Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.374

О. О. Барабанов

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗКАХ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В рамках квазистатической теории пластичности на простых примерах демонстрируется специфика поверхностного тангенциального нагружения: возможность сингулярного поверхностного срыва, отсутствие сходимости предельных коэффициентов нагрузки при произвольном неограниченном уменьшении периода пластического композита. Вторая особенность заставляет признать гипотезу [1] и ее более позднее подтверждение [2] неверными в случае тангенциальных поверхностных нагрузок.

1. Антиплоские движения. Сингулярный поверхностный срыв. Ограничимся рассмотрением жесткопластических биматериалов в антиплоском и плоском случаях. Неоднородность будет задаваться при помощи периодической функции $\tau(y)$, определенной на ячейке периодичности $Y = (0, 1)^2$ следующим образом:

$$\tau(y) = \begin{cases} \tau_1, & y \in Y_k \\ \tau_2, & y \in Y \setminus Y_k \end{cases}$$

$$Y_k = \{y:\ |2y_i - 1| < k,\ i = 1, 2\},\ 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2,\ 0 < k < 1$$

где k, τ_1, τ_2 — фиксированные числа. Участки плоскости $\tau = \tau_1$ будем называть включениями. Пусть Q — плоская область под нагружением. Когда Q — координатный прямоугольник, его стороны будут обозначаться так: L — левая, R — правая, U — верхняя, D — нижняя.

Пусть $Q = (-\alpha, \alpha) \times (-\beta, \beta)$. Положим

$$f(x, \nabla u) = \tau(x)\,|\nabla u(x)|, \quad F(u) = \int\limits_Q f(x, \nabla u)\,dx$$

$$Bu = \int\limits_L u\,ds - \int\limits_R u\,ds \tag{1.1}$$

Здесь u — произвольное антиплоское поле скорости, F — функционал диссипации, B — поверхностная нагрузка, ds — мера Лебега по границе ∂Q области Q.

Задача о предельной нагрузке состоит в нахождении предельного коэффициента $\theta = \theta(f, B)$ нагрузки B по одной из следующих формул (см., например, [3]):

$$\theta = \inf\{F(u)/Bu:\ u \in H^1,\ Bu > 0\} \tag{1.2}$$

$$\theta = \max\lambda \tag{1.3}$$

где H^1 — соболевское пространство с нормой $\left(\int_Q |u|^2 + |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$, максимум берется среди всех таких $\lambda > 0$, что нагрузка λB уравновешивается допустимым полем напряжений $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{L}^\infty$, т. е.

$$\int\limits_Q \sigma\nabla u\,dx = \lambda Bu, \quad \forall u \in H^1$$

$$|\sigma(x)| \leqslant \tau(x) \text{ почти всюду на } Q$$

Предположим, что α таково, что имеется точка x_0, одновременно принадлежащая внутренности L и внутренности включения. Пусть $\Delta_\delta \subset Q$ — равнобедренный треугольник с серединой основания в точке x_0, высота которого имеет размер δ^2, а основание — размер 2δ. Определим непрерывную кусочно-аффинную на Q функцию u_δ следующим образом: $u_\delta(x_0) = \delta^{-1}$, $u_\delta \equiv 0$ на $Q \setminus \Delta_\delta$ и на каждую из разделенных высотой половинок треугольника Δ_δ функция u_δ продолжена аффинно. Можно проверить, что $Bu_\delta = 1$, $F(u_\delta) \to \tau_1$ при $\delta \downarrow 0$. Тогда согласно формуле (1.2)

$$\theta \leqslant \lim F(u_\delta)/Bu_\delta = \tau_1$$

С другой стороны, нагрузка $\tau_1 B$ уравновешивается допустимым полем напряжений $(-\tau_1, 0)$. Тогда согласно двойственной формуле (1.3) $\tau_1 \leqslant \theta$ и, следовательно, $\theta = \tau_1$.

