Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.374

В. Н. Лукерченко

О ПОСТРОЕНИИ ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

На основании микроскопических представлений строится диссипативная функция (ДФ) пластического течения монокристалла. Проводится термодинамический анализ возможных механизмов диссипации механической энергии движущихся дислокаций. Сконструированное общее выражение для ДФ приводится к такому виду, что последняя зависит только от характеристик процесса (скоростей деформирования) и макроскопических характеристик ансамбля дислокаций. При этом раскрывается физический смысл и указывается значение всех коэффициентов, входящих в определение ДФ. Делается вывод о том, что феноменологическое представление ДФ только как суммы однородных функций первой и второй степени по скоростям пластических деформаций, вообще говоря, неправомерно и необходимо еще учитывать скорость изменения параметров микроструктуры.

Построение ДФ

$$\Phi = T^{-1} dq'/dt \tag{0.1}$$

(T — абсолютная температура, q' — некомпенсированное тепло, t — время), определяющей величину роста энтропии за счет внутренних необратимых процессов, является важнейшим элементом при описании пластической деформации и конструировании новых моделей сплошных сред [1, 2]. Обычно феноменологически постулируется, что для пластических сред ДФ является однородной (линейной или нелинейной) функцией первой степени по скоростям пластических деформаций $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$, тогда как для вязкопластических сред — однородной функцией второй степени по скоростям пластических деформаций или суммой указанных однородных функций первой и второй степени [3, 4]. Такой подход нельзя признать полностью удовлетворительным по следующим причинам. 1°. Предполагается, что коэффициенты, входящие в определение однородных функций, могут быть определены экспериментально. Однако, как правило, соответствующие экспериментальные данные имеют большой разброс. 2°. Указанные коэффициенты не определены из физических представлений, т. е. на основании микроструктурных характеристик материала, ввиду чего неясен и их физический смысл. 3°. Неизвестно также, можно ли ДФ пластической среды с дислокациями конструировать только как однородную функцию (или сумму однородных функций) по скоростям пластических деформаций без учета микроструктурных параметров пластического течения и скорости их изменения.

При учете внутренних параметров и скорости их изменения ДФ вводилась в виде общего выражения ([5—7] и др.)

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}^{\cdot}, T, \mu, \mu^{\cdot})$$

где μ — внутренний параметр. Однако вид ДФ при этом не конкретизировался, а предложенные модели не являлись по-настоящему микроскопическими.

1. Основные предположения и исходная микроструктура. Рассмотрим бесконечный однородный монокристалл ГЦК- или ГПУ-типа, ориентированный для одиночного скольжения. Будем считать, что деформирование происходит при средних температурах и скоростях нагружения, а поперечное скольжение винтовых элементов дислокаций отсутствует (что оправдано на начальной стадии деформирования и в особенности для монокристаллов с низкой энергией дефекта упаковки). Примем, что система координат прямоугольная, а пространство — евклидово.

Многообразие подвижных криволинейных дислокационных структур в кристалле сводится к двум основным типам: петлям и сегментам, которые в свою очередь характеризуются вектором Бюргерса $\mathbf{b}$ и средним нелокальным радиусом кривизны R [8]. Часть дислокаций относится к неподвижным: неподвижные базисные ростовые дислокации с плотностью β и вектором Бюргерса $\mathbf{b}$ и неподвижные ростовые дислокации леса с плотностью β_* и вектором Бюргерса $\mathbf{b}_{(*)}$. Плоскость скольжения подвижных дислокаций характеризуется единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, а ориентация элемента дислокации — единичным вектором касательной ξ (или углом φ между $\mathbf{b}$ и ξ).

