УДК 532.54

А. В. Доманский

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В рамках одномерного приближения доказывается ряд качественных результатов о поведении обобщенных решений задачи вытеснения смачивающей жидкости несмачивающей в однородной пористой среде — монотонная зависимость от начальных данных, суммарного расхода жидкостей и перепада давлений, исследуется асимптотика при больших и малых временах.

Считая фильтрационное течение линейным или плоскорадиальным, систему уравнений двухфазной фильтрации запишем в виде

$$ms_t + x^{-n}(x^{-n}v_2)_x = 0, \qquad -ms_t + x^{-n}(x^n v_1)_x = 0 \tag{1}$$

$$v_i = -k\mu_i^{-1}f_i(s)\,p_{ix}, \quad i = 1,\ 2; \quad p_2 - p_1 = p_c(s)$$

Здесь s — насыщенность несмачивающей фазой, $0 \leqslant s \leqslant 1$, v_i, p_i — скорости фильтрации и давления несмачивающей ($i = 2$) и смачивающей фаз, m — постоянная пористость, k — проницаемость, μ_i — вязкости фаз, f_i — относительные проницаемости, p_c — капиллярное давление, $dp_c/ds \geqslant 0$, $p_c(0) = 0$; $n = 0$ для линейной фильтрации, $n = 1$ при радиальном притоке.

Начально-краевые условия таковы:

$$x = \nu, \quad p_2 = p_1 = p_* = \text{const} \tag{2}$$

$$x = 1, \quad v_1 = 0 \tag{3}$$

$$x = 1, \quad p_2 = p_0 = \text{const}, \quad \Delta p \equiv p_0 - p_* > 0 \tag{4}$$

$$x = 1, \quad v_2 = -Q(t) \leqslant 0 \tag{5}$$

$$s(x,\ 0) = s^\circ(x), \quad \nu \leqslant x \leqslant 1 \tag{6}$$

Здесь $\nu = 0$ в линейном случае, $\nu > 0$ — радиус скважины при радиальном притоке, p_0, p_*, Q — известные величины. Краевое условие (2) на выходном сечении моделирует «концевой» эффект ([1], с. 367) — при совместном истечении из пористой среды давления в жидкостях выравниваются. Условие (3) означает отсутствие потока вытесняемой жидкости на входе, а условия (4), (5) определяют режим вытеснения — заданы давление или расход вытесняющей жидкости на входном сечении.

Корректность одномерной задачи вытеснения несмачивающей жидкости смачивающей с учетом концевого эффекта доказана в [2], а для случая вытеснения смачивающей жидкости несмачивающей — в [3] [1].

Назовем задачу (1)—(4), (6) — задачей A, а задачу (1) — (3), (5), (6) — задачей $Б$.

Аналогично [3] систему (1) можно преобразовать к одному уравнению для насыщенности

$$s_t = (x^n a s_x + V(t)\,b)_x \tag{7}$$

а краевые условия записать в виде

$$x = 1, \quad x^n a s_x + Vb = 0, \quad s(\nu^2,\ t) = 0 \tag{8}$$

$$a = kf_1f_2\chi dp_c/ds, \quad b = \mu_2 f_1\chi, \quad \chi \equiv (f_2\mu_1 + f_1\mu_2)^{-1}$$

Суммарная скорость фильтрации V в случае задачи $Б$ равна -2^nQ, а для задачи A определяется функционалом

$$V = -2^n(\Delta p - F(s(1,\ t)))/J(t) \tag{9}$$

$$F = \mu_2\int_0^s \frac{a(\tau)}{kf_2(\tau)}\,d\tau, \qquad J = \int_{\nu^2}^1 \rho(x, s)\,dx, \qquad \rho = \mu_1\mu_2 x^{-n}\chi$$

В дальнейшем под решениями задач A, $Б$ понимаются обобщенные решения задач (6)—(9) и (5)—(8) соответственно.

Согласно физическому смыслу экспериментально определяемых функций капил

[1] См. также: *Доманский А. В.* Фильтрация несмешивающихся жидкостей в призабойной зоне скважины: Автореф. дис..... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1985. 137 с.

