

Схема доказательства. Введем функцию v равенством

$$\int_0^s a(\tau) d\tau = \exp(\beta t) v + \varphi, \quad \beta = \text{const}$$

В области $G_+ = \{1 - \varepsilon t \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_2\}$ она будет удовлетворять некоторым уравнению и краевому условию, из которых, поскольку $\varphi, s \geq 0$ и в G_+ : $\varphi_{xx} = \varphi_{\xi\xi}$, $\varphi_x = \varphi_\xi$, $\varphi_t = \varepsilon\varphi_\xi$ (индекс ξ означает дифференцирование по ξ) при больших β по принципу максимума заключаем, что $v \geq 0$ в G_+ .

Отсюда вытекают утверждения теоремы.

Следствие 3. Теорема 4 и результаты работы, цитированной в сноске на с. 849 позволяют отметить, что при малых t величина $s(1, t)$ растет как $F_0^{-1}(t)$.

Примером функций относительных проницаемостей и капиллярного давления, удовлетворяющих условиям теорем 1—4, служат зависимости

$$f_1(s) = (1-s)(1-s + 1/3s^2), \quad f_2(s) = \mu^\circ(1-f_1) + (1-\mu^\circ)s^2(3-2s) \\ p_c(s) = [s/(1,1-s)]^{1/2}, \quad \mu^\circ = \mu_2/\mu_1 \leq 1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969. 545 с.
2. Gagneux G. Déplacements de fluides non miscibles incompressibles dans un cylindre poreux // J. méca. 1980. V. 19. No 2. P. 295—325.
3. Доманский А. В. О разрешимости одной задачи фильтрации несмешивающихся жидкостей // Динамика сплошной среды: Математические проблемы гидродинамики. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 59. С. 62—72.
4. Van Duyn C. J., Peletier L. A. Nonstationary filtration in partially saturated porous media // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1982. V. 78. No. 2. P. 173—198.
5. Пеньковский В. И. Концевой эффект капиллярного запираания вытесняемой фазы при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 184—187.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.V.1988

УДК 539.3

С. А. Кулиев

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Методом Д. И. Шермана исследуются некоторые двумерные задачи теории упругости для многосвязных областей.

Решение строится путем разложения в ряд потенциала Колосова — Мусхелишвили. С использованием полиномов Фабера и конформного отображения исходная задача сводится к решению систем бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения аналитических функций. Полученное решение иллюстрируется двумя примерами.

Как известно [1—3], многие задачи теории упругости сводятся к отысканию регулярных (и однозначных) в рассматриваемых областях S аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

Для плоской задачи (первой краевой задачи), когда область S ограничена несколькими гладкими замкнутыми контурами L_1, L_2, \dots, L_k , из которых последний охватывает все предыдущие, причем эти контуры не имеют общих точек, граничное условие на каждом контуре L_k ($k = 1, 2, \dots$) имеет вид

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1^{(k)} + if_2^{(k)} \quad \text{на } L_k \quad (0.1)$$

$$f_1^{(k)} + if_2^{(k)} = i \int_{t_0}^t [T_{nx}^{(k)} + iT_{ny}^{(k)}] ds + C_k$$

Для задач кручения и изгиба

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \overline{\varphi(t)} &= f(t) + C_k \text{ на } L_k \\ f(t) &= \begin{cases} t\bar{t} + C_k & \text{для задач кручения} \\ \int xy dy & \text{для задач изгиба} \end{cases} \end{aligned} \quad (0.2)$$

Здесь t — аффикс точек контуров L_k , t_0 — произвольно фиксированная точка на L_k , $T_{nx}^{(k)}$, $T_{ny}^{(k)}$ — проекции внешних сил на оси x и y соответственно.

Если граница области подвержена равномерно распределенной нагрузке p_k , то на каждом из контуров имеет место равенство

$$f_1^{(k)} + if_2^{(k)} = -p_k t + C_k$$

Здесь C_k — некоторые постоянные, одну из них можно фиксировать произвольно.

Точность решения задач (0.1) и (0.2) во многом зависит от корректного выбора аналитической и отображающей (область S на единичный круг) функций.