Последовательность u_δ является, таким образом, минимизирующей для задачи (1.2). Ее обобщенный предел следует интерпретировать как меру на ∂Q, сингулярную относительно меры ds. Одновременно существует обобщенный предел последовательности ∇u_δ, понимаемый как векторно-значная мера на замыкании Q. Подробное рассмотрение возникающих здесь вопросов выходит за рамки работы (см. также [4, 5], где обобщенные поля скорости погружены в $\mathbf{L}^1(Q) \times \mathbf{L}^1(\partial Q)$ и $\mathbf{L}^1(Q) \times (\mathbf{L}^\infty(\partial Q))'$, что весьма близко к высказанному соображению).

2. Проблема усреднения. Рассмотрим последовательность биматериалов с лагранжианами $f_\varepsilon(x, \nabla u) = f(\varepsilon^{-1}x, \nabla u)$. Проблема усреднения состоит в проверке следующего утверждения: существует такой однородный материал с лагранжианом $f_0(\nabla u)$, что на достаточно широком множестве комбинаций условий закрепления и нагрузок A имеет место сходимость $\theta(f_\varepsilon, A) \to \theta(f_0, A)$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Хорошо известна операция $f \mapsto f^{\hom}$ формального усреднения [6]

$$f^{\hom}(\xi) = \inf \int_Y f(y, \xi + \nabla u(y))\, dy, \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

где inf берется по всем Y-периодическим функциям u, для которых интеграл справа имеет смысл. Имеет место [3] сходимость

$$\theta(f_\varepsilon, A) \to \theta(f^{\hom}, A), \quad \varepsilon \downarrow 0 \tag{2.1}$$

для произвольной поверхностно закрепленной липшицевой ограниченной области, подвергнутой объемному нагружению

$$Au = \int_Q au\, dx \quad (a \in L^\infty(Q))$$

Проверка сходимости (2.1) в случае поверхностных нагрузок названа [3] «одной из интересных проблем теории усреднения». Оказывается (2.1) нарушается при поверхностных нагрузках.

3. Неусредняемость при поверхностных нагрузках. Скажем, что η принадлежит множеству $M_\tau \subset \mathbb{R}^2$, если существует Y-периодическое поле напряжений $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$, такое, что почти всюду

$$|\sigma| \leqslant \tau, \quad \int_Y \sigma\, dy = \eta, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \sigma \nabla\varphi\, dy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Замечание. Последнему условию удовлетворяет любое кусочно-гладкое соленоидальное поле σ с кусочно-гладкими поверхностями разрыва, вдоль берегов которых выполняется ослабленное условие непрерывности σ: $\sigma^+\nu^+ + \sigma^-\nu^- = 0$ (ν — обозначение внешней нормали).

Имеется двойственная формула [3]

$$f^{\mathrm{hom}}(\xi) = \sup_{\eta \in M_\tau} \xi\eta$$

Пусть $t = k\tau_1 + (1 - k\tau_2)$. Каждому $\eta \in \mathbb{R}^2$, $|\eta| \leqslant t$ сопоставим поле напряжений $\sigma^\eta(y_1, y_2) = (\eta_1 h(y_2), \eta_2 h(y_1))$, где h — функция периода единица, имеющая на $(0, 1)$ вид

$$h(r) = \begin{cases} \tau_1/t, & |2r - 1| \leqslant k \\ \tau_2/t, & k < |2r - 1| \leqslant 1 \end{cases}$$

Можно проверить (см. замечание), что для σ^η выполняются перечисленные выше условия. Тогда $\{\eta\colon |\eta| \leqslant t\} \subset M_\tau$ и поэтому $t|\xi| \leqslant f^{\mathrm{hom}}(\xi)$.

Пусть $Q = (-1, 1) \times (-\beta, \beta)$, нагрузка B задана выражением (1.1). При $\varepsilon(n) = 2(2n + 1)^{-1}$ включения выходят на L, R и, согласно п. 1, реализуется сингулярный поверхностный срыв. В частности, $\theta(f_\varepsilon, B) = \tau_1$, $\forall \varepsilon(n)$. С другой стороны, согласно полученной для f^{hom} оценке

$$k\tau_1 + (1 - k)\tau_2 \leqslant \theta(f^{\mathrm{hom}}, B)$$

В результате при $\tau_1 < \tau_2$

$$\underline{\lim}\, \theta(f_\varepsilon, B) < \theta(f^{\mathrm{hom}}, B),$$

что говорит об отсутствии формального усреднения в рассматриваемом случае. Отсюда, конечно, еще не следует факт несуществования предела $\theta(f_\varepsilon, B)$ при ε, произвольно стремящемся в нулю. Рассмотрим ситуацию более подробно.

