Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.375

В. Б. Зеленцов, Л. М. Филиппова

ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ УПРУГИХ СРЕД

Рассматривается плоская задача о равновесии кусочно-однородного тела, ослабленного трещиной, расположенной на границе раздела материалов и находящейся под равномерной нагрузкой. В теле имеются начальные напряжения, действующие в направлении границы раздела. Решение задачи найдено путем приведения к системе сингулярных интегральных уравнений. Установлено, что так же, как в аналогичной задаче без учета начальных напряжений [1—3], вблизи кончика трещины решение имеет быстроосциллирующий характер, причем зона осцилляции расширяется с увеличением предварительного сжатия.

1. Рассмотрим кусочно-однородное упругое тело, состоящее из двух полуплоскостей, скрепленных между собой по всей границе раздела $y = 0$, за исключением отрезка $|x| < 1$, представляющего собой прямолинейную трещину в виде бесконечно тонкого разреза. Здесь x, y — безразмерные координаты, отнесенные к длине трещины a. Тело подвержено предварительной однородной конечной деформации, при которой отсутствуют напряжения на прямых, параллельных оси x. Берега трещины нагружены равномерным давлением p и равномерной сдвигающей нагрузкой интенсивности τ. Деформация, вызванная нагружением берегов трещины, предполагается малой, поэтому при решении задачи будем пользоваться линеаризованными уравнениями равновесия предварительно напряженной среды [4].

Решение поставленной задачи для нелинейно упругих материалов общего вида представляет значительные технические трудности, поэтому будем исследовать конкретные модели материалов. В этом пункте предполагается, что материалы, заполняющие нижнюю и верхнюю полуплоскости, несжимаемы и описываются моделью Муни [4, 5] с модулем сдвига G_1 в нижней полуплоскости $y < 0$ и модулем сдвига G_2 в верхней полуплоскости.

Математическая постановка задачи содержит помимо дифференциальных уравнений, приведенных в [4], граничные условия на прямой $y = 0$

$$\begin{gathered} u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \theta_{yy1} = \theta_{yy2}, \quad \theta_{yx2} = \theta_{yx1}, \quad 1 < |x| < \infty \\ \theta_{yy1} = \theta_{yy2} = -p, \quad \theta_{yx1} = \theta_{yx2} = \tau, \quad |x| \leqslant 1 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие перемещения, θ_{yx}, θ_{yy} — компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы. Индекс 1 относится к нижней полуплоскости, индекс 2 — к верхней полуплоскости.

При помощи интегрального преобразования Фурье поставленная задача в классе функций, убывающих на бесконечности, сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений на разрезе $y = 0$, $|x| < 1$

$$\frac{\delta}{\Delta^2} u'(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v(\xi)}{(\xi - x)^2} d\xi = p_*, \quad |x| \leqslant 1 \tag{1.2}$$

$$\delta v'(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)}{(\xi - x)^2} d\xi = \tau_*, \quad |x| \leqslant 1$$

$$u = u_1|_{y=0} - u_2|_{y=0}, \quad v = v_1|_{y=0} - v_2|_{y=0}$$

$$p_*' = pR\xi(\Delta, \varepsilon)\, a, \quad \tau_* = \tau R\Delta^2\xi(\Delta, \varepsilon)\, a$$

$$\xi(\Delta, \varepsilon) = L(\Delta)(1 - \varepsilon^2) - 2(1 + \varepsilon)\Delta^2(\Delta^2 + 1)^2 + 2(1 - \varepsilon)\cdot$$
$$\cdot(\Delta^2 - 1)^2$$

$$L(\Delta) = \Delta^6 + \Delta^4 + 3\Delta^2 - 1, \quad R^{-1} = G_1\varepsilon(1 + \varepsilon)(1 + \Delta^2)$$

$$\delta = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{\Delta^2 - 1}{\Delta^2 + 1}, \quad \varepsilon = \frac{G_1}{G_2}$$

Здесь $\Delta = 1 + e > 0$, где e — величина предварительной однородной деформации вдоль оси x, штрихом обозначена производная по x.

