Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 62-50

А. И. Овсеевич

О ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Указан критерий полной управляемости линейной динамической системы с ограниченными управлениями, а также показано, что программное управление, осуществляющее переход системы из одного состояния в другое, можно строить в виде квазиполинома. Тем самым задача построения такого управления в принципе сведена к решению системы линейных уравнений.

1. Одним из фундаментальных результатов теории управления является критерий Калмана [1], дающий необходимые и достаточные условия полной управляемости динамических систем вида

$$x^{\cdot} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m \tag{1.1}$$

Здесь $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $B\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — линейные операторы, не зависящие от времени. Критерий Калмана состоит в том, чтобы пара матриц A, B удовлетворяла следующему условию общности положения:

$$\operatorname{rank}(B, \ AB, \ \ldots, \ A^{n-1}B) = n \tag{1.2}$$

При этом условии можно из любой точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ попасть в любую точку $x_1 \in \mathbf{R}^n$, двигаясь по траектории динамической системы (1.1) с некоторым управлением $u = u(t)$.

В данной работе указываются аналог критерия Калмана для случая, когда управления u в уравнении (1.1) стеснены ограничением

$$|u| \leqslant C \tag{1.3}$$

а также способ построения программного управления, обеспечивающего переход. Понятно, что при ограничении (1.3) условие Калмана (1.2) совершенно недостаточно для полной управляемости. Действительно, если, например, матрица A имеет строго отрицательные вещественные части у всех собственных чисел, то, исходя из любой точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и двигаясь вдоль траекторий системы (1.1), (1.3), нельзя выйти за пределы некоторого ограниченного множества, причем так будет при любом выборе матрицы B. Если же, наоборот, матрица A имеет строго положительные вещественные части у всех собственных чисел, то нельзя попасть, скажем, в $0 \in \mathbf{R}^n$ из достаточно далекой точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

2. Обсудим следующую теорему, впервые доказанную в [2], некоторые дальнейшие результаты см. в [3, 4].

Теорема 1. Для полной управляемости системы (1.1), (1.3) необходимо и достаточно кроме условия Калмана (1.2) еще следующее:

$$\operatorname{Re} \lambda_i = 0 \tag{2.1}$$

где λ_i — собственные числа матрицы A.

Поясним причины необходимости условия (2.1). Пусть для определенности у матрицы A имеется собственное значение λ, причем

$$\operatorname{Re} \lambda = a < 0 \tag{2.2}$$

Заметим, что замена A на $-A$ не изменяет свойства полной управляемости системы (1.1), (1.3), поэтому знак меньше в условии (2.2) не ограничивает общности. Пусть D_T — область достижимости за время T системы (1.1), (1.3) с начальным условием $x(0) = 0$, а h_T — ее опорная функция. Имеем [5]

$$h_T(\xi) = \int \sup_{|u| \leqslant C} (\exp(A(T-t))Bu, \xi)\, dt \leqslant C\,|B| \int |\exp(A^*(T-t))\,\xi|\, dt \tag{2.3}$$

Здесь и всюду далее интегрирование по t ведется от 0 до T, A^* — матрица, транспонированная к A, $|B|$ — норма матрицы B. Из условия (2.2) следует, что существует такой вектор $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n$, что

$$|\exp(A^*t)\,\xi| \leqslant C \exp(at), \quad a < 0 \tag{2.4}$$

Для этого достаточно положить $\xi = x + \bar{x}$, где $x \in \mathbf{C}^n$ — собственный, не чисто мнимый вектор матрицы A^* с собственным значением λ, $\bar{x}$ — комплексно-сопряженный вектор. Из соотношений (2.3), (2.4) вытекает, что величина $h_T(\xi)$ ограничена равномерно по T, что противоречит полной управляемости. Следовательно, условие (2.1) необходимо.

3. Покажем теперь, что управление $u(t)$, обеспечивающее переход из одной точки в другую, можно взять в виде векторного квазиполинома вида

$$u(t) = \sum a_{kl} \exp(\lambda_k t) \quad t^l, \quad a_{kl} \in \mathbf{C}^n \tag{3.1}$$

где λ_k — собственные значения либо матрицы A, либо $-A$.