1. Выбор отображающих функций. Внешность правильного криволинейного (близкого к прямолинейному) многоугольника отображается на внешность единичной окружности в плоскости ξ_2 при помощи функции

$$z = A \left(\xi_2 + \frac{m}{\xi_2^{q-1}} \right); \quad A = \frac{a+b}{2}, \quad m = \left| \frac{a-b}{a+b} \right| \quad (1.1)$$

где a — радиус окружности, описанной вокруг многоугольника, b — радиус окружности, вписанной в многоугольник, q — число осей симметрии (число сторон).

Функция, обратная к (1.1), определяется равенством

$$\xi_2 = \chi_2(z) = u \sum_{n=0}^{E(k/q)} a_n^{(1)} u^{-qn}, \quad u = \frac{z}{A} \quad (1.2)$$

где $E(k/q)$ — целая часть, содержащаяся в k/q .

Сохраняя в ряде (1.2) первые шесть слагаемых, имеем: для $q = 6$ (правильный шестиугольник)

$$\chi_2(z) = u (1 - tu^{-6} - 5m^2u^{-12} - 40m^3u^{-18} - 385m^4u^{-24} - 4095m^5u^{-30} \dots) \quad (1.3)$$

для $q = 4$ (квадрат)

$$\chi_2(z) = u (1 - tu^{-4} - 3m^2u^{-8} - 15m^3u^{-12} - 91m^4u^{-16} - 612m^5u^{-20} \dots) \quad (1.4)$$

для $q = 2$ (эллипс с полуосями a и b)

$$\chi_2(z) = u (1 - tu^{-2} - 2m^2u^{-4} - 5m^3u^{-6} - 14m^4u^{-8} - 42m^5u^{-10} + \dots) \quad (1.5)$$

Во всех разложениях (1.3)–(1.5) $|z| \geq A$.

Внешность окружности радиуса r с двумя прямолинейными разрезами по оси абсцисс отображается на внешность единичного круга в плоскости ξ_1 следующей функцией:

$$z = r \sum_{n=-1}^{\infty} \gamma_n \xi_1^{-n} = r \xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \xi_1^{-n}. \quad (1.6)$$

Обратная к (1.6) функция имеет вид

$$\xi_1 = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{E(n/2)} \delta_{n-1}^{(1)} \left(\frac{r}{z} \right)^{2n}$$

$$\delta_{n-1}^{(1)} = \sum_{k=0}^n {}^* 2\lambda (-1)^{k/2} C_{1/2}^{k/2} \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{-k+1} C_{-k+1}^{(n-k)/2}, \quad \lambda = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 1/2, & k \neq 0 \end{cases}$$

Были найдены 10 первых коэффициентов в разложении (1.6)

$$\gamma_1 = \alpha = \frac{e^2 + r^2}{2er} > 1, \quad \gamma_1 = \alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\gamma_5 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^5}, \quad \gamma_7 = \frac{1}{\alpha} - \frac{6}{\alpha^3} + \frac{10}{\alpha^5} - \frac{5}{\alpha^7}$$

$$\gamma_9 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{10}{\alpha^3} - \frac{30}{\alpha^5} + \frac{35}{\alpha^7} - \frac{14}{\alpha^9}, \quad \gamma_0 = \gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_6 = \gamma_8 = \gamma_{10} = 0$$

($\pm e$ — координата концевой точки разреза).

Если в рассматриваемой задаче внутренний контур L_1 состоит из окружности радиуса r с двумя прямолинейными разрезами различной длины, то внешность такого контура отображается на внешность единичной окружности в плоскости ξ_1 функцией

$$z = r(w + \sqrt{w^2 - 1}), \quad w = \frac{b' - a'}{4} \left(\xi_1 + \frac{1}{\xi_1} \right) + \frac{b' + a'}{2}, \quad -\infty < a' < b' < \infty.$$

После некоторых преобразований этой формуле можно придать более простой вид (удобный для обращения)

$$z = r\xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \xi_1^{-n}, \quad \lambda_n = \sum_{\nu=n-2E(n/2)}^n \delta_\nu \gamma_{n-\nu} \quad (1.7)$$

$$\gamma_k = \sum_{\nu=k-2E(k/2)}^{k/2} \varepsilon (-1)^\nu C_{1/2}^\nu \left(\frac{b' - a'}{4} \right)^{-2\nu+1} C_{-2\nu+1}^{(k-2\nu)/2}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 2, & \nu = 0 \\ 1, & \nu \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta_n = \sum_{n_1=n-2E(n/2)}^n C_{-2\nu+1}^{n_1} \left(2 \frac{b' + a'}{b' - a'} \right)^{n_1} C_{-n}^{(n-n_1)/2}$$

$$a' = \frac{e_1^2 + r^2}{2e_1 r}, \quad b' = \frac{e_2^2 + r^2}{2e_2 r}$$

Здесь e_1 и e_2 — координаты концевых точек разреза.