2. Основные уравнения модели. В параллельных плоскостях скольжения в единице объема кристалла хаотически распределены N_0 дислокационных сегментов, плотность распределения которых по длинам основания λ соответствует плотности распределения расстояний между точками, случайно разбросанными на прямой

$$\varphi(\lambda) = \lambda\lambda_0^{-2} \exp(-\lambda\lambda_0^{-1}) \tag{2.1}$$

где $2\lambda_0 = \langle\lambda\rangle_\lambda$. Здесь и ниже символами $\langle\ldots\rangle_D$, $\langle\ldots\rangle_\lambda$ и $\langle\ldots\rangle_R$ обозначено соответственно среднее вдоль линии дислокации, среднее по ансамблю сегментов и среднее по ансамблю петель. При определенных условиях подвижные сегменты, длина основания которых λ может изменяться от минимального значения λ_t до бесконечности, испускают дислокационные петли, начальный радиус которых равен R_λ. Длину $l(\lambda, t)$ сегмента с основанием длины λ, которая изменяется в промежутке $[\lambda, 2\pi R_\lambda + \lambda]$, можно характеризовать функцией $\omega(\lambda, t) = l(\lambda, t)(2\pi R_\lambda + \lambda)^{-1}$. Площадь, заметенную сегментом с длиной основания λ в единицу времени, будем считать равной $\pi R_\lambda^2 \eta^\cdot(\lambda, t)$, где $\eta(\lambda, t)$ имеет смысл площади, заметенной сегментом в момент t, к начальной площади πR_λ^2 петли, испускаемой этим сегментом. При этом характеристики $\omega(\lambda, t)$ и $\eta(\lambda, t)$ связаны между собой соотношением

$$\pi R_\lambda^2 \eta^\cdot(\lambda, \chi) = (2\pi R_\lambda + \lambda)\,\omega(\lambda, \chi)\,\langle v(\lambda, \chi)\rangle_D \tag{2.2}$$

где $\langle v(\lambda, \chi)\rangle_D$ — средняя по длине скорость сегмента в момент времени χ.

Суммарная длина в единице объема сегментов $A_*(t)$ складывается из длин неподвижных сегментов с длиной основания $\lambda \leqslant \lambda_t$ и длин движущихся сегментов с суммарной плотностью $\alpha_*(t)$:

$$A_*(t) = N_0 \int_0^{\lambda_t} \lambda\varphi(\lambda)\,d\lambda + \alpha_*(t), \quad \alpha_*(t) = \int_{\lambda_t}^{\infty} l(\lambda, t)\,N_0\varphi(\lambda)\,d\lambda \tag{2.3}$$

Учитывая, что $(2\pi R_{\lambda_t} + \lambda_t)\,\omega(\lambda_t, t) = l(\lambda_t, t) = \lambda_t$, $l^\cdot(\lambda, t) = 2\pi R_\lambda \eta^\cdot(\lambda, t)$, для элементарного приращения плотности сегментов получим

$$dA_* = \int_{\lambda_t}^{\infty} 2\pi R_\lambda \eta^\cdot(\lambda, t)\,N_0\varphi(\lambda)\,d\lambda\,dt \tag{2.4}$$

Используя оператор $\langle X\rangle_\lambda$, можно определить среднюю длину дислокационной кривой подвижных сегментов

$$\langle l(\lambda, t)\rangle_\lambda = \int l(\lambda, t)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \left(\int \varphi(\lambda)\,d\lambda\right)^{-1}, \quad \langle X\rangle_\lambda = \int X\varphi(\lambda)\,d\lambda \left(\int \varphi(\lambda)\,d\lambda\right)^{-1} \tag{2.5}$$

Здесь и далее принимается, что интегрирование по λ ведется от λ_t до ∞. Для дальнейшего вычисления $\langle l\,(\lambda,\ t)\rangle_\lambda$ необходимо задать закон нагружения кристалла.

Кроме сегментов, в момент t в единице объема кристалла в параллельных плоскостях одиночного скольжения находится $N\,(t)$ подвижных дислокационных петель с плотностью функции распределения по радиусам $\Psi\,(R,\ t)$ и радиусами от минимального r_t до максимального R_t. Функция $\Psi\,(R,\ t)$ отлична от нуля только при $r_t < R < R_t$ и нормирована на единицу:

$$\int \Psi\,(R, t)\,dR = 1 \tag{2.6}$$

Здесь и далее под радиусом R понимается средний нелокальный радиус кривизны, а также предполагается, что интегрирование по R ведется везде от r_t до R_t.

