Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.383

Л. Г. Доборджгинидзе

ЗАДАЧА О ДАВЛЕНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА ГРАНИЦУ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Рассматривается плоская контактная задача нелинейной теории упругости для полуплоскости из нелинейно упругого материала гармонического типа [1] при конечных деформациях. Принимается, что в области контакта штампа с упругой полуплоскостью трение отсутствует. При помощи схемы, предложенной ранее автором [2], задача сводится к нелинейному интегральному уравнению. В отличие от работы [2], где это уравнение решено только для плоского штампа с прямолинейным горизонтальным основанием, получено точное решение для наклонного штампа с плоским основанием, а также для штампа, профиль основания которого — дуга окружности либо клин. Показано, что на краях штампа и в угловой точке контактное давление ограничено.

1. Постановка и решение задачи. Рассматриваемая физическая область представляет собой нижнюю полуплоскость S^- плоскости переменной $z = x + iy$, L — граница области S^-. Предположим, что на часть $L_1 = [ab]$ этой границы без трения давит жесткий штамп. На остальной части $L_2 = L \setminus L_1$ внешние воздействия отсутствуют. Штамп прижимается к границе внешними усилиями, главный вектор которых $(0, -N_0)$. Будем считать, что штамп может перемещаться лишь поступательно, по нормали к границе. Напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют.

Граничные условия задачи имеют вид [3, 4]

$$X_y = 0 \text{ на } L,\ Y_y = 0 \text{ на } L_2,\ v^- = f(x + u^-) + C \text{ на } L_1 \tag{1.1}$$

где Y_y, X_y — компоненты тензора истинных напряжений Коши, u^-, v^- — граничные значения компонент смещения u и v соответственно на L, f — действительная функция, характеризующая форму профиля основания штампа: $f_x' \in H(L_1)$, C — произвольная действительная постоянная. Граничные условия и ход решения задачи для случая нескольких штампов совершенно идентичны случаю одного штампа.

В последнем равенстве условия (1.1) фигурирует указанное предельное значение горизонтального смещения $u = u(x)$ $(x^* = x + u)$ точек области контакта. Эта функция неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи, в чем и состоит существенное отличие исследуемой задачи от рассмотренной в работе [2].

Воспользуемся комплексными представлениями полей упругих элементов через две аналитические в рассматриваемой области S^- функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного аргумента $z = x + iy$ [2, 3]

$$X_x + Y_y + 4\mu = \frac{(\lambda + 2\mu)\, q\Omega(q)}{\sqrt{I}},$$

$$Y_y - X_x - 2iX_y = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{I}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial \bar z} \tag{1.2}$$

$$u_x' + iv_x' = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \varphi'^2(z) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}} - \overline{\psi'(z)} \right] - 1 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)},\quad \frac{\partial z^*}{\partial \bar z}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}}-\overline{\psi'(z)}\right] \tag{1.4}$$

$$\sqrt{I}=\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial \bar z}-\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial z},\quad q=2\sqrt{\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial \bar z}},\quad \Omega(q)=q-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \tag{1.5}$$

$$z^*=z+u+\iota v$$

Доказано [3], что

$$\varphi'(z)\neq 0 \text{ везде в } S^-+L \tag{1.6}$$

Кроме того, для рассматриваемого случая при больших $|z|$

$$\varphi(z)=-\frac{(\lambda+2\mu)(X+\iota Y)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\ln z+z+o(1)+\mathrm{const} \tag{1.7}$$

$$\psi(z)=\frac{(\lambda+2\mu)(X-\iota Y)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{2\varphi'(z)}-1\right]\ln z+o(1)+\mathrm{const} \tag{1.8}$$

где (X, Y) — главный вектор внешних усилий, приложенных к L_1.

Из первого соотношения (1.1), на основании (1.2), (1.4) и отсутствия напряжений на бесконечности следует

$$\overline{\varphi(x)}\,\varphi''(x)-\varphi'^2(x)\,\psi'(x)=0 \text{ на } L \tag{1.9}$$

Учитывая соотношение (1.9), из (1.2)—(1.6) получим

$$Y_y^-=N(x)=\frac{2\mu(\lambda+\mu)[|\varphi'^2(x)|-1]}{\lambda+\mu+\mu|\varphi'^2(x)|} \text{ на } L \tag{1.10}$$

Отсюда согласно второму условию (1.1) будем иметь

$$|\varphi'(x)|=\exp F(x) \text{ на } L_1,\quad |\varphi'(x)|=1 \text{ на } L_2 \tag{1.11}$$

Здесь

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{2\mu+N(x)}{2(\lambda+\mu)-N(x)}\right] \tag{1.12}$$

Из (1.11) с учетом (1.6), (1.7) находим

$$\varphi'(z)=\exp\left(-\frac{1}{\pi\iota}\int_{L_1}\frac{F(x)\,dx}{x-z}\right),\quad z\in S^- \tag{1.13}$$