Теорема 2. Пусть система (1.1), (1.3) вполне управляема (что означает, согласно теореме 1, выполнение условий (1.2), (2.1)). Тогда для перевода системы из заданного состояния в заданное можно использовать управление вида (3.1).

Пусть управление $u(t)$ таково, что траектория системы (1.1) проходит через точки x_0, $x_1 \in \mathbf{R}^n$, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, $T \geqslant 0$. Это эквивалентно тому, что

$$\int \exp(A(T-t))\, Bu(t)\, dt = x_1 - \exp(AT)\, x_0$$

Будем искать u в виде $u = u_0 + u_1$, где

$$\int \exp(A_i(T-t))\, Bu_i(t)\, dt = x_i(-1)^i, \quad A_i = A(-1)^i, \quad i = 0, 1 \tag{3.2}$$

Если найти решение — квазиполином $u_i(t)$ уравнений (3.2), такое, что норма $|u_i(t)|$ мала́, например не превосходит $C/2$, где C — постоянная из (1.3), то тем самым будет найдено квазиполиномиальное управление, переводящее систему (1.1), (1.3) из x_0 в x_1 за время T. Заметим, что если для матрицы A выполнены условия (1.2), (2.1), то они выполнены и для A_i. Поэтому окончательно задача сводится к решению уравнения

$$\int_0^T \exp(A(T-t))\, Bu(t)\, dt = x \tag{3.3}$$

относительно неизвестного квазиполинома $u(t)$ с малой нормой, если матрицы A, B удовлетворяют условиям (1.2), (2.1), а время T достаточно велико.

Будем искать u в виде

$$u = u_{T,\xi}(t) = B^* \exp(A^*(T-t))\, \xi \tag{3.4}$$

Очевидно (см. [6]), что u — квазиполином. Из конструкции (3.4) естественным образом возникают помимо евклидовой нормы $|\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}$ вектора ξ еще две нормы и оператор P:

$$\|\xi\|_{\infty, T} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |B^* \exp(A^*(T-t))\, \xi| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |u_{T,\xi}(t)|$$

$$\|\xi\|_{2, T} = \left(\int |B^* \exp(A^*(T-t))\, \xi|^2\, dt\right)^{1/2} = \left(\int |u_{T,\xi}(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

$$P\xi = P_T\xi = \int \exp(A(T-t))\, Bu_{T,\xi}(t)\, dt$$

В этих обозначениях задача (3.3) сводится к решению уравнения

$$P_T\xi = x \tag{3.5}$$

с малой ($\leqslant C/2$) нормой $\|\xi\|_{\infty, T}$.

Отметим, что существование решения ξ (без оценки нормы $\|\xi\|_{\infty, T}$) уравнения (3.5) следует из условия Калмана (1.2). Видно, что

$$(P_T\xi, \xi) = \|\xi\|_{2,T}^2 \tag{3.6}$$

и что (в силу условия Калмана (1.2))

$$|\xi| \leqslant c\|\xi\|_{\infty, T} \tag{3.7}$$

где постоянная c не зависит от T.

Основной факт, позволяющий найти решение ξ уравнения (3.5) с малой нормой $\|\xi\|_{\infty, T}$, состоит в следующем.

Лемма. Пусть выполнено условие (2.1). Тогда при $T \to \infty$ равномерно по $\xi \neq 0$ имеем $\|\xi\|_{2,T}^2 / \|\xi\|_{\infty,T}^2 \geqslant cT$, где c — положительная постоянная (не зависящая от T и ξ).