Увеличение плотности скользящих дислокационных петель происходит за счет расширения петель, ранее присутствовавших в кристалле, и за счет петель, рождающихся вновь. Петли с одним и тем же средним нелокальным радиусом кривизны R могут иметь различную форму, конфигурацию и размеры, но в среднем длину указанных петель будем приближенно полагать равной длине круговых петель такого же радиуса. Тогда плотность скользящих петель будет равна

$$\alpha_0\,(t) = 2\pi\,\langle R\rangle\,N\,(t) = 2\pi N\,(t)\int R\,\Psi\,(R, t)\,dR \tag{2.7}$$

Учитывая, что $\Psi\,(R_t,\ t) = \Psi\,(r_t,\ t) = 0$ и $\langle v\rangle_D = R^{\cdot}$, получим для скорости возрастания плотности подвижных петель выражение

$$\alpha_0^{\cdot}\,(t) = 2\pi N^{\cdot}\,(t)\int R\,\Psi\,(R, t)\,dR + 2\pi N\,(t)\int (\langle v\rangle_D\,\Psi_{,}(R, t) + R\,\Psi^{\cdot})\,dR \tag{2.8}$$

Далее примем, что для компонент $\langle v_j\,(R,\ t)\rangle_D$ средней скорости движения элемента дислокации с касательным вектором ξ справедливо уравнение движения дислокации

$$\varepsilon_{.kl}\xi_k n_l \sigma_{dm}^{(a)} b_{dm} = \varepsilon_{.kl}\xi_k n_l\,\langle\sigma_{dm}^{(*)}\rangle\,b_{dm} + \langle F_j^{(s)}\rangle_D + F_j^{(P)} + B\,\langle v_.\rangle_D \tag{2.9}$$

$$\langle\sigma_{dm}^{(*)}\rangle = \sqrt{2}\,b^{-1}b_{(dm)}\,(A_1 Gb\sqrt{\beta + \alpha_0\,(t) + A_*\,(t)} + A_2 Gb_{(*)}\sqrt{\beta_*})$$

$$b = |\,\mathbf{b}\,|,\ b_{dm} = b_d n_m,\quad b_{(dm)} = {}^1/_2\,(b_d n_m + b_m n_d)$$

Здесь $\sigma_{dm}^{(a)}$ и $\langle\sigma_{dm}^{(*)}\rangle$ — компоненты внешнего приложенного напряжения и среднего (по кристаллу) напряжения, необходимого для проталкивания элемента дислокации через ансамбль соседних дислокаций, $F_j^{(p)}$ — компоненты динамической силы Пайерлса $(F_{\cdot}^{(P)} = |\,\mathbf{F}^{(P)}|)$, B — коэффициент демпфирования, G — модуль сдвига, A_1 и A_2 — постоянные, ε_{jkl} — символы Леви-Чивиты ($\varepsilon_{jkl}v_j\xi_k n_l \geqslant 0$ и $j,\ k,\ l,\ d,\ m = 1,\ 2,\ 3$).

В соотношение (2.9) входит также сила среднего нелокального самодействия дислокационных структур, компоненты которой [8]

$$\langle F_j^{(s)}\rangle_D = \varepsilon_{jkl}\xi_k n_l AGb^2/R$$

где $A \approx {}^1/_2$. Для дислокационного сегмента с длиной основания λ модуль силы $\langle F^{(s)}\rangle_D = \langle\ |\,\mathbf{F}^{(s)}|\ \rangle_D$ изменяется от $AGb^2/({}^1/_2\lambda)$ до AGb^2/R_λ в течение всей эволюции сегмента до испускания петли, поэтому примем, что

$$\langle\langle F^{(s)}\,(\lambda, \chi)\rangle_D\rangle_\chi = AGb^2/({}^5/_6\lambda) \tag{2.10}$$

где χ — текущий момент времени, изменяющийся в промежутке между двумя моментами испускания дислокационной петли.