В частности, при $e_1 = -r$ (тогда $a' = -1$) или же при $e_2 = r$ (тогда $b' = 1$) внутренний контур L_1 будет иметь один разрез. При $|e_1| = |e_2| = e$ имеем $a' = -\alpha$, $b' = \alpha$. Тогда формулы (1.7) и (1.6) совпадают (при этом получено, что $\lambda_n = \gamma_n$, $\delta_0 = 1$, $\delta_n = 0$ [4—6]).

Функция, обратная к (1.7), имеет вид

$$\xi_1 = \frac{z}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^{(1)} \left(\frac{r}{z} \right)^n, \quad \varepsilon_n^{(1)} = \sum_{k=n-2E(n/2)}^n h_k^{(1)} g_{n-k} \quad (1.8)$$

$$g_\nu = \sum_{n=\nu-2E(\nu/2)}^{\nu/2} \varepsilon (-1)^n C_{1/2}^n (b' - a')^{2n-1} C_{-2n+1}^{(\nu-2n)/2}$$

$$h_\nu^{(1)} = \sum_{k=\nu-2E(\nu/2)}^{\nu} (-1)^k C_{-2n+1}^k (b' + a')^k C_{-k}^{(\nu-k)/2}$$

2. Выбор аналитических (регулярных) функций. Функция $\varphi(z)$, регулярная в двусвязной области S , может быть представлена в виде сумм двух функций, одна из которых ($f_1(z)$) регулярна внутри наружного контура L_2 , а другая ($f_2(z)$) — вне внутреннего контура L_1 : $\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z)$, причем

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_1^{-k}, \quad f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k [\chi_2(z)]^k \quad (2.1)$$

Умножая обе части второго равенства (2.1) на ядро Коши $[2\pi i(t-z)]^{-1} dt$ и интегрируя по всему контуру L_2 , на основе теории вычетов, а также учитывая разложения (1.2), получим

$$f_2(z) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{A} \right)^k \sum_{n=0}^{E(k/q)} a_n^{(k)} \left(\frac{A}{z} \right)^{qn} \quad (2.2)$$