Полученная система интегральных уравнений сводится к задаче Гильберта на разрезе. Используя [6], решение системы получим в виде ($|x| \leqslant 1$)

$$u(x) = -\Delta\chi(\Delta, \varepsilon)[\tau\Delta\cos\omega(x) + p\sin\omega(x)](1 - x^2)^{1/2}$$
$$v(x) = \chi(\Delta, \varepsilon)[p\cos\omega(x) - \tau\Delta\sin\omega(x)](1 - x^2)^{1/2} \tag{1.3}$$
$$\chi(\Delta, \varepsilon) = aR^{-1}\xi(\Delta, \varepsilon)L^{-1}(\Delta), \quad \omega(x) = \gamma\ln(1 + x)/(1 - x)$$
$$\gamma = (2\pi)^{-1}\ln\alpha, \quad \alpha = (\Delta - \delta)/(\Delta + \delta)$$

Найденные решения (1.3) определяют расхождение берегов трещины и позволяют получить поле перемещений в теле. В частности, перемещения в нижней полуплоскости ($y \leqslant 0$) вычисляются по формулам

$$v_1(x, y) = aK_1(\Delta, \varepsilon)\{-\Delta l_{11}\operatorname{Re}F_1(z_1) - l_{12}\operatorname{Im}F_2(z_1) + \Delta l_{21}\operatorname{Re}F_1(z) +$$
$$+ l_{22}\operatorname{Im}F_2(z)\} \tag{1.4}$$
$$F_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}[p\sin\omega_* - \tau\Delta\cos\omega_*] + \Delta\tau z$$
$$F_2(z) = -(z^2 - 1)^{1/2}[p\sin\omega_* + \tau\Delta\sin\omega_*] + pz$$
$$l_{11} = -\varepsilon(\Delta^2 - 1) - 4\varepsilon\Delta^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon(1 + \Delta^4)[2 - \varepsilon(1 + \Delta^4)]$$
$$l_{12} = -2\varepsilon(\Delta^4 - 1)\Delta^2 - 2\varepsilon\Delta^2(1 + \Delta^4 - 2\varepsilon) + \varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + \Delta^4)^2$$
$$l_{21} = \varepsilon(1 + \Delta^4)(\Delta^2 - 1)^2 + 4\varepsilon(1 + \varepsilon)\Delta^2 - \varepsilon(1 + \Delta^4)[2\Delta^2 + \varepsilon(1 +$$
$$+ \Delta^4)]$$
$$l_{22} = 2\varepsilon(\Delta^2 - 1)^2\Delta^2 + 2\varepsilon\Delta^2(1 + \Delta^4 + 2\varepsilon\Delta^2) - \varepsilon(1 + \varepsilon)\Delta^2(1 + \Delta^4)^2$$
$$K_1^{-1}(\Delta, \varepsilon) = G_1R(\Delta^2 - 1)L(\Delta), \quad \omega_* = \gamma\ln(z + 1)/(z - 1)$$
$$z_1 = x + iy\Delta^2, \quad z = x + iy$$
$$u_1(x, y) = aK_1(\Delta, \varepsilon)\{\Delta^2 l_{11}\operatorname{Im}F_3(z_1) - \tag{1.5}$$
$$- \Delta^2 l_{12}\operatorname{Re}F_{11}(z_1) - \Delta l_{11}\operatorname{Im}F_3(z) + l_{22}\operatorname{Re}F_4(z)\}$$
$$F_3(z) = (z^2 - 1)^{1/2}(p\sin\omega(z) + \tau\Delta\cos\omega(z)) + \tau\Delta z$$
$$F_4(z) = (z^2 - 1)^{1/2}(p\cos\omega(z) - \tau\Delta\sin\omega(z)) - pz$$