3. Связь характеристик дислокационного ансамбля с величиной скорости пластической деформации кристалла. Ввиду того, что пластическая деформация кристалла $\varepsilon_{ij}(t)$ пропорциональна общей площади, заметенной движущимися петлями и сегментами [8], имеем

$$\varepsilon_{ij}(t) = b_{(ij)} \int \pi R^2 N(t)\, \Psi(R, t)\, dR + b_{(ij)} \int \pi R_\lambda{}^2 \eta(\lambda, t)\, N_0 \varphi(\lambda)\, d\lambda \qquad (3.1)$$

где первый член в правой части (3.1) дает вклад от движения петель, а второй — от движения сегментов. Примем далее, что площадь, заметенная сегментом к моменту старта, равна нулю, т. е. $\eta(\lambda_t, t) = 0$. Учитывая также, что $\Psi(R_t, t) = \Psi(r_t, t) = 0$, продифференцируем (3.1) и получим

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot}(t) = b_{(ij)}\, 2\pi \int N(t)\, R\, \langle v(R, t)\rangle_D\, \Psi(R, t)\, dR +$$
$$+ b_{(ij)} \int \pi R^2 (N(t)\, \Psi(R, t))^{\cdot}\, dR + b_{(ij)} \int \pi R_\lambda{}^2 \eta^{\cdot}(\lambda, t)\, N_0 \varphi(\lambda)\, d\lambda \qquad (3.2)$$

где первые два члена в правой части (3.2) дают вклад в величину $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$ от движения петель, а третий член — от движения сегментов.

4. Основные механизмы диссипации механической энергии движущихся дислокаций. Остановимся ниже на основных механизмах диссипации механической энергии движущихся дислокаций в тепловую энергию кристалла. Выпишем сначала выражение для общей величины приращения диссипируемой энергии движущихся дислокационных структур (петель и сегментов) на единицу объема кристалла

$$dq' = \int_0^{2\pi} \int (B \langle v\rangle_D) \langle v\rangle_D\, RN(t)\, \Psi(R, t)\, dR\, d\varphi\, dt + \int_0^{2\pi} \int F^{(P)} \langle v\rangle_D\, RN(t) \times$$
$$\times\, \Psi(R, t)\, dR\, d\varphi\, dt + \int_0^{2\pi} \int |\langle \sigma_{dm}^{(*)}(t)\rangle\, b_{dm}|\, \langle v\rangle_D\, RN(t)\, \Psi(R, t)\, dR d\varphi\, dt +$$
$$+ \int (|\sigma_{dm}^{(a)} b_{dm}| - \langle\langle F^{(s)}\rangle_D\rangle_\chi)\, \pi R^2\, d(\Psi(R, t)\, N(t))\, dR + \int (F_*^{(P)} + B\langle v\rangle_D) \times$$
$$\times\, \pi R_\lambda{}^2 \eta^{\cdot}(\lambda, t)\, N_0 \varphi(\lambda)\, d\lambda\, dt, \quad F_*^{(P)} = F^{(P)} + |\langle \sigma_{dm}^{(*)}(t)\rangle\, b_{dm}| \qquad (4.1)$$

Остановимся на выяснении физического смысла величин в правой части соотношения (4.1). Первый интеграл в правой части (4.1) характеризует диссипацию механической энергии дислокационных петель в тепловую энергию кристалла вследствие вязкого торможения. Диссипация происходит путем проявления механизмов фононной вязкости, термоупругой диссипации, фононного рассеяния и флаттер-эффекта, причем все указанные механизмы приводят к вязкому торможению дислокаций, линейным образом зависящему от скорости дислокаций.

Второй интеграл в правой части (4.1) описывает диссипацию механической энергии петель вследствие действия радиационного трения (динамической силы Пайерлса), которое испытывает дислокация при перемещении ее по дискретной кристаллической решетке, когда ее атомная конфигурация и упругая энергия испытывают периодические изменения. При этом дислокация излучает фононы (тепловые колебания), т. е. отдает часть своей энергии атомам кристаллической решетки.