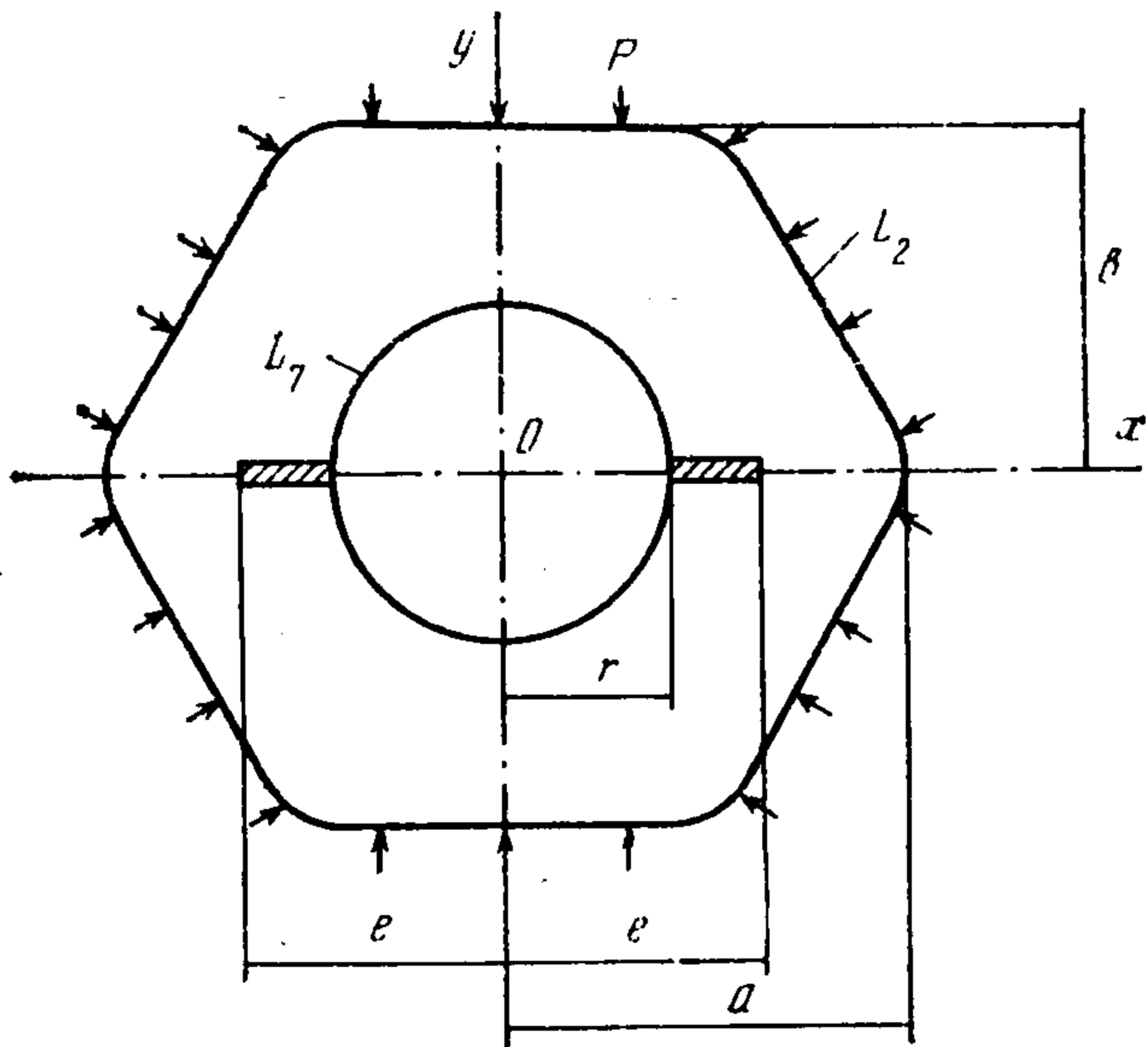
Учитывая равенства (1.8) и (2.2), формулу (2.1) приводим к виду

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{z} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{A} \right)^k \quad (2.3)$$