4. Относительное отклонение включений от границы как параметр усреднения. Пусть $Q = (-1, 1) \times (-\beta, \beta)$, β — иррациональное число, $0 < \rho = \mathrm{const}$. В этом случае существует последовательность $\varepsilon = \varepsilon(n) \downarrow \downarrow 0$, такая, что отклонение включений в Q от L, R равно $\rho k\varepsilon/2$ и от U, D не меньше $(1 - k)\varepsilon/2$. Пусть нагрузка B по-прежнему задана выражением (1.1). Введем для краткости обозначение $\theta_\varepsilon = \theta(f_\varepsilon, B)$. Получим оценки

$$\theta_\varepsilon^-(\rho) \leqslant \theta_\varepsilon \leqslant \theta_\varepsilon^+(\rho) \tag{4.1}$$

из которых будет следовать, что предел θ_ε (по объявленной последовательности $\varepsilon(n)$) зависит от ρ.

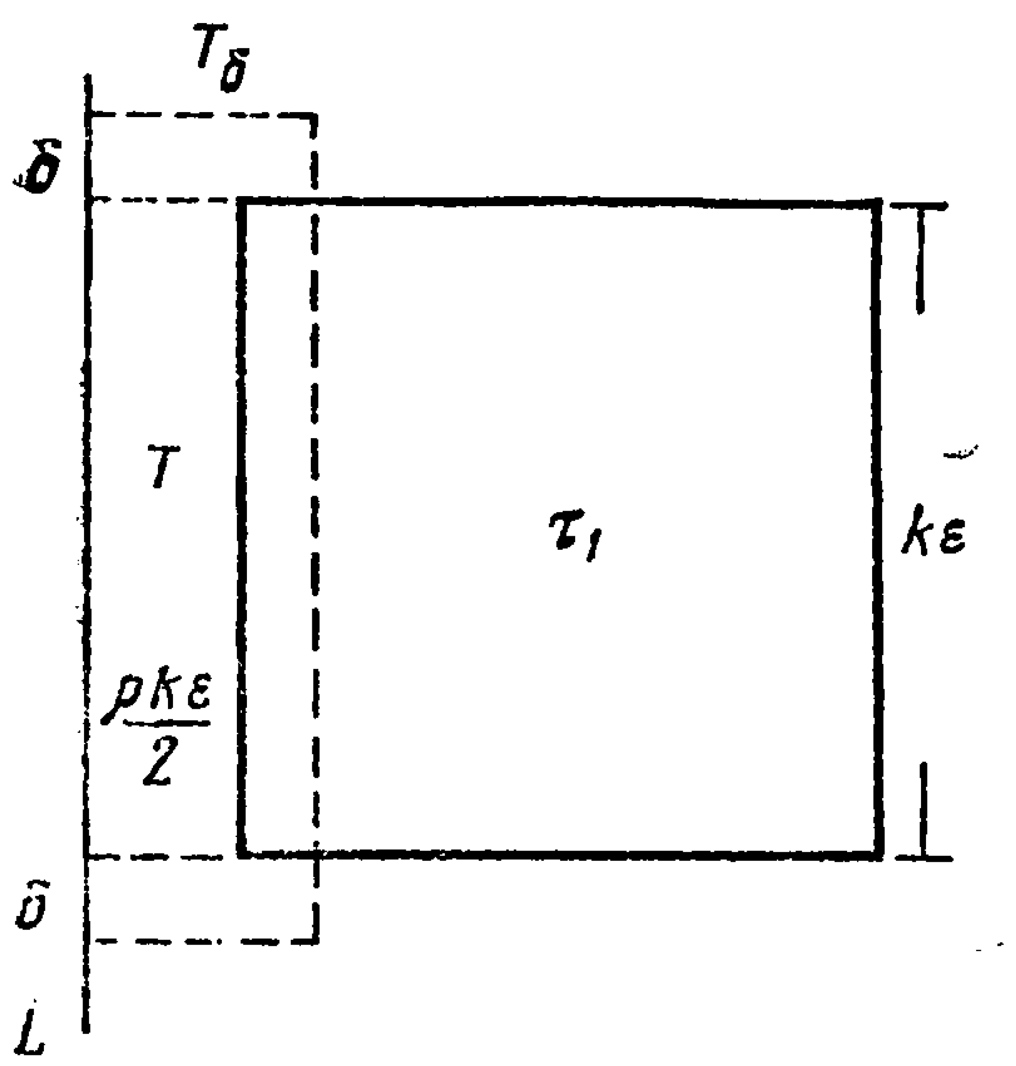
По соображениям симметрии будем рассматривать лишь сторону L с ее ближайшей в Q окрестностью. Зафиксируем ε из объявленной последовательности.