Найдем теперь граничные значения $\varphi'(z)$ на L из S^- и полученное выражение внесем в (1.3). Тогда при учете (1.9), последнего условия (1.1) и выражения (1.12) получим основное соотношение, устанавливающее нелинейную связь между искомыми функциями $F(x)$ и $u(x)$ на L_1

$$\int_{L_1}\frac{F(x)\,dx}{x-x_0}=\frac{\pi}{2}\arcsin\left[\left(1-\frac{N(x_0)}{2(\lambda+\mu)}\right)(1+u'(x_0))f'(x_0+u)\right],\quad x_0\in L_1 \tag{1.14}$$

Можно показать, что выражение в квадратных скобках в правой части (1.14) по абсолютной величине не превосходит единицу.

Действительно, граничное значение функции (1.13) из S^- на L внесем в формулу, следующую из (1.3), (1.9),

$$u'(x)=\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{|\varphi'^2(x)|}\right)\mathrm{Re}\,\varphi'^2(x)-1 \text{ на } L_1$$

и в полученном выражении учтем равенство (1.14). Тогда получим соотношение

$$\frac{N(x)}{2(\lambda+\mu)}=1-\frac{1}{(1+u'(x))\sqrt{1+f'^2(x+u)}} \text{ на } L_1 \tag{1.15}$$

откуда следует требуемая оценка.

Равенства (1.12), (1.14), (1.15) образуют систему из трех функциональных уравнений для определения функций $F(x)$, $N(x)$ и $u(x)$ на L_1.

Учитывая соотношение (1.15) в правой части уравнения (1.14), получим

$$\int_{L_1} \frac{F(x)\,\mathrm{d}x}{x-x_0} = \frac{\pi}{2} \arcsin \frac{f'(x_0^*)}{\sqrt{1+f'^2(x_0^*)}} \qquad (x_0^* = x_0 + u) \tag{1.16}$$

где действительная функция $f(x_0^*)$ характеризует форму основания штампа в деформированном состоянии. Но, с другой стороны, выражение под знаком arcsin равно $\sin\alpha(x_0^*)$, где $\alpha(x_0^*)$ — угол, который касательная, проведенная в точке $(x_0^*, f(x_0^*))$, образует с положительным направлением действительной оси. Следовательно,

$$\int_{L_1} \frac{F(x)\,\mathrm{d}x}{x-x_0} = \frac{\pi}{2}\alpha(x_0^*) = \frac{\pi}{2}\alpha(x_0+u) \tag{1.17}$$

Считая временно правую часть уравнения (1.17) известной, приходим к однородному характеристическому сингулярному интегральному уравнению для определения функции $F(x)$ на L_1. Ниже будем искать решение указанного уравнения класса h_0 (т. е. решение, не ограниченное на концах линии интегрирования). Индекс этого класса равен единице, а само решение имеет вид (без ограничения общности будем считать, что $L_1 = [-a; a]$) [5]

$$F(x_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a^2-x_0^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\alpha(x^*)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x}{x-x_0} + \frac{C}{\sqrt{a^2-x_0^2}} \tag{1.18}$$

где C — действительная постоянная, определяемая из условия задания главного вектора действующих напряжений.

После определения функции $F(x)$ функцию $\varphi'(z)$ находим из (1.13), а другой искомый потенциал $\psi(z)$ определяем из (1.9) известным способом. По найденной функции $F(x)$ распределение контактного давления под штампом определяется согласно (1.12) выражением

$$N(x) = \frac{2\mu\,[\exp(2F(x))-1]}{1+\mu(\lambda+\mu)^{-1}\exp(2F(x))} \tag{1.19}$$

Следует отметить, что функция $\alpha(x^*)$ в правой части (1.17), вообще говоря, неизвестна, что существенно усложняет исследование. Ниже рассматривается случай, когда удается преодолеть это препятствие и найти точное решение задачи.

2. Штамп с прямолинейным горизонтальным или наклонным основанием. Если штамп имеет прямолинейное основание с углом наклона ω, то $\alpha(x^*) = \omega$. Поскольку

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x}{x-x_0} = -\pi x_0$$

то из (1.18) находим решение уравнения (1.17) класса h_0 в виде

$$F(x) = \frac{\omega x + C}{2\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad C = \frac{(\lambda+2\mu)N_0}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \tag{2.1}$$

Здесь N_0 — заданная положительная постоянная: $Y = -N_0$, а постоянная C определена в результате интегрирования первого равенства (2.1) от $-a$ до a, сравнения полученного выражения с асимптотическим значением правой части формулы (1.13) при больших $|z|$ и учета соотношения (1.7).

Следовательно, контактное давление под штампом будет определяться формулами (1.12), (2.1), причем случай $\omega = 0$ соответствует штампу с прямолинейным горизонтальным основанием.