Из (1.4), (1.5) вытекает выражение для перемещений нижнего берега трещины

$$v_1(x) = 0{,}5a\varepsilon R^{-1}L^{-1}(\Delta)[(pm_-\cos\omega + \tau\Delta m_+\sin\omega)(1 - x^2)^{1/2} -$$
$$- 4\Delta^3(1 - \Delta^4)x\tau], \quad |x| \leqslant 1 \tag{1.6}$$
$$m_\pm = 4\Delta(1 - \Delta^4)\operatorname{sh}\pi\gamma \pm 2g(\Delta, \varepsilon)$$
$$g(\Delta, \varepsilon) = \Delta^6 + 3\Delta^4 - \Delta^2 + 1 + \varepsilon L(\Delta)$$
$$v_1(x) = -2\varepsilon a\Delta(1 - \Delta^4)R^{-1}L^{-1}(\Delta)[(p\sin\omega + \Delta\tau\cos\omega)(x^2 - 1)^{1/2} +$$
$$+ \tau\Delta x], \quad |x| > 1 \tag{1.7}$$
$$u_1(x) = -a\varepsilon R^{-1}L^{-1}(\Delta)\{(pn_-\sin\omega - \tau\Delta n_+\cos\omega)(1 - x^2)^{1/2} -$$
$$- 2\Delta^2(\Delta^4 - 1)x\}, \quad |x| \leqslant 1 \tag{1.8}$$
$$n_\mp = 2\Delta^2(\Delta^4 - 1)\operatorname{sh}\pi\gamma \mp \Delta g(\Delta, \varepsilon)$$
$$u_1(x) = -2a\varepsilon(\Delta^4 - 1)R^{-1}L^{-1}(\Delta)[(p\cos\omega - \tau\Delta\sin\omega)(x^2 - 1)^{1/2} -$$
$$- px], \quad |x| > 1 \tag{1.9}$$

В формулах (1.4)—(1.9) отброшены слагаемые, характеризующие перемещение тела как абсолютно твердого.

Как и в [1—3], относительные смещения u, v берегов трещины осциллируют при приближении к вершине трещины, причем частота осцилляции стремится к бесконечности при $|x| \to 1$. Анализ величины зоны осцилляции позволяет указать интервал физической корректности решаемых задач.

Для материалов Муни могут представиться три случая.

При $\varepsilon \neq 1$ (разные материалы) и при $\Delta = 1$ (отсутствие преднапряжений) имеем $\gamma = 0$, т. е. осцилляция отсутствует. При этом система интегральных уравнений распадается на два отдельных уравнения. Это существенное отличие от аналогичной задачи для ненапряженной среды [1—3] связано с несжимаемостью материала.

При $\varepsilon = 1$ (одинаковые материалы) и $\Delta \neq 1$ (имеются преднапряжения) осцилляция также отсутствует. Заметим, что в этом случае при $p = 0$, $\tau \neq 0$ берега трещины испытывают вертикальные перемещения, хотя раскрытия трещины не происходит [4].

При $\varepsilon = 1$ и $\Delta \neq 1$ (различные преднапряженные материалы) осцилляция имеет место, при этом параметр α, характеризующий зону осцилляции, удовлетворяет неравенству $\alpha_*^{-1} < \alpha < \alpha_*$

$$\alpha_* = \max\{f_-/f_+,\ f_+/f_-\},\quad f_\pm = \Delta^3 \pm \Delta^2 + \Delta \mp 1$$

Указанное неравенство получено в предположении возможности крайних отношений жесткостей материалов ($\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \infty$). Тогда $\alpha_* \in (0, \infty)$, если $\Delta > \Delta_* = 0{,}5437$, где Δ_* — ближайший к единице корень уравнения $f_-(\Delta)\, f_+(\Delta) = 0$.

При $\Delta \to \Delta_*$ перемещения в теле неограниченно возрастают, т. е. наступает неустойчивость кусочно-однородной преднапряженной среды с трещиной. Заметим, что величина критической деформации кусочно-однородного тела Δ_* совпадает с критической деформацией однородного тела Муни с трещиной [4]. Это совпадение обусловлено тем, что для материала

Таблица 1

ε	$e = -0{,}455$	$e = -0{,}4$	$e = -0{,}2$	$e = 0{,}2$
0,5	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-8}$	$8{,}6 \cdot 10^{-24}$	$3{,}6 \cdot 10^{-43}$
0,1	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	$8{,}3 \cdot 10^{-10}$	$9{,}1 \cdot 10^{-18}$
0,01	$1{,}9 \cdot 10^{-1}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$3{,}4 \cdot 10^{-8}$	$1{,}2 \cdot 10^{-15}$

Муни критическая деформация не зависит от модуля сдвига. Подсчеты показывают, что зона осцилляции перемещений существенно проявляется только при Δ, достаточно близких к Δ_*.

