\varphi'(z) - \bar{z}]$$

где  $\tau$  — угол закручивания; вариант 1:  $r/b = 0,5$ ,  $e/b = 0,6$ ; вариант 2:  $r/b = 0,5$ ,  $e/b = 0,7$ .

Значения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , вычисленные в характерных точках сечения, представлены в табл. 2.]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1956. 648 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
3. Шерман Д. И. Об одной задаче теории упругости // ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 413—420.
4. Кулиев С. А. Об одной задаче для двухсвязной области некоторого вида // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1969. № 5. С. 46—53.
5. Кулиев С. А. Определение напряжений в скручиваемом бруске кругового кольцевого сечения с двумя разрезами // Изв. АН СССР. МТТ, 1986. № 5. С. 187—192.
6. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещины в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

Баку

Поступила в редакцию  
19.1.1989

УДК 539.3 : 534.1

К. С. Пустовойт, И. Е. Трояновский, И. Н. Шардаков

#### ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Предлагается подход к решению задачи об отыскании собственных частот и пространственных собственных форм колебаний упругого тела, пригодный для тел сложной геометрической формы. Подход основан на методе обратных итераций [1] с применением метода геометрического погружения<sup>1</sup> на каждой итерации. Приводятся приме-

<sup>1</sup> Шардаков И. Н., Трояновский И. Е., Труфанов И. Н. Метод геометрического погружения для решения краевых задач теории упругости: Препринт, Свердловск: Ин-т механики сплошных сред, 1984. 66 с.

ры численной реализации итерационного алгоритма, определяются собственные формы и частоты нескольких тел сложной геометрической формы. Найденные собственные формы используются в качестве базисных функций для исследования вынужденных установившихся колебаний вязкоупругих тел сложной формы.

1. Задача об отыскании собственных форм и частот колебаний линейного упругого тела, занимающего в трехмерном евклидовом пространстве область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , при однородных граничных условиях в перемещениях на части границы  $\Gamma_u$  и в напряжениях на остальной части границы  $\Gamma_\sigma$  сводится к отысканию нетривиальных решений вариационного уравнения

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad \langle u, v \rangle &= \lambda (u, v) & (1.1) \\ V &= \{v \in (H^1(\Omega))^n; \quad v = 0, \quad x \in \Gamma_u\}, \quad n = 3 \\ \langle u, v \rangle &= \int_{\Omega} \sigma(u) \dots e(v) d\Omega, \quad (u, v) = \int_{\Omega} \rho uv d\Omega \\ \|u\| &= \langle u, u \rangle^{1/2}, \quad |u| = (u, u)^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $V$  — гильбертово пространство вектор-функций, последние равенства определяют скалярные произведения и порожденные ими нормы,  $\sigma, e$  — тензоры напряжений и деформаций,  $\rho$  — плотность материала,  $\lambda$  — искомое собственное число, а « $\dots$ » означает двойное скалярное произведение.

Для отыскания простого низшего собственного значения  $\lambda_1$ , и соответствующего ему собственного элемента  $u_1$  предлагается следующий итерационный алгоритм, сходимость которого устанавливается теоремой.

*Теорема 1.* Если последовательность итераций  $\{z^{(k)}\}$  осуществляется таким образом, что

$$\forall v \in V, \quad \langle w^{(k)}, v \rangle = (z^{(k-1)}, v) \quad (1.2)$$

$$z^{(k)} = w^{(k)} / |w^{(k)}|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

и  $(z^{(0)}, u_1) \neq 0$ , то

$$\|z^{(k)} - u_1\|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

*Доказательство.* В силу полноты ортонормированной системы собственных векторов  $\{u_n\}$  [2] имеют место представления

$$w^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} u_i, \quad z^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(k)} u_i \quad (1.5)$$

где  $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}$  — коэффициенты Фурье, причем справедливы уравнения замкнутости. Учитывая соотношения ортогональности

$$\langle u_k, u_l \rangle = \lambda_k \delta_{kl}, \quad (u_k, u_l) = \delta_{kl}; \quad k, l = 1, 2, \dots$$