лярного давления и относительных проницаемостей

$$
\begin{gathered}
a(0) = a(1) = 0, \ a > 0, \ 0 < s < 1 \\
b(0) = 1, \ b(1) = 0; \ -db/ds, \ dF/ds \geqslant 0 \\
0 < \alpha^{-1} \leqslant \rho(x, s) \leqslant \alpha = \text{const}
\end{gathered} \tag{10}
$$

Поэтому уравнение (7) вырождается при двух значениях искомого решения.

Для задачи A сделаем дополнительные предположения

$$
s(1, t) = 1, \ t \geqslant 0, \ \Delta p > F(1), \ F(1) < \infty \tag{11}
$$

Уравнение (7) рассматривается в области $\Omega = \{\nu^2 < x < 1, \ 0 < t < T\}$, G — замыкание Ω. Были сформулированы [3] определения обобщенных решений задач A, $Б$ и методом регуляризации доказано существование последних. Так как утверждения, доказываемые ниже для классических решений уравнения (7), после соответствующего предельного перехода по параметру регуляризации остаются справедливыми и для обобщенных решений, то с целью упрощения изложения процедура регуляризации будет только подразумеваться.

Теорема 1. Пусть два различных перепада давления или суммарных расхода и начальные распределения насыщенности связаны неравенствами

$$
\Delta p_1 \leqslant \Delta p_2, \ Q_1(t) \leqslant Q_2(t), \ s_1^\circ(x) \leqslant s_2^\circ(x), \ -\alpha \leqslant \partial p/\partial s \leqslant 0 \tag{12}
$$

выполнено условие (11) и s_j° $(j = 1, 2)$ — непрерывные монотонно неубывающие функции. Тогда для соответствующих решений $s_j(x, t)$ задач A или $Б$

$$
s_1(x, t) \leqslant s_2(x, t), \ (x, t) \in G.
$$

Доказательство теоремы 1 осуществляется применением принципа максимума к функции

$$
w = \exp(-\beta t) \int\limits_{s_1}^{s_2} a(\tau)\, d\tau, \qquad \beta = \text{const}
$$

для которой получаются соответствующие уравнение и краевые условия. При этом используется свойство монотонного неубывания по x функции s [3]. Последнее условие в (12) используется при оценке знака разности $V_2 - V_1$.

Следствие 1. Рассмотрим стационарные решения $s_0(x)$ задач A и $Б$, полученные при постоянных Δp_0 и Q_0.

Пусть

$$
Q(t) \leqslant Q_0, \ \Delta p \leqslant \Delta p_0, \ s^\circ(x) \leqslant s_0(x) \tag{13}
$$

Тогда согласно теореме 1

$$
s(x, t) \leqslant s_0(x) \tag{14}
$$

Теорема 2. Если дополнительно к последнему условию в (12) $Q_t \geqslant 0$, $(a(s^\circ)\, s_x^\circ)_x \geqslant 0$, то $s_t \geqslant 0$ в G.

Доказательство теоремы проводится применением принципа максимума к функции

$$
H = \Bigl(\int\limits_0^s a(\xi)\, d\xi\Bigr)_t
$$

аналогично теореме 1.

Следствие 2. Таким образом, в условиях теорем 1, 2 имеет место монотонное возрастание функции насыщенности по x и t. Тогда из первых двух уравнений (1) следует монотонность скорости фильтрации каждой из фаз по x, а из второго и третьего уравнений (1) и условия (3) вытекает, что $v_1 \leqslant 0$ и $p_{1x} \geqslant 0$. Поэтому при учете последнего уравнения (1) имеем $p_{2x} \geqslant 0$ и тем самым $v_2 \leqslant 0$.