Пусть T — прямоугольная полоска между L и включением (фиг. 1), T_δ — аналогичная полоска с размерами на δ большими (см. фиг. 1). Определим непрерывную кусочно-аффинную на Q функцию u_δ следующим образом: $u_\delta \equiv 1$ на T, $u_\delta \equiv 0$ на $Q \setminus T_\delta$ и на $T_\delta \setminus T$ функция u_δ продолжена кусочно-аффинно. Можно проверить, что при $\delta \downarrow 0$ имеют место сходимости

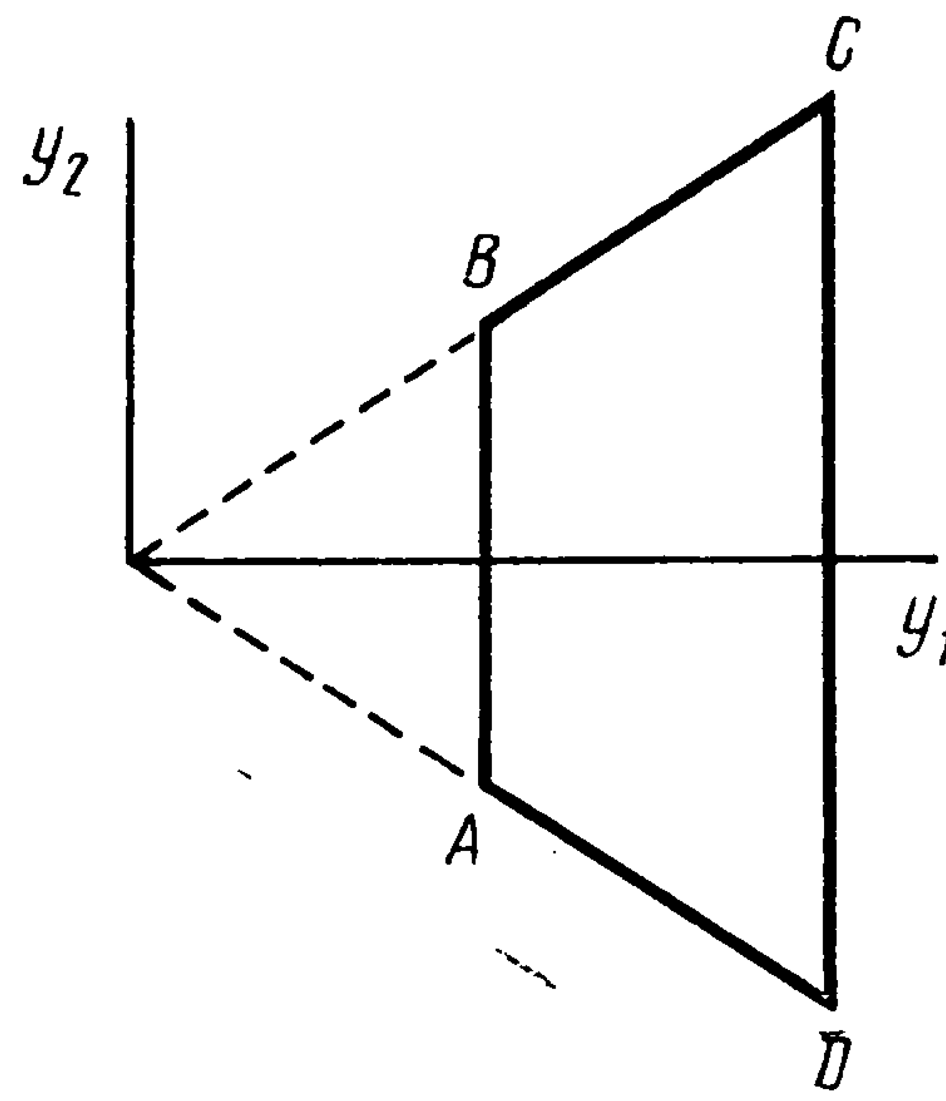
$$\int_Q f_\varepsilon(x, \nabla u_\delta)\, dx \to (\tau_1 + \rho\tau_2) k\varepsilon, \quad Bu_\delta \to k\varepsilon$$