получим, подставляя выражения (1.5) в (1.2),  $a_i^{(k)} \lambda_i = b_i^{(k-1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . С другой стороны, из (1.3) имеем

$$b_i^{(k)} = a_i^{(k)} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^{(k)})^2 \right]^{-1/2}$$

Тогда

$$z^{(k)} = f_k \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right)^k a_i^{(0)} u_i, \quad f_k = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right)^k a_j^{(0)} \right]^2 \right\}^{-1/2}$$

Далее, для нормы разности имеем

$$\|z^{(k)} - u_1\| = \left[ (f_k a_1^{(0)} - 1)^2 \lambda_1 + f_k^2 \sum_{i=2}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right)^{2k} a_i^{(0)2} \lambda_i \right]^{-1/2}$$

и, учитывая, что  $f_k |_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 1/a_1^{(0)}$ , окончательно получим соотношение (1.4). Отметим, что  $|w^{(k)}|_{k \rightarrow \infty}^{-1} \rightarrow \lambda_1$ .

Для отыскания следующих по величине собственных значений и соответствующих им собственных векторов предлагается итерировать вектор  $z^{(0)}$ , принадлежащий ортогональному дополнению линейной оболочки уже найденных собственных векторов. Отметим, что при наличии в спектре кратных собственных значений предложенный ал-

горитм не претерпевает каких-либо изменений, что позволяет применять его, не имея предварительных сведений о кратности отыскиваемых собственных значений.

2. Для отыскания решения  $u^\circ$  вариационного уравнения

$$\forall v \in V, \quad \langle u, v \rangle = (f, v) \quad (2.1)$$

входящего в формулировку итерационного алгоритма, предлагается использовать метод геометрического погружения.

Определим открытое ограниченное множество  $\Omega_0$  с границей  $\Gamma_0$ , такое, что  $\Omega \subset \subset \Omega_0$ ,  $\Gamma_u \subset \Gamma_0$  и на  $\Omega_\Delta = \Omega_0 \setminus \Omega$  существует решение  $v^\circ(w)$  краевой задачи теории упругости с краевыми условиями в перемещениях на части границы, совпадающей с  $\Gamma$ , и однородными условиями в напряжениях на остальной части границы

$$\operatorname{div} \sigma(u) = 0, \quad u = w, \quad x \in \Gamma$$

Определим гильбертово пространство

$$V_0 = \{v \in (H^1(\Omega_0))^n; v = 0, x \in \Gamma_u\}$$

и введем обозначения

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_{\Omega_0} \sigma(u) \cdot \cdot e(v) d\Omega_0, \quad \langle u, v \rangle_\Delta = \int_{\Omega_\Delta} \sigma(u) \cdot \cdot e(v) d\Omega_\Delta$$

Рассмотрим краевую задачу теории упругости для неоднородного тела, занимающего область  $\Omega_0$  и имеющего в области  $\Omega$  модуль Юнга  $E$ , а в области  $\Omega_\Delta$  модуль  $E_2 = \varepsilon E$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  и постоянный коэффициент Пуассона  $\nu$  во всей области  $\Omega_0$ . В пространстве  $V_0$  существует единственный элемент  $w^\circ \in V_0$ , являющийся решением вариационного уравнения

$$\forall v \in V_0, \quad \langle w, v \rangle + \varepsilon \langle w, v \rangle_\Delta = (f, v) \quad (2.2)$$

Определим однозначные отображения

$$g: V_0 \rightarrow V; \quad \forall u \in V_0, \exists v \in V; \quad v = g(u) \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \quad v(x) = u(x) \quad (2.3)$$

$$h: V \rightarrow V_0; \quad \forall u \in V, \exists v \in V_0; \quad v = h(u) \Leftrightarrow \forall x \in \Omega v(x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega_\Delta v = v^\circ(u) \quad (2.4)$$

Отметим, что  $\forall u \in V, v \in V_0, \langle h(u), v \rangle = \langle u, g(v) \rangle$ .

Близость функции  $u^\circ$  и  $w^\circ$ , являющихся решениями уравнений (2.1) и (2.2), устанавливает следующая теорема.