В табл. 1 даны значения относительной ширины зоны осцилляции $\Delta x = e^{-2\pi/\ln\alpha}$ [3] от конца трещины при разных ε и Δ. Как показывают формулы (1.3), (1.6), (1.8), в данном случае при $p = 0$, $\tau \neq 0$ вертикальные перемещения нижнего и верхнего берегов трещины различны. Это означает, что в отличие от однородного материала трещина раскрывается под действием касательной нагрузки.

Для истинных добавочных напряжений σ_{SK} [4], используя формулы (1.4)—(1.9), получим

$$\sigma_{yy1} = \theta_{yy1} = \Delta^{-3} M \{2\Delta^3 l_{11} \operatorname{Im} F_5(z_1) + 2\Delta^2 l_{12} \operatorname{Re} F_6(z_1) - \Delta(1 + \Delta^4)\, l_{21} \operatorname{Im} F_5(z) - (1 + \Delta^4)\, l_{22} \operatorname{Re} F_6(z)\}$$

$$M^{-1} = \varepsilon (1 + \varepsilon) (\Delta^2 - 1)^2 (\Delta^2 + 1) L (\Delta), \quad z_1 = x + iy\Delta, \quad z = x + iy$$

$$F_5(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-1/2} (p \sin \omega - \tau\Delta \cos \omega) + (z^2 - 1)^{-1/2} \times$$
$$\times [(2\gamma p + \Delta\tau) \cos \omega - (p - 2\Delta\tau\gamma) \sin \omega]$$
$$F_6(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-1/2} (p \cos \omega + \tau\Delta \sin \omega) - p -$$
$$- (z^2 - 1)^{-1/2} [(p - 2\Delta\gamma\tau) \cos \omega + (2\gamma p + \Delta\tau) \sin \omega] \tag{1.10}$$
$$\omega = \gamma \ln [(z - 1)/(z + 1)]$$
$$\sigma_{yy1} = \theta_{yy1} = \begin{cases} F_6(x), & |x| > 1 \\ -p, & |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

Из формул (1.10) можно сделать вывод, что нормальные напряжения имеют особенность $\rho^{-1/2}$ ($\rho = \sqrt{(x^2 - 1)^2 + y^2}$) при приближении к точке $x = 1$, $y = 0$. В частности, при $\tau = 0$ асимптотика σ_{yy1} имеет вид

$$\theta_{yy1} = \sigma_{yy1} = M (M_1 \cos \omega + M_2 \sin \omega) (2\rho)^{-1/2} + O(\rho^{1/2}) \tag{1.11}$$
$$M_1 = - 4\Delta^3 (1 + \gamma) \alpha_0^{-1} l_{11} \sin {}^1/_2 \varphi_1 + 2\Delta^2 \alpha_0^{-1} l_{12} \cos {}^1/_2 \varphi_1 +$$
$$+ 2\Delta (1 + \gamma) (1 + \Delta^4) l_{21} \sin {}^1/_2 \varphi - (1 + \Delta^4) l_{22} \cos {}^1/_2 \varphi$$
$$M_2 = 2\Delta^3 \alpha_0^{+1} l_{11} \sin {}^1/_2 \varphi_1 - 4\gamma\Delta^2 \alpha_0^{-1} l_{12} \cos {}^1/_2 \varphi_1 - \Delta (1 + \Delta^4) l_{21} \sin {}^1/_2 \varphi +$$
$$+ 2\gamma (1 + \Delta^4) l_{22} \cos {}^1/_2 \varphi$$
$$x = 1 + \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \alpha_0 = (\cos^2 \varphi + \Delta^4 \sin^2 \varphi)^{1/4}$$
$$\sin {}^1/_2 \varphi_1 = \operatorname{sign} \varphi [1 - \alpha_0^{-2} \cos \varphi]^{1/2} / \sqrt{2}$$
$$\cos {}^1/_2 \varphi_1 = [1 + \alpha_0^{-2} \cos \varphi]^{1/2} / \sqrt{2}$$