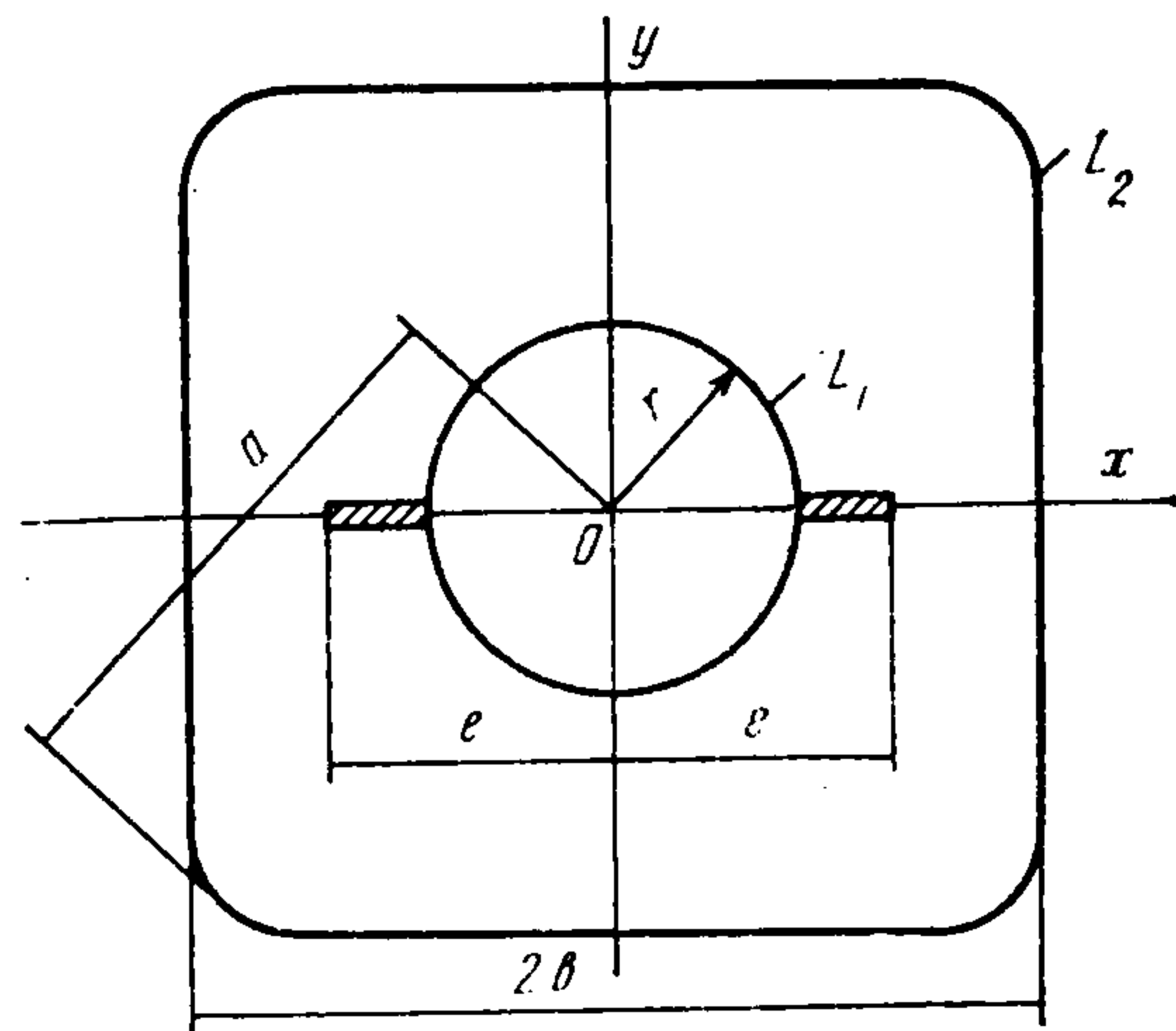
$$a_k = \sum_{\nu=k-E(k/2)}^k \alpha_\nu \delta_{-1}^{-k} l_{(k-\nu)/2}^{(\nu)}, \quad b_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \beta_\nu a_{(\nu-k)/q}^{(\nu)}$$

Звездочки «**» и «*» означают, что индекс суммирования при переходе к следующему значению изменяется соответственно на 2 и на q .

Следует отметить, что когда один из контуров L_1, L_2 — окружность, то ряд формул упростится, но равенство (2.3) останется таким же.



Фиг. 1



Фиг. 2

Функция $\psi(z)$ будет иметь вид (аналогичный разложению (2.3))

$$\psi(z) = \sum_{v=0}^{\infty} d_v \left(\frac{r}{z}\right)^v + \sum_{v=0}^{\infty} h_v \left(\frac{z}{A}\right)^v \quad (2.4)$$

$$\bar{d}_v = \sum_{k=v-E(v/2)}^{v**} A_k \delta_{-1}^{-k} l_{(v-k)/2}^{(k)}, \quad h_v = \sum_{k=v-E(v/q)}^{v*} B_k a_{(v-k)/q}^{(k)}$$

Подставляя выражения для аналитических функций, определяемые равенствами (2.3) и (2.4) в (0.1), для плоской задачи граничные условия на L_j ($j = 1, 2$) приводим к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{r}{t}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{t}{A}\right)^k - t \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{r^k}{(\bar{t})^{k+1}} + t \sum_{k=0}^{\infty} b_k k t^{k-1} A^{-k} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_k \left(\frac{r}{\bar{t}}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(\frac{\bar{t}}{A}\right)^k = f_1^{(j)} + i f_2^{(j)} \quad \text{на } L_j \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогично для задач кручения и изгиба

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{t}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{t}{A}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{r}{\bar{t}}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{\bar{t}}{A}\right)^k = f(t) + C_j \quad \text{на } L_j \quad (2.6)$$

3. Примеры. Напряженное состояние шестиугольной пластинки с центральной круглой полостью и двумя прямолинейными разрезами (фиг. 1). Однородная изотропная пластинка подвержена равномерно распределенным контурным нагрузкам. Учитывая в (2.5) вид отображающих функций (1.1) и (1.6), после некоторых преобразований из граничных условий на L_j получаем четыре системы линейных алгебраических уравнений и принимаем, что $q = 6$ и $\tau\bar{\tau} = 1$.