Лемма 1. Пусть

$$
R(x) \in C^1[\nu^2, 1], \ |R_x| \leqslant \mu_0
$$

$$
0 \leqslant R \leqslant \delta, \qquad \int\limits_{\nu^2}^1 \eta R\, dx \leqslant \bar{\mu}, \qquad \eta^{-1} \in L_q(\nu^2, 1), \qquad 0 < q < 1
$$

Тогда

$$
R \leqslant \max(N \bar{\mu}^r, \sqrt{N \mu_0 \bar{\mu}^r}), \qquad N = 2\Bigl(\int\limits_{\nu^2}^1 \eta^{-q}\, dx\, \delta\Bigr)^{1/(q+1)}, \qquad r = \frac{q}{q+1}
$$

Доказательство. Для любых γ, $\gamma_0 \in [\nu^2, 1]$ по неравенству Гельдера имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma}^{\gamma_0} R\,dx\right| \leqslant \int\limits_{\nu^2}^{1} R\,dx \leqslant \left[\int\limits_{\nu^2}^{1} \eta R\,dx\right]^{q/(q+1)} \left[\int\limits_{\nu^2}^{1} \eta^{-q}\,dx\delta\right]^{1/(q+1)}$$

Далее остается воспользоваться предложением 1 из [4]. Пусть

$$0 \leqslant Q_0 - Q \in L_q\,(0, \infty),\ a^{-1}\partial\rho/\partial s \leqslant \mu_2{}^2\,(\Delta p - F\,(1))^{-1} \tag{15}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теорем 1, 2 и (13), (15), $\Delta p = \Delta p_0$. Тогда

$$0 \leqslant \max_x \int\limits_{s}^{s_0} a\,(\tau)\,d\tau \leqslant Lt^{-\varkappa}, \quad 0 < \varkappa < \frac{1}{4}, \quad \varkappa, L = \mathrm{const} \tag{16}$$

Схема доказательства. Рассмотрим случай задачи A, $n = 0$. Вычитая из соответствующего стационарного уравнения для s_0 уравнение на s вида (7), умножим полученное равенство на

$$\eta = \sin {}^1\!/_4\,\pi x + \cos {}^1\!/_4\,\pi x - 1 + {}^1\!/_2 x\,(2 - x) \tag{17}$$

Интегрируем возникшее соотношение по x и далее проводим интегрирование по частям с учетом краевых условий (8) для s, s_0. Получим некоторое равенство, из которого с учетом (14) и условий на функции ρ, b из (12), (10), (15) после интегрирования по t имеем

$$\int\limits_0^t y\,(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{16}{\pi^2} \int\limits_0^1 \eta\,(x)\,dx \equiv M, \quad 0 \leqslant y \equiv \int\limits_0^1 \eta \int\limits_s^{s_0} a\,(\xi)\,d\xi\,dx$$

Ввиду монотонности s по t из последнего неравенства вытекает оценка $0 \leqslant y \leqslant Mt^{-1}$. Применяя лемму 1 (это возможно, так как доказана [3] ограниченность величин $a\,(s)\,s_x$, $a\,(s_0)\,s_{0x}$ равномерно по x, t), при достаточно больших t получим (16).

Для радиального притока можно величину η определить по формуле (17) где x заменить на $\lambda = \ln\,(\nu^{-2}x)/\ln \nu^{-2}$.

В случае задачи $Б$ достаточно требовать выполнения первого условия (15) и использовать функции $\eta = \sin {}^1\!/_2\pi x$, $n = 0$ и $\eta = \sin {}^1\!/_2\pi\lambda$, $n = 1$.

Замечание. Стационарные решения задач A и $Б$ имеют вид ($n = 0$)

$$s_0 = \begin{cases} F_0^{-1}\,(x_1^{-1} x F_0\,(1)), & 0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 1, & x_1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$F_0\,(s) = \int\limits_0^s \frac{a\,(\tau)}{b\,(\tau)}\,d\tau < \infty$$

где $F_0{}^{-1}$ — обратная функция к $F_0\,(s)$ и величина x_1 для задачи A определяется равенством

$$x_1 = (1 + (\Delta p - p_c\,(1))/F_0\,(1))^{-1},\ \Delta p \geqslant p_c\,(1)$$

а в случае задачи $Б$ $x_1 = F_0\,(1)/Q_0$, $Q_0 \geqslant F\,(1)$.

Если $\Delta p < p_c\,(1)$ или $Q_0 < F_0\,(1)$, то $s_0\,(1) < 1$.

Эти решения получены в [5] и описывают режим капиллярного запирания вытесняемой смачивающей жидкости, существование которого приводит к неполноте извлечения углеводородов.