Считая лемму установленной, оценим норму $\| \xi \|_{\infty, T}$ решения ξ уравнения (3.5) Имеем в силу (3.5), (3.6) и леммы

$$(x, \ \xi) = \| \xi \|^2_{2, T} \geqslant cT \| \xi \|^2_{\infty, T} \tag{3.8}$$

при больших T. Неравенство Коши — Буняковского и неравенство (3.7) показывают, что $c \mid x \mid \ \| \xi \|_{\infty, T} \geqslant \mid (x, \ \xi) \mid$. Теперь из (3.8) получаем

$$\| \xi \|_{\infty, T} \leqslant c \mid x \mid / T \tag{3.9}$$

и поэтому, в частности, при больших T всякое решение ξ уравнения (3.5) имеет малую норму $\| \xi \|_{\infty, T}$. Из неравенства (3.9) следует также, что можно перейти из точки $0 \in \in \mathbf{R}^n$ в точку $x \in \mathbf{R}^n$ или в обратном порядке за время $T = 0 (\mid x \mid)$.

Остается доказать лемму. Пусть $u (t) = u_{T, \xi} (t) = \sum a_{kl} \exp (\lambda_k t) \, t^l, \ a_{kl} \in \mathbf{C}^n$. Тогда $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ в силу условия (2.1).

Имеем $u (t) = \sum p_k (t) \exp (i \omega_k t)$, где p_k — (векторзначные) полиномы, степень которых не превосходит максимального размера жордановых клеток матрицы A с собственным значением $i\omega_k$, ω_k — вещественное число. Нужно показать, что для функций u такого вида выполняется при $T \to \infty$ неравенство

$$I = \int \mid u (t) \mid^2 dt \geqslant cT \| u \|^2_{\infty, T}, \quad \| u \|_{\infty, T} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mid u (t) \mid \tag{3.10}$$

В самом деле

$$I = T \langle \mid u (T\tau) \mid^2 \rangle = T \left\langle \left| \sum p_k (T\tau) \exp (i\omega_k T\tau) \right|^2 \right\rangle = T \sum J_k + T \sum_{k \neq l} K_{kl}$$

$$J_k = \langle \mid p_k (T\tau) \mid^2 \rangle, \quad K_{kl} = \langle (p_k (T\tau), p_l (T\tau)) \exp i (\omega_k - \omega_l) T\tau \rangle \tag{3.11}$$

$$\langle f (\tau) \rangle = \int_0^1 f (\tau) \, d\tau, \quad (x, y) = \sum x_i \bar{y}_i, \ x, y \in \mathbf{C}^n$$

((,) — стандартное эрмитово скалярное произведение).

Положим $p_{k, T} (t) = p_k (Tt)$. Тогда, очевидно,

$$J_k \geqslant c_1 \| p_{k,T} \|^2_{\infty, 1} = c_1 \| p_k \|^2_{\infty, T} \tag{3.12}$$

где постоянная c_1 зависит только от степени многочленов p_k, или, что то же самое, от размеров жордановых клеток матрицы A. Более точные вычисления с полиномами Лежандра показывают, что можно взять в виде $(1/ \deg p_k)^2$. Второе слагаемое в (3.11) можно оценить, интегрируя по частям:

$$\mid TK_{k, l} \mid = \left| - \left\langle \frac{\exp (i (\omega_k - \omega_l) T\tau)}{i (\omega_k - \omega_l)} \frac{d}{d\tau} (p_{k, T}, p_{l, T}) (\tau) \right\rangle + \right. \tag{3.13}$$

$$\left. + \frac{\exp (i (\omega_k - \omega_l) Tt)}{i (\omega_k - \omega_l)} (p_{k, T}, p_{l, T})(t) \Big|_0^1 \right| \leqslant \Omega^{-1} \left(\left\langle \left| \frac{dp (\tau)}{d\tau} \right| \right\rangle + 2 \| p \|_{\infty, 1} \right),$$

$$p = (p_{k, T}, p_{l, T}), \quad \Omega = \min_{k \neq l} (\omega_k - \omega_l)$$

Очевидна оценка

$$\langle \mid dp (\tau) / d\tau \mid \rangle \leqslant c_2 \| p \|_{\infty, 1} \tag{3.14}$$

с некоторой постоянной c_2, а из известных результатов теории приближений (см. [7]) следует, что $c_2 \leqslant (\deg p)^2$ и даже более точная оценка $c_2 \leqslant \langle \mid dT_N (\tau) / d\tau \mid \rangle$, где $N = \deg p$, T_N — полином Чебышева;