На продолжении линии трещины напряжения имеют вблизи концов трещины осцилляции. Другие компоненты напряжений выражаются соотношениями

$$\theta_{yx1} = \Delta^{-2} M \{- \Delta (\Delta^4 + 1) l_{11} \operatorname{Re} F_7(z_1) - (\Delta^4 + 1) l_{12} \operatorname{Im} F_8(z_1) +$$
$$+ 2\Delta l_{21} \operatorname{Re} F_7(z) + 2 l_{22} \operatorname{Im} F_8(z)\}$$
$$F_7(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-1/2} (\rho \sin \omega - \Delta\tau \cos \omega) + \Delta\tau -$$
$$- (z^2 - 1)^{-1/2} [(- 2\gamma p + \Delta\tau) \cos \omega + (p + 2\gamma\Delta\tau) \sin \omega]$$
$$\theta_{yx1} = \Delta^{-2} M \{-2\Delta^5 l_{11} \operatorname{Re} F_7 (z) - 2\Delta^4 l_{12} \operatorname{Im} F_8 (z_1) + (1 + \Delta^4) \cdot$$
$$\cdot \Delta l_{21} \operatorname{Re} F_7 (z) + (1 + \Delta^4) l_{22} \operatorname{Im} F_8 (z)]\}$$
$$\theta_{xx1} = \Delta^{-2} M [\Phi_1 (z_1, z) + (\Delta^4 + 3) \Phi_2 (z_1, z)]$$
$$\Phi_1 (z_1, z) = 2\Delta^3 l_{11} \operatorname{Im} F_5 (z_1) + 2\Delta^2 l_{12} \operatorname{Re} F_6 (z_1) - \Delta (1 +$$
$$+ \Delta^4) l_{21} \operatorname{Im} F_5 (z) - (1 + \Delta^4) l_{22} \operatorname{Re} F_6 (z)$$
$$\Phi_2 (z_1, z) = \Delta^3 l_{11} \operatorname{Im} F_9 (z_1) - \Delta^2 l_{12} \operatorname{Re} F_{10} (z_1) -$$
$$- \Delta l_{21} \operatorname{Im} F_9 (z) + l_{22} \operatorname{Re} F_{10} (z)$$
$$F_9 (z) = (z^2 - 1)^{-1/2} [(pz + 2\gamma\Delta\tau) \sin \omega + (\Delta\tau z + 2\gamma p) \cos \omega] - \Delta\tau$$
$$F_{10} (z) = (z^2 - 1)^{-1/2} [(pz + 2\gamma\Delta\tau) \cos \omega + (2\gamma p - \Delta\tau z) \sin \omega] - p$$
$$F_8(z) = - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-1/2} (p \cos \omega + \Delta\tau \sin \omega) +$$
$$+ (z^2 - 1)^{-1/2} [(p - 2\gamma\tau\Delta) \cos \omega + (2\gamma p + \Delta\tau \sin \omega)]$$
$$\theta_{yx1} = \begin{cases} \Delta^{-1} F_7(x), & |x| > 1 \\ \tau, & |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

Все приведенные формулы при $\varepsilon = 1$ (одинаковые материалы) переходят в соответствующие формулы работы [4].

2. Рассмотрим задачу о трещине на границе раздела двух преднапряженных сред в предположении, что каждая среда описывается моделью сжимаемого полулинейного (гармонического) материала. В этом случае

линеаризованные уравнения равновесия плоской задачи при однородном поле начальных напряжений имеют вид [5, 7]

$$\frac{\partial\theta_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\theta_{yx}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\theta_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\theta_{yy}}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

котором

$$\theta_{xx}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$
$$\theta_{yy}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial x}+(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{2.2}$$
$$\theta_{xy}=\frac{2\mu}{1+(1-2\nu)\Delta}\left[(1-\nu\Delta)\frac{\partial u}{\partial y}+(1-\nu)\Delta\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$
$$\theta_{yx}=\frac{2\mu}{1+(1-2\nu)\Delta}\left[(1-\nu)\Delta\frac{\partial u}{\partial y}+(1-\nu\Delta)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

Здесь x, y — декартовы координаты в недеформированном состоянии тела, u, v — компоненты перемещений, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, Δ — кратность удлинения в направлении оси x для начального плоского деформированного состояния. Граничные условия задачи на линии раздела материалов ($y=0$) повторяют (1.1).