Определим функцию $\varphi\,(x, t)$ равенством

$$\varphi = \int\limits_0^{s(\varphi)} a\,(\tau)\,d\tau, \qquad s\,(\varphi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ F_0^{-1}\,(\mu\xi), & 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1 \\ 1, & \xi_1 \leqslant \xi \end{cases}$$

$$\xi = x - 1 + \varepsilon t,\ \mu = F_0\,(1)/\xi_1;\ \xi_1,\ \varepsilon = \mathrm{const} > 0.$$

Теорема. 4. Пусть

$$\xi_1 \leqslant 1, \qquad \mu < \min_{t,\,s}\,(-V) \equiv \mu^+, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \min_s\,(-db/ds)\,(\mu^+ - \mu)$$

Тогда при $t \geqslant t_1 = \xi_1\varepsilon^{-1}$ выполняется условие (11) и для $t \geqslant t_2 = \varepsilon^{-1} \geqslant t_1$ функция $s\,(x, t) > 0$, $0 < x \leqslant 1$.

Схема доказательства. Введем функцию v равенством

$$\int_0^s a(\tau)\,d\tau = \exp(\beta t)\,v + \varphi, \qquad \beta = \mathrm{const}$$

В области $G_+ = \{1 - \varepsilon t \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant t_2\}$ она будет удовлетворять некоторым уравнению и краевому условию, из которых, поскольку φ, $s \geqslant 0$ и в G_+: $\varphi_{xx} = \varphi_{\xi\xi}$, $\varphi_x = \varphi_\xi$, $\varphi_t = \varepsilon\varphi_\xi$ (индекс ξ означает дифференцирование по ξ) при больших β по принципу максимума заключаем, что $v \geqslant 0$ в G_+.
Отсюда вытекают утверждения теоремы.

Следствие 3. Теорема 4 и результаты работы, цитированной в сноске на с. 849 позволяют отметить, что при малых t величина $s\ (1,\ t)$ растет как $F_0^{-1}(t)$.

Примером функций относительных проницаемостей и капиллярного давления, удовлетворяющих условиям теорем 1—4, служат зависимости

$$f_1(s) = (1 - s)(1 - s + {}^1/_3 s^2),\ f_2(s) = \mu^\circ(1 - f_1) + (1 - \mu^\circ)\, s^2 (3 - 2s)$$

$$p_c(s) = [s/(1{,}1 - s)]^{1/2},\ \mu^\circ = \mu_2/\mu_1 \leqslant 1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969. 545 с.
2. *Gagneux G.* Déplacements de fluides non miscibles incompressibles dans un cylindre poreux // J. méc. 1980. V. 19. No 2. P. 295—325.
3. *Доманский А. В.* О разрешимости одной задачи фильтрации несмешивающихся жидкостей // Динамика сплошной среды: Математические проблемы гидродинамики. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 59. С. 62—72.
4. *Van Duyn C. J., Peletier L. A.* Nonstationary filtration in partially saturated porous media // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1982. V. 78. No. 2. P. 173—198.
5. *Пеньковский В. И.* Концевой эффект капиллярного запирания вытесняемой фазы при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 184—187.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.V.1988

УДК 539.3

С. А. Кулиев

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Методом Д. И. Шермана исследуются некоторые двумерные задачи теории упругости для многосвязных областей.

Решение строится путем разложения в ряд потенциала Колосова — Мусхелишвили. С использованием полиномов Фабера и конформного отображения исходная задача сводится к решению систем бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения аналитических функций. Полученное решение иллюстрируется двумя примерами.

Как известно [1—3], многие задачи теории упругости сводятся к отысканию регулярных (и однозначных) в рассматриваемых областях S аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

Для плоской задачи (первой краевой задачи), когда область S ограничена несколькими гладкими замкнутыми контурами L_1, L_2, . . ., L_k, из которых последний охватывает все предыдущие, причем эти контуры не имеют общих точек, граничное условие на каждом контуре L_k ($k = 1, 2, \ldots$) имеет вид

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1^{(k)} + if_2^{(k)} \text{ на } L_k \tag{0.1}$$

$$f_1^{(k)} + if_2^{(k)} = i\int_{t_0}^{t} [T_{nx}^{(\ )} + iT_{ny}^{(k)}]\,ds + C_k$$