Следовательно, $\theta_\varepsilon \leqslant \tau_1 + \rho\tau_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \theta_\varepsilon^+(\rho)$.

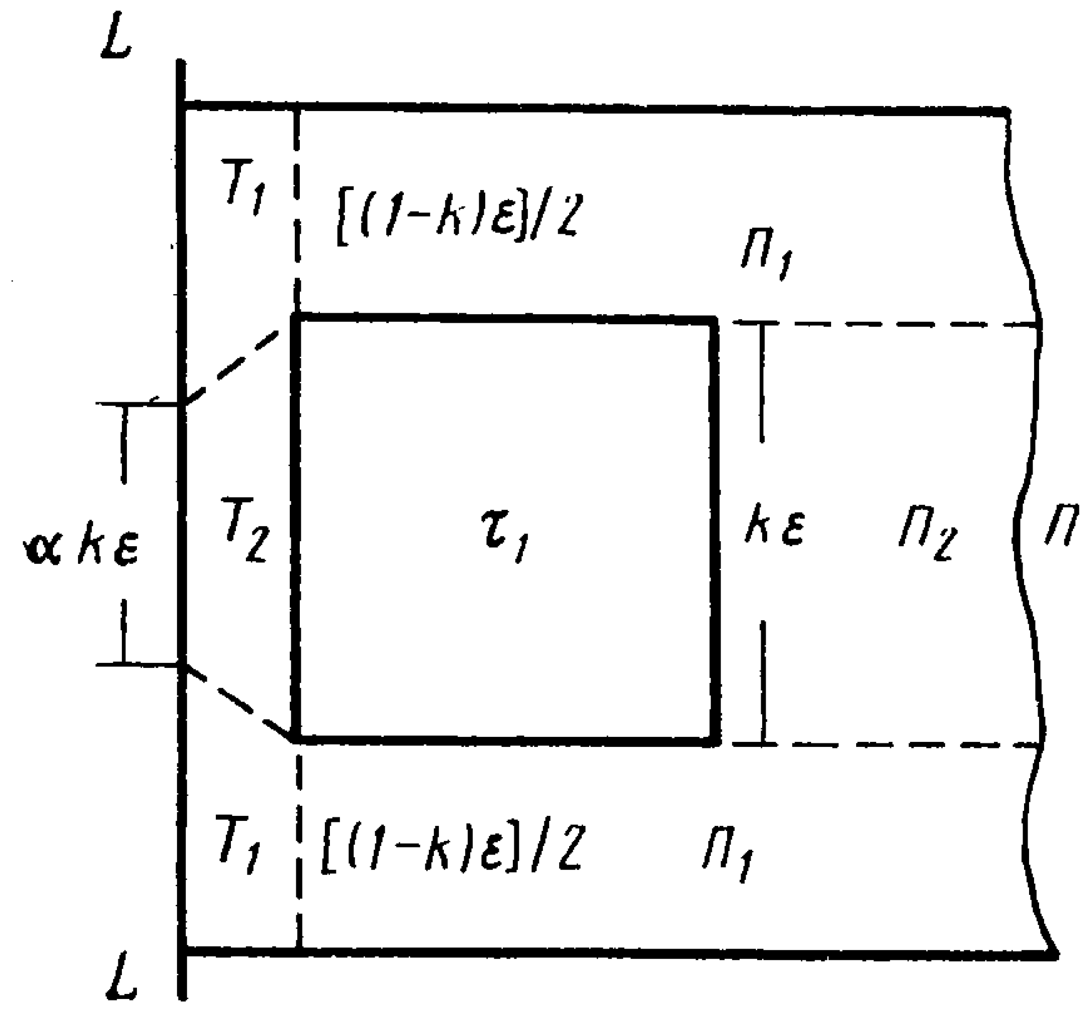
Для получения левой оценки (4.1) начнем со вспомогательного поля напряжений в трапеции $ABCD$ на фиг. 2, симметричной относительно оси y_1. Именно положим $\sigma_1 = -cy_1^{-1}$, $\sigma_2 = -cy_2y_1^{-2}$. Для такого поля напряжений $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$, $\boldsymbol{\sigma}\nu = 0$ на BC и AD. Если задано $\lambda > 0$, то при соответствующем c будем иметь $\boldsymbol{\sigma}\nu = \lambda$ на AB, $\boldsymbol{\sigma}\nu = -(|AB| / |CD|)\lambda$ на CD.