Предполагается, что на бесконечности перемещения исчезают. Как и в п. 1, преобразованием Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений типа (1.2), которая, в свою очередь, приводится [1] к решению одного интегрального уравнения

$$2\pi i\psi'(x)=2\delta\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^2}=-\frac{\pi\Delta a}{m_0\mu_1(z_1-1)}(p-i\tau) \tag{2.3}$$

$$\delta=2\Delta(1-\nu_2+\varepsilon(1-\nu_1)m_0^{-1},\quad m_0=\varepsilon(1-2\Delta\nu_1)-(1-2\Delta\nu_2)$$
$$\psi(x)=v(x)+iu(x),\quad v=v_1|_{y=0}-v_2|_{y=0},\quad u=u_1|_{y=0}-u_2|_{y=0}$$

Решая интегральное уравнение [6], получим функцию $\psi(x)$, действительная и мнимая части которой — искомые расхождения берегов трещины

$$u=\frac{a\Lambda}{2\mu_1\varepsilon(2\Delta-1)}(1-x^2)^{1/2}[p\sin\gamma\omega+\tau\cos\gamma\omega] \tag{2.4}$$

$$v=-\frac{-a\Lambda}{2\mu_1\varepsilon(2\Delta-1)}(1-x^2)^{1/2}[p\cos\gamma\omega-\tau\sin\gamma\omega] \tag{2.5}$$

$$\Lambda=\sqrt{m_1m_2},\quad \gamma=(2\pi)^{-1}\ln\alpha,\quad \alpha=m_1/m_2 \tag{2.6}$$

$$m_1=2\Delta-1+\varepsilon(1+2\Delta(1-2\nu_1)),\quad m_2=\varepsilon(2\Delta-1)+1+2\Delta(1-$$
$$-2\nu_2),\quad \omega=\ln[(1+x)/(1-x)]$$

Для анализа поведения решения вблизи краев выпишем на основании (2.4), (2.5) формулы перемещений среды нижней полуплоскости

$$u_1=M\{-al_{11}\operatorname{Im}[pg_1+\tau g_2]+al_{12}\operatorname{Re}[pg_2-\tau g_1]- \tag{2.7}$$
$$-yl_{21}[\operatorname{Re}g_3+\operatorname{Im}g_4],\quad g_1=R\sin\omega,\quad g_2=R\cos\omega-z\}$$
$$g_3=-pr\sin\omega+\tau(r\cos\omega-1)+(2\gamma p+\tau)R^{-1}\cos\omega+(p-$$
$$-2\gamma\tau)R^{-1}\sin\omega$$
$$g_4=-pr\cos\omega+\tau r\sin\omega+(2\gamma p+r)R^{-1}\sin\omega-(2\gamma\tau+p)R^{-1}\cos\omega$$
$$M^{-1}=2\mu_1(2\Delta-1)\Lambda\operatorname{ch}\pi\gamma,\quad l_{12}=2\Delta[(1-\nu_1)(1-2\Delta\nu_2)+$$
$$+(1-\nu_2)(1-2\Delta\nu_1)]$$
$$l_{11}=\varepsilon(2\Delta-1)x+l_{12}x_1x_2,\quad x_i=1+2\Delta(1-2\nu_i)$$
$$l_{21}=x_2+\varepsilon(2\Delta-1),\quad \omega=\gamma\ln[(z+1)/(z-1)],\quad z=x+iy$$
$$R=(z^2-1)^{1/2},\quad r=((z+1)/(z-1))^{1/2}$$

Из (2.2) при $y = 0$ имеем

$$u_1 = al_{12}M \{p [(x^2 - 1)^{1/2} \cos \gamma\omega - 1] - \tau (x^2 - 1)^{1/2} \sin \gamma\omega\} \tag{2.8}$$
$$| x | > 1, \quad \omega = \ln [(x + 1)/(x - 1)]$$

$$u_1 = aM \{-l_{11} (1 - x^2)^{1/2} (p \sin \gamma\omega + \tau \cos \gamma\omega) \operatorname{ch} \pi\gamma - \tag{2.9}$$
$$- l_{12} [p ((1 - x^2)^{1/2} \sin \gamma\omega \operatorname{sh} \pi\gamma + x) - \tau (1 - x^2)^{1/2} \cos \gamma\omega \operatorname{sh} \gamma\pi]\}$$
$$\omega = \ln [(1 + x)/(1 - x)], \quad | x | \leqslant 1$$