Третий интеграл в правой части соотношения (4.1) отвечает за диссипацию механической энергии петель из-за их торможения внутренними дальнодействующими полями напряжений соседних дислокаций. Указанный механизм диссипации реализуется вследствие выгибания движущихся дислокационных дуг между пиками поля $\sigma_{dm}^{(*)}$, их срыва и частичной аннигиляции с соседними дугами при выпрямлении дислокации. Затем этот процесс повторяется вновь и вновь. Необходимо отметить, что приращение тепловой энергии при этом возможно и за счет процессов образования порогов при пересечении дислокаций и торможения дислокаций вследствие неконсервативного движения этих порогов, однако указанные эффекты важны только для низких температур ($T < 0{,}2T_0$, где T_0 — абсолютная температура плавления) и малых скоростей движения дислокаций.

Четвертый интеграл в правой части уравнения (4.1) имеет смысл приращения тепловой энергии кристалла за счет диссипации в тепловую энергию по всем возможным каналам механической энергии движущихся дислокационных петель, возникших в кристалле за промежуток времени от t до $t + dt$.

Рассмотрим последний интеграл в правой части соотношения (4.1). Каждый из $N_0\varphi(\lambda)\,d\lambda$ дислокационных сегментов с основанием длины от λ до $\lambda + d\lambda$ за промежуток времени dt заметает площадь $\pi R_\lambda^2\eta^{\cdot}(\lambda, t)\,dt$, совершая работу против сил радиационного трения, внутренних дальнодействующих полей напряжения соседних дислокаций и вязкого торможения. Итак, последний интеграл в правой части уравнения (4.1) характеризует диссипацию механической энергии движущихся дислокационных сегментов по всем вышеперечисленным каналам.

В соотношение (4.1) входят микроскопические характеристики индивидуальных дислокационных структур. Далее преобразуем это соотношение к виду, когда в правую часть его будут входить только макроскопические характеристики пластического течения и статистические характеристики ансамбля дислокационных петель и сегментов.

5. **Выражение для диссипативной функции.** Преобразуем сначала второй и третий интегралы в правой части соотношения (4.1), а также те части четвертого и пятого интегралов, которые характеризуют диссипацию энергии за счет радиационного трения и внутренних дальнодействующих полей напряжений соседних дислокаций. При этом используем соотношение (3.2), предварительно свернув его с $2b_{(ij)}b^{-2}$, а также равенство

$$2b_{(ij)}b_{(ij)} = b^2 \tag{5.1}$$

При этом имеем

$$\int_0^{2\pi}\int F_*^{(P)}\langle v\rangle_D RN(t)\,\Psi(R,t)\,dR\,d\varphi\,dt + \int_0^{2\pi}\int F_*^{(P)}\pi R^2\,d(\Psi(R,t)N(t))\,dR +$$
$$+ \int F_*^{(P)}\pi R_\lambda^2\eta^{\cdot}(\lambda,t)\,N_0\varphi(\lambda)\,d\lambda\,dt = F_*^{(P)}2b_{(ij)}\varepsilon_{ij}^{\cdot}(t)\,b^{-2}\,dt \tag{5.2}$$

Преобразуем теперь первый интеграл в правой части соотношения (4.1) и ту часть четвертого интеграла, которая характеризует диссипацию механической энергии за счет вязкого торможения дислокаций. Имеем

$$J_* = \int_0^{2\pi}\int B\langle v\rangle_D\langle v\rangle_D RN(t)\,\Psi(R,t)\,dR\,d\varphi\,dt +$$
$$+ \int B\langle\langle v\rangle_D\rangle_\chi\,\pi R^2\,d(\Psi(R,t)\,N(t))\,dR$$