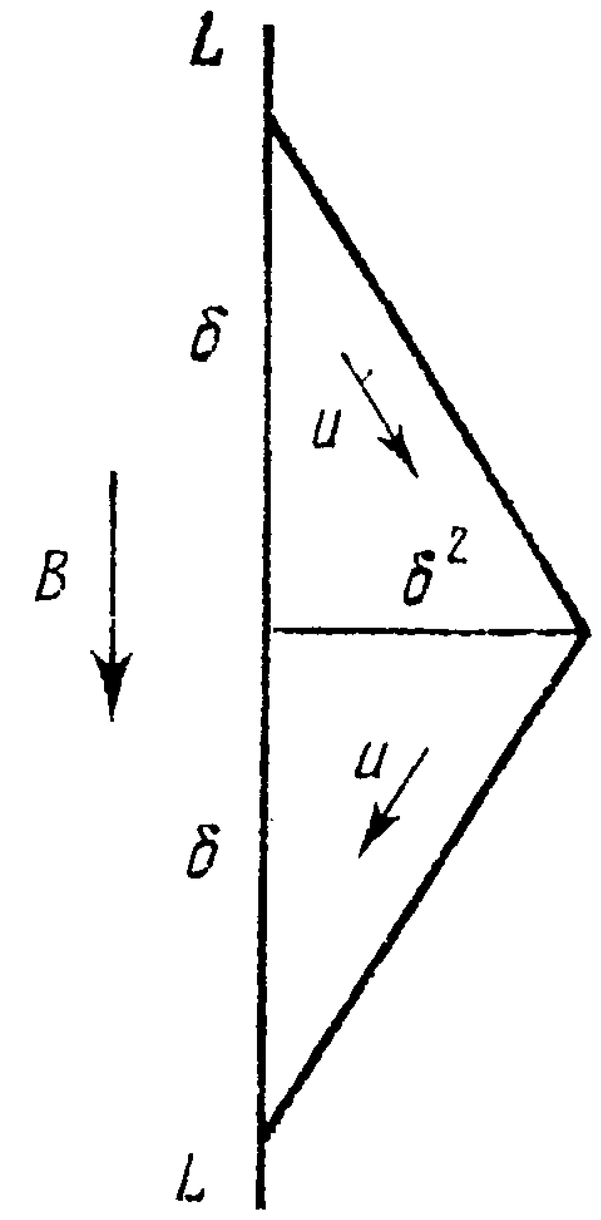
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При этом в пределах трапеции

$$\max |\sigma| = \lambda (1 + (|CD| - |AB|)^2/(2h)^2)^{1/2} \tag{4.2}$$

где h — высота трапеции.