Собирая вместе неравенства (3.12)—(3.14), получим для второго слагаемого в (3.11 мажоранту вида

$$\Omega^{-1} c_2 \sum_{k \neq l} \| p_k \|_{\infty, T} \| p_l \|_{\infty, T} \leqslant \Omega^{-1} c_2 \left(\sum \| p_k \|_{\infty, T} \right)^2 \tag{3.15}$$

где постоянная c_2 зависит только от размера жордановых клеток матрицы A (или, что то же самое, от степеней полиномов p_k) и может быть оценена так:

$$c_2 \leqslant \max_{k \neq l} (\deg p_k + \deg p_l)^2 + 2$$

Из неравенств (3.11), (3.12) и (3.15) получаем

$$I \geqslant c_1 T \sum_{k=1}^{M} \| p_k \|^2_{\infty, T} - c_2 \Omega^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M} \| p_k \|_{\infty, T} \right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant (c_1 T / M - c_2 / \Omega) \left(\sum \| p_k \|_{\infty, T} \right)^2 \geqslant (c_1 T / M - c_2 / \Omega) \| u \|^2_{\infty, T}$$

что доказывает (при $T \to \infty$) неравенство (3.10) и лемму. Теорема 2 доказана.

4. В качестве примера рассмотрим механическую систему, состоящую из N маятников с общей точкой подвеса. Это точка подвеса совершает управляемое движение с ограниченным ускорением. В линейном приближении уравнения движения имеют вид

$$x^{\cdot\cdot} = u; \ x_i^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 x_i = u, \ i = 1, \ldots, N; \ |u| \leqslant 1$$

Здесь x — смещение точки подвеса, x_i — смещение i-го маятника. Задача управления состоит в успокоении системы: перевода из данного начального состояния в состояние, в котором смещения и скорости всех маятников и точки подвеса нулевые. Из предыдущих результатов следует, что решение этой задачи возможно для любого начального состояния, если и только если частоты $|\omega_i| \neq 0$ все различны (это расшифровка условия Калмана (1.2)). Можно также, следуя доказательству теоремы 2, оценить время успокоения T при использовании квазиполиномиального управления u вида

$$u(t) = \xi_1 + \xi_2 t + \operatorname{Re} \sum a_k \exp(i\omega_k t), \qquad a_k \in \mathbf{C}$$

Окончательный результат выражается неравенством ($\mathbf{x}$ — вектор состояния в начальный момент)

$$\begin{gathered} T \leqslant 2\sqrt{N+2}\,|\mathbf{x}| + 4((N-1)/\Omega + \sqrt{14N}/\omega) \\ \mathbf{x} = (x, x^{\cdot}, x_1, x_1^{\cdot}, \ldots, x_N, x_N^{\cdot}) \\ |\mathbf{x}|^2 = x^2 + (x^{\cdot})^2 + \sum (\omega_i x_i)^2 + (x_i^{\cdot})^2 \\ \Omega = \min_{i,\, j=1,\ldots,N} |\omega_i \pm \omega_j|, \qquad \omega = \min_{i=1,\ldots,N} |\omega_i| \end{gathered} \tag{4.1}$$

Подробный вывод оценки (4.1) параллелен доказательству теоремы 2 и требует довольно громоздких выкладок.

Аналогичные результаты были получены Ф. Л. Черноусько в задаче успокоения системы N маятников (без успокоения точки подвеса) и в задаче успокоения одного маятника вместе с точкой подвеса.

Отметим, что вид (3.4) закона управления был указан еще в работах Калмана 1960-х годов.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за обсуждения. В частности, формула (3.4) программного управления была указана автору Ф. Л. Черноусько, который с помощью управления такого типа нашел явную оценку времени успокоения для управляемой системы маятников с общей точкой подвеса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Brammer R. F.* Controllability of linear autonomous systems with positive pastive controllers // SIAM J. on Control. 1972. V. 10, No 2. P. 339—353.
3. *Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н.* Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 1967—1979.
4. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
6. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
7. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: Наука, 1987. Т. 14. С. 103—260.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1988