Используя далее значение $\langle v\rangle_D$ из уравнения (2.9), предварительно свернутое с единичным вектором с компонентами $\xi_{jkl}\xi_k n_l$, и принимая во внимание соотношение (2.10), найдем среднее значение скорости дислокационного сегмента в интервале времени $t_n(\lambda) \leqslant \chi \leqslant t_{n+1}(\lambda)$, т. е. значение $\langle\langle v\rangle_D\rangle_\chi$, входящее в выражение для J_*

$$\langle\langle v(\lambda, t)\rangle_D\rangle_\chi = (t_{n+1}(\lambda) - t_n(\lambda))^{-1} \int\limits_{t_n(\lambda)}^{t_{n+1}(\lambda)} \langle v(\lambda, t)\rangle_D\, d\chi =$$

$$= (t_{n+1}(\lambda) - t_n(\lambda))^{-1} \int\limits_{t_n(\lambda)}^{t_{n+1}(\lambda)} B^{-1}(K - \langle F^{(s)}(\lambda, t)\rangle_D)\, d\chi = B^{-1}(K - AGb^2/({}^5/_6\lambda)),$$

$$K = |\sigma_{dm}^{(a)}(t)\, b_{dm}| - \langle\sigma_{dm}^{(*)}(t)\rangle\, b_{dm} - F^{(P)}$$

Далее, используя соотношение (2.6) и свойства функции плотности распределения $\Psi(R, t)$, а также учитывая, что плотность подвижных дислокационных петель $\alpha_0(t)$ задается соотношением (2.7), а значения средней скорости ансамбля дислокационных петель $\langle v\rangle_R$ и скорости дислокационной петли среднего радиуса $v_{\langle R\rangle_R}$ находятся из равенств

$$B\langle v\rangle_R = K - AGb^2\langle R^{-1}\rangle_R, \quad Bv_{\langle R\rangle} = K - AGb^2\langle R\rangle_R^{-1} \tag{5.3}$$

(при этом $v_{\langle R\rangle_R} \neq \langle R\rangle_R^{\cdot}$), получим

$$J_* = \alpha_0(t)\, dt\, (Kv_{\langle R\rangle_R} - AGb^2\langle v\rangle_R\langle R\rangle_R^{-1}) + K\int \pi R^2\, d(\Psi(R, t)\, N(t))\, dR -$$
$$- AGb^2\int 2\pi R\, d(\Psi(R, t)\, N(t))\, dR \tag{5.4}$$

Для дальнейших выкладок необходимо найти выражение $v_{\langle R\rangle_R}$ через компоненты тензора скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{kl}^{(0)}$, происходящей только за счет движения и размножения дислокационных петель. Из соотношения (3.2) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{(0)}(t) = I_1 + I_2 \tag{5.5}$$

$$I_1 = b_{(kl)} 2\pi \int \langle v\rangle_D RN(t)\, \Psi(R, t)\, dR, \quad I_2 = b_{(kl)}\int \pi R^2 (\Psi(R, t)\, N(t))^{\cdot} dR$$

Преобразуем первый интеграл в правой части этого равенства. Используя соотношения (2.7), (2.9) и (5.3), имеем

$$I_1 = 2\pi N(t)\, B^{-1} b_{(kl)} \int (K - AGb^2R^{-1})\, R\Psi(R, t)\, dR =$$
$$= 2\pi N(t)\langle R\rangle_R v_{\langle R\rangle_R}\, b_{(kl)} = b_{(kl)}\alpha_0(t)\, v_{\langle R\rangle_R}$$

Подставляя это значение в равенство (5.5) и свертывая его с $2b^{-2}b_{(kl)}$ с учетом соотношения (5.1), можно найти значение для скорости петли, имеющей средний радиус в ансамбле петель:

$$v_{\langle R\rangle_R} = \frac{2b_{(kl)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(0)}(t)}{b^2\alpha_0(t)} - \frac{1}{\alpha_0(t)}\int \pi R^2 (\Psi(R, t)\, N(t))^{\cdot}\, dR \tag{5.6}$$