Теперь построим кусочно-непрерывное соленоидальное (в смысле распределений) поле $\sigma_{\alpha\lambda}$ в горизонтальной прямоугольной полосе $\Pi \subset Q$ ширины ε (фиг. 3). Именно в трапециях T_1, T_2 (фиг. 3) указанным выше способом построим поля напряжений так, чтобы на L выполнялось равенство $\sigma_{\alpha\lambda}\nu = \lambda$ (две половинки T_1 считаем за одну трапецию; α — отношение оснований T_2, $\alpha < 1$). Тогда на внутренних по отношению к Q основаниях трапеций T_1, T_2 получим соответственно

$$\sigma_{\alpha\lambda}\nu = -(1 - \alpha k)/(1 - k), \quad \sigma_{\alpha\lambda}\nu = -\alpha\lambda$$

В полосах Π_1, Π_2, опирающихся на T_1, T_2, положим соответственно

$$\sigma_{\alpha\lambda} = (-(1 - \alpha k)\, \lambda/(1 - k),\ 0), \quad \sigma_{\alpha\lambda} = (-\alpha\lambda,\ 0) \tag{4.3}$$

Сохраняя обозначение, периодически продолжим поле $\sigma_{\alpha\lambda}$ с Π на подобласти Q вида $\Pi + \varepsilon m e_2$, где e_2 — орт направления x_2, m — целое число. На оставшихся, прилегающих к U, D горизонтальных полосках (не пересекающих включений согласно выбору последовательности $\varepsilon(n)$) положим $\sigma_{\alpha\lambda} = (-\lambda, 0)$. Видно, что построенное поле $\sigma_{\alpha\lambda}$ уравновешивает в Q нагрузку λB. Тогда из (1.3), (4.2), (4.3) следует, что в качестве $\theta_\varepsilon^-(\rho)$ можно взять

$$\theta_\varepsilon^-(\rho) \overset{\text{def}}{=} \max_{\alpha>0} \min \left\{ \frac{\tau_1}{\alpha},\ \frac{1-k}{1-\alpha k} \left(1 + \left(\frac{1-\alpha}{\rho}\right)^2\right)^{-1/2} \tau_2 \right.$$

Функции $\theta_\varepsilon^-(\rho)$, $\theta_\varepsilon^+(\rho)$ — непрерывные, строго растущие функции ρ ($\rho > 0$). При $\rho \downarrow 0$ они имеют общий предел τ_1. Отсюда следует вывод о зависимости предела θ_ε от параметра ρ, характеризующего относительное расположение границы области и включений.

5. Плоские движения. Следующий пример по смыслу аналогичен предыдущим. Пусть $Q = (-1, 1)^2$. Положим

$$f(x, e(\mathbf{u})) = \sqrt{2}\,\tau(x)\,|e(\mathbf{u})(x)|, \quad F(u) = \int\limits_Q f(x, e(\mathbf{u}))\,dx$$

$$B\mathbf{u} = \int\limits_U u_1\,ds - \int\limits_L u_2\,ds - \int\limits_D u_1\,ds + \int\limits_R u_2\,ds \tag{5.1}$$

$$(e(\mathbf{u})(x))_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i), \quad |e(\mathbf{u})|^2 = e_{11}^2 + 2e_{12}^2 + e_{22}^2$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — поле скорости, $e(\mathbf{u})$ — тензор скорости деформации. Поверхностная нагрузка (5.1) тангенциальна и, очевидно, самоуравновешена.

Предельный коэффициент $\theta = \theta(f, B)$ находится по одной из следующих формул [7] [1] (эти же, по отношению к общему случаю, формулы — исходные и в [2]):

$$\theta = \inf\{F(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1, \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, B\mathbf{u} = 1\}, \quad \theta = \max\lambda$$

где максимум берется среди всех таких $\lambda > 0$, что нагрузка λB уравновешивается допустимым полем напряжений $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) = (\sigma_{ji}) \in \mathbf{L}^2(Q)$, т. е.

$$\int\limits_Q \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant 2} \sigma_{ij} e(u)_{ij}\,dx = \lambda B\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1$$

$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 \leqslant 4\tau^2$ почти всюду на Q.

Как и раньше, положим $f_\varepsilon(x, \xi) = f(\varepsilon^{-1}x, \xi)$, $\theta_\varepsilon = \theta(f_\varepsilon, B)$.

Можно показать неусредняемость и в этом случае. Именно для двух различных последовательностей $\varepsilon' \downarrow 0$, $\varepsilon'' \downarrow 0$ можно получить строгое неравенство

$$\lim \theta_{\varepsilon'} < \underline{\lim}\, \theta_{\varepsilon''} \tag{5.2}$$

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу о предельной нагрузке на области $Q = Y \setminus Y_k$. Пусть внутренняя поверхность области Q свободна, а внешняя подвергнута тангенциальному нагружению (5.1). Соответствующий предельный коэффициент обозначим τ_* $(0 < \tau_*)$, а σ_0 — уравновешивающее нагрузку $\tau_* B$ допустимое поле напряжений. Продолжим поле σ_0 нулем на Y_k и затем Y-периодически на всю плоскость. Полученное поле обозначим σ_*.