*Теорема 2.* Выбирая параметр  $\varepsilon$  достаточно малым, можно сделать решения уравнений (2.1) и (2.2) сколь угодно близкими в области  $\Omega$ , так что

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \quad \|u^\circ - g(w^\circ)\| < \delta \quad (2.5)$$

*Доказательство.* Положим  $c = \langle h^\circ, h^\circ \rangle$ , где  $h^\circ = h(u^\circ)$ . Вычитая равенство (2.2) из (2.1) и полагая  $v = h^\circ - w^\circ$ , получим

$$\langle h^\circ - w^\circ, h^\circ - w^\circ \rangle = \varepsilon \langle w^\circ, h^\circ \rangle - \varepsilon \langle w^\circ, w^\circ \rangle_\Delta$$

откуда  $\langle w^\circ, h^\circ \rangle_\Delta \geq 0$ . С другой стороны,

$$\langle h^\circ - w^\circ, h^\circ - w^\circ \rangle = -\varepsilon \langle h^\circ - w^\circ, h^\circ - w^\circ \rangle_\Delta + \varepsilon \langle h^\circ, h^\circ \rangle_\Delta - \varepsilon \langle h^\circ, w^\circ \rangle_\Delta \leq \varepsilon c$$

и при  $\varepsilon = \delta^2/(2c)$  получаем соотношение (2.5).

Сформулированная теорема позволяет отыскивать решение уравнения (2.2) вместо решения (2.1); они близки при достаточно малых  $\varepsilon$ .

С учетом того, что

$$\forall u, v \in V_0, \quad \langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle_\Delta$$

отыскание решения уравнения (2.2) осуществляется в виде разложения

$$w^\circ = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n w^{(n)}, \quad \kappa = 1 - \varepsilon \quad (2.6)$$

$$\forall v \in V_0, \langle w^{(0)}, v \rangle_0 = (f, v), \quad \langle w^{(n)}, v \rangle_0 = \langle w^{(n-1)}, v \rangle_\Delta$$