Подставляя значение $v_{\langle R\rangle_R}$ из соотношения (5.6) в равенство (5.4), а также учитывая соотношения (2.7), (2.8) и (5.3), получим

$$J_* = \left(\frac{4Bb_{(ij)}b_{(kl)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(0)}(t)}{b^4\alpha_0(t)} - \frac{2Bb_{(ij)}}{b^2\alpha_0(t)}\int \pi R^2 (\Psi(R, t)\, N(t))^{\cdot}\, dR + \right.$$
$$\left. + \frac{2AGb^2b_{(ij)}}{b^2\langle R\rangle_R}\right) d\varepsilon_{ij}^{(0)} - AGb^2\, d\alpha_0 \tag{5.7}$$

Преобразуем теперь ту часть последнего интеграла в равенстве (4.1), которая характеризует диссипацию энергии за счет вязкого торможения движущихся дислокационных сегментов. Используя соотношение (2.2) и соотношение (2.9), записанное для дислокационных сегментов в скалярном виде

$$B\langle v(\lambda, t)\rangle_D = K - \frac{AGb^2l^{\cdot}(\lambda, t)}{\langle v(\lambda, t)\rangle_D\, l(\lambda, t)} \tag{5.8}$$

получим

$$J_{**} = \int B \langle v \rangle_D \pi R_\lambda^2 \eta^{\cdot} (\lambda, t) N_0 \varphi(\lambda) d\lambda\, dt =$$
$$= \int \left(K - \frac{AGb^2 l^{\cdot}(\lambda, t)}{\langle v(\lambda, t)\rangle_D\, l(\lambda, t)} \right) l(\lambda, t) \langle v(\lambda, t) \rangle_D N_0 \varphi(\lambda) d\lambda\, dt \quad (5.9)$$

Замечая далее, что из соотношения (3.2) следует, что компоненты тензора скорости пластической деформации кристалла, происходящей только за счет движения дислокационных сегментов, таковы

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(*)}(t) = b_{(ij)} \int \pi R_\lambda^2 \eta^{\cdot}(\lambda, t) N_0 \varphi(\lambda) d\lambda = b_{(ij)} \int l(\lambda, t) \langle v(\lambda, t) \rangle_D N_0 \varphi(\lambda)\, d\lambda \quad (5.10)$$

и пользуясь соотношениями (2.4) и (5.1), получим

$$J_{**} = 2b_{(ij)} b^{-2} K \dot{\varepsilon}_{ij}^{(*)}(t)\, dt - AGb^2\, dA_* \quad (5.11)$$

Отметим теперь, что из соотношения (5.10) следует

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{(*)}(t) = b_{(kl)} \langle l \langle v \rangle_D \rangle_\lambda M(t) = b_{(kl)} \alpha_*(t) \langle l \langle v \rangle_D \rangle_\lambda \langle l \rangle_\lambda^{-1} \quad (5.12)$$

Далее, применяя оператор $\langle ... \rangle_\lambda$ к уравнению (5.8) и подставляя полученное значение $\langle \langle v \rangle_D \rangle_\lambda$ из (5.8) в (5.12), а также используя соотношение (5.1), получим

$$K = \frac{2Bb_{(kl)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(*)}(t)}{b^2 \alpha_*(t)} - \frac{B \langle l (\langle v \rangle_D - \langle \langle v \rangle_D \rangle_\lambda) \rangle_\lambda}{\langle l \rangle_\lambda} + \langle \langle F^{(s)} \rangle_D \rangle_\lambda \quad (5.13)$$

Окончательно, подставляя значение K из (5.13) в (5.11), найдем

$$J_{**} = \left(\frac{4Bb_{(ij)} b_{(kl)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(*)}(t)}{b^4 \alpha_*(t)} - \frac{2Bb_{(ij)} \langle l (\langle v \rangle_D - \langle \langle v_D \rangle_\lambda) \rangle_\lambda}{b^2 \langle l \rangle_\lambda} + \right.$$
$$\left. + 2b_{(ij)} b^{-2} \langle \langle F^{(s)} \rangle_D \rangle_\lambda \right) d\varepsilon_{ij}^{(*)} - AGb^2\, dA_* \quad (5.14)$$