Пусть $Q = (-1, 1)^2$, $0 < \tau_1 < \tau_*$, нагрузка B задана выражением (5.1). Рассмотрим последовательность $f_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' = 2(2n+1)^{-1}$. В этом случае включения выходят на границу Q и реализуется сингулярный поверхностный срыв.

Действительно, возьмем разрывное поле скорости, локализованное на включении, выходящем на границу, и состоящее из трех жестких частей, проскальзывающих друг относительно друга (фиг. 4). Согласно известной методике, подкрепленной доказательством [4, 5]

$$\theta_{\varepsilon'} \leqslant \tau_1 \sum_i |[\mathbf{u}]|\, l_i / B\mathbf{u}$$

где $[\mathbf{u}]$ — скачок скорости на границе раздела жестких частей, l_i — длина соответствующего (i-го) куска границы раздела. Элементарные вычисления приводят к оценке $\theta_{\varepsilon'} \leqslant \tau_1(1 + \delta^2)$. Переходя к пределу при $\delta \downarrow 0$ (при фиксированном ε'), получим, что $\theta_{\varepsilon'} \leqslant \tau_1$. Допустимое и уравновешивающее нагрузку $\tau_1 B$ поле напряжений $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = \tau_1$, $\sigma_{22} = 0$ приводит к оценке $\tau_1 \leqslant \theta_{\varepsilon'}$. Следовательно, $\theta_{\varepsilon'} = \tau_1$, $\forall \varepsilon'$.

Рассмотрим теперь последовательность $f_{\varepsilon''}$, $\varepsilon'' = n^{-1}$. Видно, что поле напряжений

---

[1] *Барабанов О. О.* Об эквивалентных постановках предельной упруго-пластической задачи. Владимир, 1986. 32 с.— Деп. в ВИНИТИ 31.01.86, № 729—В86.

$\sigma_{\varepsilon''}(x) = \sigma_*(x/\varepsilon'')$ является уравновешивающим нагрузку $\tau_* B$ и допустимым. Следовательно, $\tau_* \leqslant \theta_{\varepsilon''}$, $\forall \varepsilon''$.

В результате за счет выбора $\tau_1 < \tau_*$ получим (5.2).

Формально говоря, построенный пример не является контрпримером к теоремам [2], положительно решающим (без доказательства) проблему усреднения на всем спектре нагрузок, но для областей с гладкой границей. Представляется, однако, очевидным, что дело не в наличии углов у области. Так, в антиплоских примерах п. 3, 4 гладкое расширение области (над D и под U) сохраняет факт неусредняемости. Эффект, который назван выше сингулярным поверхностным срывом, объясняет неусредняемость пластических сред чрезвычайно просто. Пусть геометрия области достаточно «хорошая». При выходе более мягких включений на тангенциально нагруженную границу предельная нагрузка — функция исключительно текучести включения. В других случаях относительного расположения включений и границы предельная нагрузка существенно зависит и от характеристик текучести более жесткой матрицы композита. Приведенные примеры подтверждают и уточняют это соображение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Suquet P.* Analyse limite et homogénéisation // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. II. Méc. 1983. V. 296. № 18. P. 1355—1358.
2. *Demengel F., Tang Qi.* Homogénésation en plasticité // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. I. Math. 1986. V. 303. № 8. P. 339—341.
3. *Жиков В. В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50. № 4. С. 675—710.
4. *Серегин Г. А.* Расширение вариационной постановки задачи для жесткопластической среды на поля скоростей с разрывами типа скольжений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 1030—1037.
5. *Каменярж Я. А.* Условия на поверхностях разрыва в жесткопластическом анализе // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 3. С. 574—578.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
7. *Каменярж Я. А.* О постановках задачи теории идеальной пластичности // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 490—496.

Ковров

Поступила в редакцию
21.X.1987