Имеем

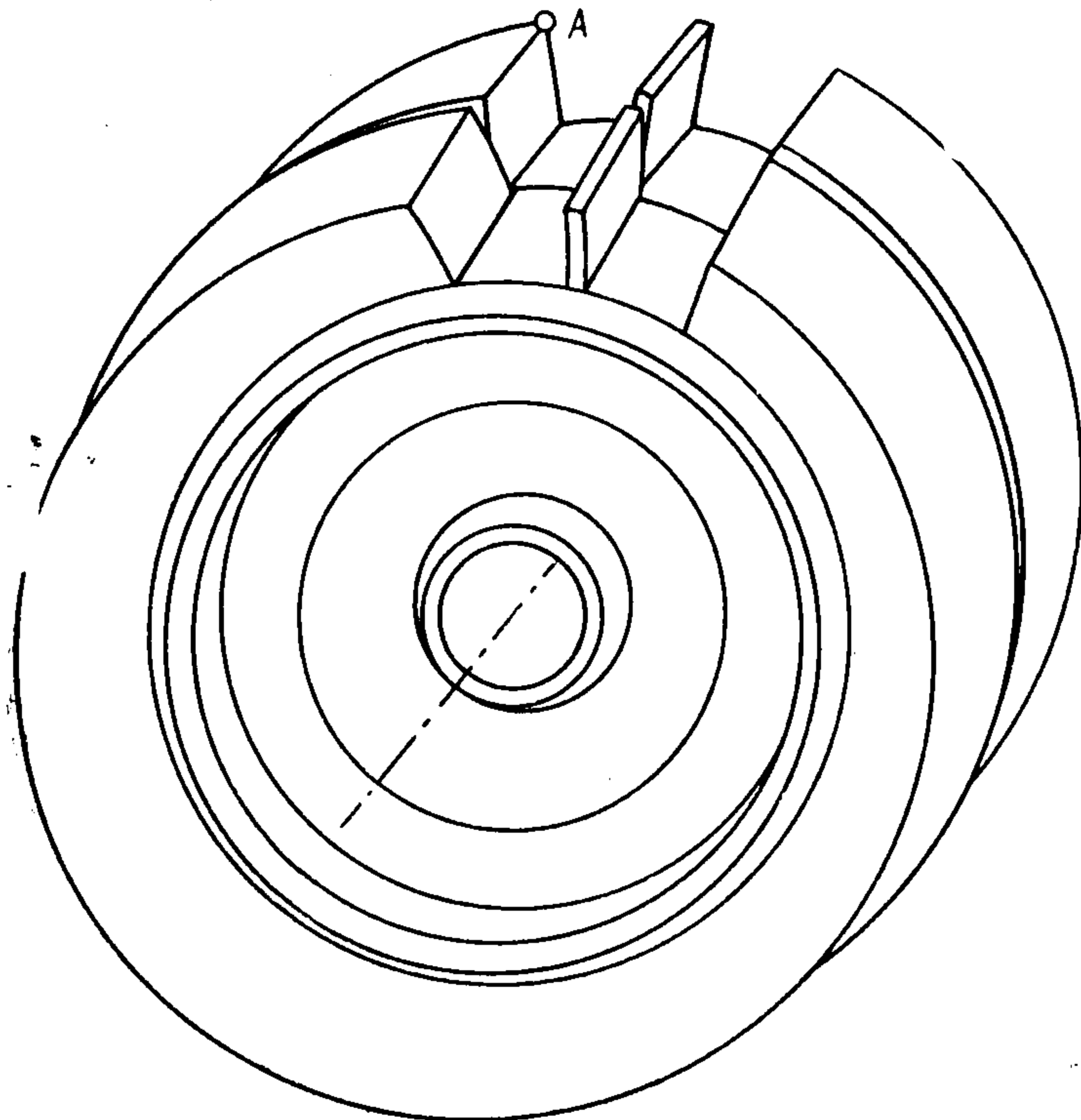
$$\begin{aligned} \langle w^{(n)}, w^{(n)} \rangle_0 - \langle w^{(n-1)}, w^{(n-1)} \rangle_0 &= -\langle w^{(n)}, w^{(n)} \rangle - \langle w^{(n-1)}, w^{(n-1)} \rangle - \\ &- \langle w^{(n)} - w^{(n-1)}, w^{(n)} - w^{(n-1)} \rangle_\Delta \leq 0 \end{aligned}$$

т. е.  $\|w^{(n)}\|_0 < \|w^{(n-1)}\|_0$  и ряд (2.6) сходится по норме  $\|u\|_0 = \langle u, u \rangle_0^{1/2}$  при  $|\kappa| < 1$ .