Итак, получено распределение нормальных напряжений в области контакта (включая угловые точки), не содержащее особенностей. В частности, $\lim N(x) = 2(\lambda + \mu)$ при $|x| \to a$. Кроме того, полученное распределение существенно зависит от упругих свойств материала.

Главный момент внешних сил, удерживающих штамп в данном положении, можно вычислить по формуле

$$M = -\int_{-a}^{a} N(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Штамп с прямолинейным клинообразным основанием. Пусть штамп имеет клинообразное основание, т. е. представляет собой ломаную, симметричную относительно оси y, с вершиной в точке $x = 0$. Угол наклона этой ломаной равен $|\alpha|$. Предполагается, что конечные (угловые) точки штампа ($x = \pm a$) вступают в контакт с границей упругой полуплоскости. Имеем

$$d(x^*) = \begin{cases} -\alpha \text{ на } [-a; 0[\\ \alpha \text{ на }]0; a] \end{cases}$$

Подставляя этот результат в правую часть соотношения (1.18), получим

$$F(x) = -\frac{\alpha}{\pi}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \frac{(\lambda + 2\mu) N_0 + \mu(\lambda + \mu)\alpha a}{2\pi\mu(\lambda + \mu)\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{3.1}$$

и согласно формуле (1.19) будем иметь картину распределения контактных давлений. В точках $-a$, 0, a контактное давление имеет конечное значение $2(\lambda + \mu)$.

Этот пример дает определенное представление о процессе вдавливания режущего инструмента в упругую среду.

4. Об ограниченных решениях уравнения (1.16). Вернемся к исходному уравнению (1.16) и определим решение этого уравнения класса $h(-a; a)$ (т. е. решение, ограниченное в точках $-a$, a), причем принимается, что $F(\pm a) = 0$. Используя последнее условие, продифференцируем равенство (1.16) по x_0. Получим

$$\int_{-a}^{a} \frac{F'(x)\,\mathrm{d}x}{x - x_0} = \frac{\pi}{2}\,\frac{k(x_0^*)}{\cos\alpha} \tag{4.1}$$

где $k(x_0^*)$ — кривизна контактной линии в точке x_0^*, α — угол, образуемый касательной к этой линии в точке $(x_0^*, f(x_0^*))$ с положительным направлением действительной оси.

Предположим теперь, что штамп представляет собой полосу, ограниченную снизу симметричной дугой окружности радиуса R, а сбоку вертикальными прямыми $x = \pm a$. Тогда $k(x^*) = 1/R$, где R — достаточно большая величина. С приемлемой точностью можно заменить правую часть равенства (4.1) выражением $\pi/(2R)$, т. е. пренебречь слагаемыми третьего порядка малости относительно $1/R$. Значит, будем иметь

$$\int_{-a}^{a} \frac{F'(x)\,\mathrm{d}x}{x - x_0} = \frac{\pi}{2R} \tag{4.2}$$

Теперь ищем решение этого уравнения класса h_0. Оно имеет вид [6]

$$F'(x) = \frac{A + Bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

где A и B — действительные постоянные. Проинтегрируем это равенство и примем во внимание условие симметрии задачи. Тогда получим ($A = 0$)

$$F(x) = C\sqrt{a^2 - x^2}, \quad C = (2R)^{-1} \tag{4.3}$$

Постоянная C определена путем подстановки первого выражения (4.3) в уравнение (4.2).

Для определения действительной постоянной a подставим выражения (4.3) в правую часть формулы (1.13) и сравним между собой асимптотическое поведение формул (1.7), (1.13) при больших $|z|$. Тогда получим

$$a = \{(\lambda + 2\mu) RN_0/[\pi\mu(\lambda + \mu)]\}^{1/2}$$

Этой формулой определяется полудлина участка контакта.

Контактное давление под штампом согласно формулам (1.19), (4.3) обращается в нуль в концевых точках контактной области.

Наконец рассмотрим случай, когда штамп имеет клинообразное основание с углом наклона $|\alpha|$, а действующие внешние силы недостаточны для того, чтобы угловые точки штампа вошли в соприкосновение с границей упругой полуплоскости. Следовательно, концы контактной линии (т. е. точки $-a$, a) не известны заранее и подлежат определению в процессе решения задачи.

В рассматриваемом случае функция $F(x)$ определяется первым (логарифмическим) слагаемым в правой части формулы (3.1), а координату концевой точки области контакта находим в виде

$$a = (\lambda + 2\mu) N_0/[2\mu(\lambda + \mu)\alpha]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Communs Pure Appl. Math. 1960. V. 13. № 2. P. 239—296.
2. *Доборджгинидзе Л. Г.* Плоская контактная задача нелинейной теории упругости для упругой полуплоскости из материала гармонического вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 96—100.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Тбилиси

Поступила в редакцию
5.VII.1988