При численном счете в каждой из систем были удержаны по пять первых членов. Расчет проводился при следующих отношениях основных размеров сечения пластинки: вариант 1: $r/A = 0,5$, $e/A = 0,6$, $b/r = 1,92$; вариант 2: $r/A = 0,7$, $e/A = 0,8$, $b/r = 1,371428$.

Значения напряжений σ_r и σ_θ , вычисленных в характерных точках сечения и отнесенных к величине равномерной нагрузки P , приложенной к внешнему контуру (нагрузка на внутренний контур равна нулю), представлена в табл. 1.

В концевых точках разреза $z = \pm e$ были определены коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) и критическое значение контурной нагрузки. Были получены в долях $10K/(P\sqrt{l})$ следующие значения КИН (где $l = e - r$ — длина разреза): 6,72 для варианта 1 и 12,84 для варианта 2.

Для критического значения контурной нагрузки (при котором начинается распространение трещин) получено: $P_* = 1,534\sigma_b$ для варианта 1 и $P_* = 0,803\sigma_b$ для варианта 2, где σ_b — среднее значение технической прочности материала.

Если в упомянутых выше системах бесконечных линейных алгебраических урав-

Таблица 1

Таблица 2

Вариант	z/r	σ_r/P	$-\sigma_\theta/P$	Вариант	r/b	$\tau_{xz}/(\mu tb)$	$\tau_{yz}/(\mu tb)$
1	1,21	0,0012	2,68	1	0,7	—	1,769
	1,3	0,44	2,22		0,8	—	0,84
	1,6	-0,25	1,98		1,0	—	1,3617
	2,0	-1,0014	1,72		i	1,354	—
2	1,15	0,003	4,21	2	0,8	—	1,96
	1,2	-0,12	3,84		0,9	—	0,972
	1,3	0,34	3,33		1,0	—	1,47
	1,43	-1,002	2,43		i	1,362	—

вений принять $A = R$ и $m = 0$, то задача сводится к определению напряженного состояния круглой пластинки, ослабленной центральным круговым отверстием и двумя прямолинейными разрезами. При $r/R \leq 0,2$ и $l \leq r$ полученные результаты для σ_θ , КИН и значения критической нагрузки P совпадают с известными [7].

Кручение полого квадратного бруса с двумя разрезами (фиг. 2). Из граничных условий (2.6) с учетом отображающих функций (1.1) и (1.6) после некоторых преобразований (сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ) получаем две системы бесконечных линейных алгебраических уравнений.

Удерживая первые пять уравнений, в каждой системе определяем величины касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} по формуле

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu tb [\varphi'(z) - \bar{z}]$$

где τ — угол закручивания; вариант 1: $r/b = 0,5$, $e/b = 0,6$; вариант 2: $r/b = 0,5$, $e/b = 0,7$.

Значения τ_{xz} и τ_{yz} , вычисленные в характерных точках сечения, представлены в табл. 2.]

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1956. 648 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
3. Шерман Д. И. Об одной задаче теории упругости // ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 413—420.
4. Кулиев С. А. Об одной задаче для двухсвязной области некоторого вида // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1969. № 5. С. 46—53.
5. Кулиев С. А. Определение напряжений в скручиваемом бруске кругового кольцевого сечения с двумя разрезами // Изв. АН СССР. МТТ, 1986. № 5. С. 187—192.
6. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещины в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

Баку

Поступила в редакцию
19.1.1989

УДК 539.3 : 534.1

К. С. Пустовойт, И. Е. Трояновский, И. Н. Шардаков

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Предлагается подход к решению задачи об отыскании собственных частот и пространственных собственных форм колебаний упругого тела, пригодный для тел сложной геометрической формы. Подход основан на методе обратных итераций [1] с применением метода геометрического погружения¹ на каждой итерации. Приводятся приме-

¹ Шардаков И. Н., Трояновский И. Е., Труфанов И. Н. Метод геометрического погружения для решения краевых задач теории упругости: Препринт, Свердловск: Ин-т механики сплошных сред, 1984. 66 с.