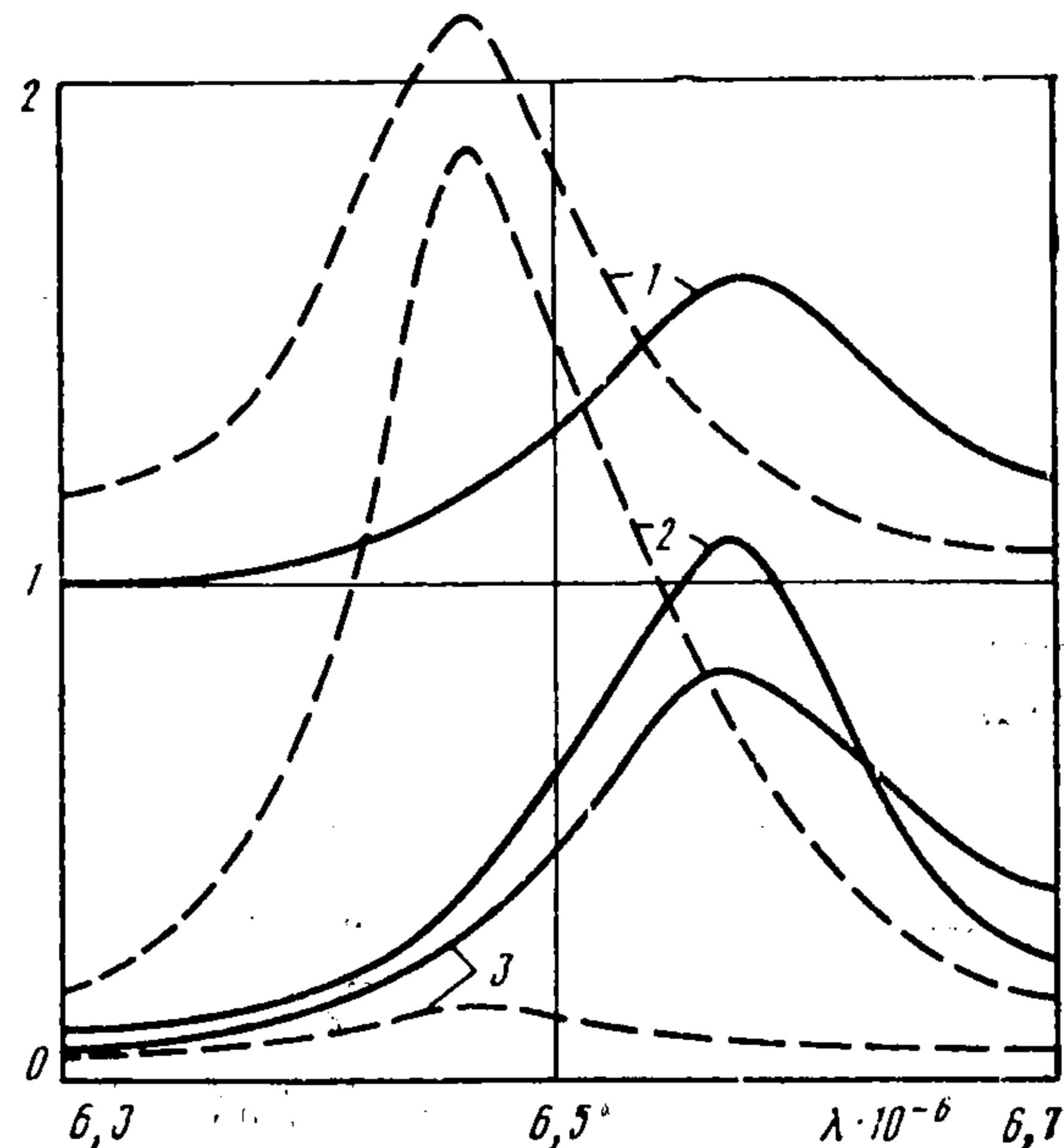
Таким образом, предложенный подход позволил свести задачу об отыскании собственных частот и форм колебаний тела сложной геометрической формы к итерационной

последовательности статических задач для однородного тела более простой формы, в которое исследуемое тело погружено. В данной работе в качестве однородных упругих канонических областей приняты тела вращения, решение задач на канонических областях осуществлялось полуаналитическим методом конечных элементов [3].

3. Численные расчеты были выполнены для тела, имеющего форму диска переменной толщины с расположенными по его периферии лопатками. Определялись 12 низших собственных частот и соответствующие им пространственные формы колебаний.



Фиг. 1



Фиг. 2

Геометрическая форма диска и форма колебаний, отвечающая низшей собственной частоте, изображены на фиг. 1 (для наглядности показана 1 из 23 лопаток).

Полученные собственные формы колебаний упругого тела были использованы в качестве базисных функций для изучения вынужденных установившихся колебаний вязкоупругого тела сложной геометрической формы. Исследование велось в рамках линейной наследственной теории Больцмана — Вольтерры. В качестве ядра релаксации было принято трехпараметрическое ядро А. Р. Ржаницына [4].

На фиг. 2 штриховыми линиями показаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)  $r$ -,  $z$ - и  $\varphi$ -компонент перемещений точки А конструкции, изображенной на фиг. 1. Кривым 1—3 соответствуют значения  $u_r \cdot 10^3$ ,  $u_z \cdot 10^2$ ,  $u_\varphi \cdot 10^3$ . Сплошными линиями показаны АЧХ той же точки конструкции, отличающейся от предыдущей отсутствием одной соседней лопатки. Масса лопатки составляет 0,91% общей массы диска. Видно, что столь небольшое изменение, внесенное в конструкцию, радикально меняет вид АЧХ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
3. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974. 239 с.
4. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
13.IX.1988