Вертикальные смещения среды вычисляются по формуле

$$v_1 = M \{-al_{12} \operatorname{Re} [pg_1 + \tau g_2] + al_{11} \operatorname{Im} [pg_2 -$$
$$- \tau g_1] + yl_{21} [\operatorname{Re} g_7 + \operatorname{Im} g_8]\} \tag{2.10}$$

$$g_7 = p (r \cos \omega - 1) + \tau r \sin \omega + (2\gamma p + \tau) R^{-1} \sin \omega + (p -$$
$$- 2\gamma\tau) R^{-1} \cos \omega$$

$$g_8 = pr \sin \omega - \tau r \cos \omega + (2\gamma p + \tau) R^{-1} \cos \omega - (p - 2\gamma\tau) R^{-1} \sin \omega$$

$$v_1 |_{y=0} = -al_{12}M \{p (x^2 - 1)^{1/2} \sin \gamma\omega - q [(x^2 - 1)^{1/2} \cos \gamma\omega - x]\},$$
$$| x | > 1 \tag{2.11}$$

$$v_1 |_{y=0} = aM \{l_{12} \operatorname{sh} \pi\gamma [p (1 - x^2)^{1/2} \cos \gamma\omega + \tau [(1 - x^2)^{1/2} -$$
$$\tag{2.12}$$
$$- x)] + l_{11} \operatorname{ch} \pi\gamma (1 - x^2)^{1/2} (p \cos \gamma\omega - \tau \sin \gamma\omega)\}, \; | x | \leqslant 1$$

Формулы (2.8), (2.9), (2.10), (2.12) показывают, что, как и в предыдущей задаче, при подходе к вершине трещины перемещения осциллируют. Для анализа зоны осцилляции отметим, что при $\Delta = 1$ (отсутствие преднапряжений) параметр зоны осцилляций α из (2.6) совпадает с его значением в обычной теории упругости [1—3]. При $\varepsilon = 1$ (одинаковые материалы) $\alpha = 1$ и осцилляция отсутствует независимо от величины преднапряжения. В случае $\varepsilon = 1$ коэффициент α заключается в пределах $\alpha_*^{-1} < \alpha < \alpha_*$, где $\alpha_* = (1+2\Delta)(1-2\nu_1)/(2\Delta-1)$. Из формул (2.7), (2.10) видно, что при $\Delta = \Delta^* = 0{,}5$ плоскость теряет устойчивость. На основании этого при $\Delta > \Delta^*$ параметр α может изменяться от 0 до ∞, причем $\alpha \to \varepsilon (1 - \nu_1)/(1 - \nu_2)$ при $\Delta \to \Delta^*$.

В табл. 2 дана зависимость зоны осцилляции перемещений от начальной деформации для полулинейного материала.

Таблица 2

ε	$e = -0{,}49$	$e = -0{,}4$	$e = -0{,}2$	$e = 0{,}0$	$e = 0{,}2$
0,5	$8{,}4 \cdot 10^{-7}$	$1{,}1 \cdot 10^{-8}$	$3{,}7 \cdot 10^{-14}$	$7{,}3 \cdot 10^{-23}$	$5{,}8 \cdot 10^{-39}$
0,1	$2{,}1 \cdot 10^{-2}$	$2{,}3 \cdot 10^{-3}$	$8{,}7 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-9}$	$4{,}8 \cdot 10^{-16}$
0,01	$1{,}7 \cdot 10^{-1}$	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$6{,}6 \cdot 10^{-5}$	$7{,}7 \cdot 10^{-8}$	$2{,}0 \cdot 10^{-13}$

Формулы для напряжений из-за их громоздкости не приводятся. Их анализ показывает, что напряжения имеют в концах трещины классическую корневую особенность и осциллируют вблизи них. Ширина зоны осцилляции зависит от начальных напряжений. Когда величина преднапряжения стремится к критическому значению, соответствующему потере устойчивости тела с трещиной, зона осцилляции перемещений расширяется и может покрыть всю трещину.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M. L.* The stress around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. America. 1959. V. 49. № 2. P. 199—204.
2. *Эрдоган Ф.* Распределение напряжений в неоднородной упругой плоскости, имеющей трещины // Прикл. механика: Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. 1963. № 2. С. 83—87.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Филиппова Л. М.* Распределение напряжений вблизи кромки трещины в предварительно напряженном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 320—327.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 23.XI.1988