Теперь из соотношения (0.1), используя преобразованное выражение (4.1) для приращения общей величины диссипируемой энергии движущихся дислокационных структур на единицу объема кристалла, отнесенной к единице абсолютной температуры, можно записать выражение для ДФ пластического течения кристалла

$$\Phi = L_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + F_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + M_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(*)} + E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(*)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(*)} -$$
$$- AGb^2 T^{-1} \alpha_0^{\cdot} - AGb^2 T^{-1} A_*^{\cdot} \quad (5.15)$$

$$L_{ij} = N_{ij} - \frac{2Bb_{(ij)}}{Tb^2 \alpha_0(t)} \int \pi R^2 (\Psi(R, t) N(t))^{\cdot} dR + \frac{2AGb^2 b_{(ij)}}{Tb^2 \langle R \rangle_R}$$

$$F_{ijkl} = \frac{4Bb_{(ij)} b_{(kl)}}{Tb^4 \alpha_0(t)}, \quad E_{ijkl} = \frac{4Bb_{(ij)} b_{(kl)}}{Tb^4 \alpha_*(t)}$$

$$M_{ij} = N_{ij} - \frac{2Bb_{(ij)} \langle l(\lambda, t) (\langle v(\lambda, t) \rangle_D - \langle \langle v(\lambda, t) \rangle_D \rangle_\lambda) \rangle_\lambda}{Tb^2 \langle l(\lambda, t) \rangle_\lambda} + \frac{2b_{(ij)}}{Tb^2} \langle \langle F^{(s)}(\lambda, t) \rangle_D \rangle_\lambda$$

$$N_{ij} = \frac{2F^{(P)} b_{(ij)}}{Tb^2} + \frac{\sqrt{2}\, b_{(ij)}}{Tb} \left(A_1 Gb \sqrt{\beta + \alpha_0(t) + A_*(t)} + A_2 Gb_{(*)} \sqrt{\beta_*} \right)$$

где $d\varepsilon_{ij}^{(0)}$ и $d\varepsilon_{ij}^{(*)}$ — соответственно приращение пластической деформации за счет движения петель и движения сегментов (полная пластическая деформация $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(*)}$). Можно убедиться в том, что правая часть равенства (5.15) всегда неотрицательна. Полученное соотношение показывает, что в выражение для ДФ входят однородные функции первой и второй степени по скоростям пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(*)}$, создаваемых обоими типами дислокационных структур. Однако существенным отличием от феноменологических способов задания ДФ является зависимость не только от скоростей пластических деформаций, но и от скоростей изменения параметров микроструктуры кристалла: $\alpha_0^{\cdot}$ и $A_*^{\cdot}$. Коэффициенты L_{ij}, F_{ijkl}, M_{ij}, E_{ijkl} и AGb^2T^{-1}, входящие в соотношение (5.15) для ДФ, выражаются через макроскопические характеристики ансамбля дислокационных структур, имеют конкретное значение, ясный физический смысл и могут быть определены из решения уравнения модели [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
2. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 121—180.
3. *Ивлев Д. Д.* О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 346—348.
4. *Ивлев Д. Д.* О диссипативной функции в теории пластических сред // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 5. С. 1037—1039.
5. *Коларов Д.*, *Балтов А.*, *Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
6. *Пэжина П.*, *Савчук А.* Проблемы термопластичности // Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир, 1979. С. 94—202.
7. *Mróz Z.*, *Raniecki B.* A derivation of the uniquencess conditions in coupled thermoplasticity // Intern. J. Eng. Sci. 1976. V. 14. № 4. P. 395—401.
8. *Лукерченко В. Н.* К выводу основного кинематического соотношения теории дислокаций // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 42—46.
9. *Лукерченко В. Н.* К теории деформационного упрочнения кристаллических материалов // Физика и химия обраб. материалов. 1983. № 4. С. 105—111.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1988