Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.383

В. И. Моссаковский, Е. В. Пошивалова

ДАВЛЕНИЕ КОЛЬЦЕВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Получено решение задачи о кольцевом штампе в точной постановке, т. е. без упрощающих предположений относительно удовлетворения граничных условий и уравнения Лапласа. При исследовании используется метод решения пространственных контактных задач теории упругости, предложенный В. И. Моссаковским. Проводится сравнение с известным решением [1].

Как известно [2], задача о давлении кольцевого в плане штампа в случае осевой симметрии сводится к отысканию нормальной производной $F_z'(\rho, 0)$ в области контакта от гармонической в полупространстве функции $F(\rho, z)$, исчезающей на бесконечности, которая удовлетворяет граничным условиям

$$F_z'(\rho, 0) = 0, \ 0 < \rho < a, \ b < \rho < \infty; \ F(\rho, 0) = f(\rho), \ a < \rho < \infty \quad (1)$$

где a и b — внутренний и внешний радиусы кольца, ρ — полярный радиус, $z = f(\rho)$ — уравнение поверхности штампа (ось z — направлена внутрь упругого полупространства).

Давление под штампом $P(\rho)$ определяется по формуле

$$P(\rho) = 1/2E(1 - \nu^2)^{-1} F_z'(\rho, 0), \ a < \rho < b$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

В общем случае следует предположить, что

$$f(\rho) = f_1(\rho) + f_2(\rho), \ f_1(\rho) = a_0 + a_1\rho + \ldots, \ f_2(\rho) = a_{-1}\rho^{-1} + a_{-2}\rho^{-2}$$

Такое представление функции $f(\rho)$, очевидно, единственное, при этом $f_1(\rho)$ может быть продолжена до нуля, а $f_2(\rho)$ — до бесконечности.

Введем две гармонические в упругом полупространстве функции $F_k(\rho, z)$ $(k = 1, 2)$, такие, что

$$F_1(\rho, z) + F_2(\rho, z) = F(\rho, z)$$
$$F_1(\rho, 0) = f_1(\rho), \ 0 < \rho < b; \ F_2(\rho, 0) = f_2(\rho), \ a < \rho < \infty \quad (2)$$

Тогда граничные условия (1) примут вид

$$F_{1z}'(\rho, 0) + F_{2z}'(\rho, 0) = 0, \ 0 < \rho < a, \ b < \rho < \infty$$
$$F_1(\rho, 0) = f_1(\rho), \ 0 < \rho < b; \ F_2(\rho, 0) = f_2(\rho), \ a < \rho < \infty \quad (3)$$

Гармонические в полупространстве $z \leqslant 0$ осесимметричные функции $F_k(\rho, z)$ могут быть представлены в виде

$$F_k(\rho, z) = J\Phi_k(t) e^{tz} J_0(t\rho)\, dt \quad (4)$$

где $\Phi_k(t)$ — не известные пока функции, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Здесь и всюду далее интегрирование по t ведется от 0 до ∞.

Положим в формулах (4) $z = 0$ и заменим функции Бесселя контурными интегралами. Меняя порядок интегрирования и вводя обозначения $\varphi_k(s) = J\Phi_k(t)\, t^s dt$, получим систему интегральных уравнений для определения функций $\varphi_k(s)$ (ниже и всюду далее интегрирование по s ведется от $c - i\infty$

до $c + i\infty$)

$$\frac{1}{2\pi i} J 2^{-s}\varphi_k(s)\frac{\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 s)}\rho^{s-1}\,ds = \begin{cases} f(\rho), & k=1,\ 0<\rho<b \\ 0, & k=2,\ a<\rho<\infty \end{cases}$$
$$\frac{1}{2\pi i} J 2^{1-s}(\varphi_1(s)+\varphi_2(s))\frac{\Gamma(1 - {}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 s)}\rho^{s-2}\,ds = 0,\ 0<\rho<a,\ b<\rho<\infty \tag{5}$$

Пусть в полуплоскости $y < 0$ заданы две гармонические функции u_k (x, y), симметричные относительно x

$$u_k(x, y) = J\psi_k(t)\cos xte^{yt}dt \tag{6}$$

где ψ_k (t) — неизвестные функции. Положив в формуле (6) $y = 0$, подставив в нее значение $\cos xt$ в виде контурного интеграла и изменив порядок интегрирования, получим

$$u_k(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} J \sqrt{\pi}\, 2^{-s-1}G_k(s)\frac{\Gamma(-{}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 s)}x^s\,ds \tag{7}$$
$$G_k(s) = J\psi_k(t)\, t_s dt$$

Потребуем, чтобы

$$F_{1z}'(\rho, 0) = \rho^{-1}u_{1x}'(\rho, 0),\ F_{2z}'(\rho, 0) = \rho^{-1}u_{2y}'(\rho, 0) \tag{8}$$

Благодаря установлению такой связи между плоской и пространственной функциями давление под подошвой штампа определяется непосредственно из решения плоской задачи без интегральной зависимости.

Используя соотношения (8), находим связь ядер G_k (s) с φ_k (s).

Подставив результат в уравнения (5), после преобразований при помощи формул

$$\int_0^x \rho^{2\alpha-1}(x^2-\rho^2)^{\beta-1}d\rho = {}^1/_2\beta(\alpha,\beta)\,x^{2\alpha+2\beta-2}$$
$$\int_x^\infty \rho^{2\alpha-2\beta+1}(\rho^2-x^2)^{\beta-1}d\rho = {}^1/_2\beta(\alpha,\beta)\,x^{-2\alpha}$$

получим систему уравнений

$$\frac{1}{2\pi i} J\sqrt{\pi}\,2^{-s}G_1(s)\frac{\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 s)}\rho^{s-1}\,ds = \frac{f(\rho)}{4\pi},\quad 0<\rho<b$$
$$\frac{1}{2\pi i} J\sqrt{\pi}\,2^{-s}\left[G_1(s)\frac{\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 s)} - G_2(s)\frac{\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 s)}\right]\rho^{s-1}\,ds = 0$$
$$0<\rho<a,\quad b<\rho<\infty; \tag{9}$$
$$\frac{1}{2\pi i} J\sqrt{\pi}\,2^{-s}G_2(s)\frac{\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 s)}\rho^{s-1}\,ds = 0,\quad a<\rho<\infty$$

Учитывая соотношения (7), получим следующие граничные условия для функций u_k $(x, 0)$:

$$u_{1x}'(x, 0) + u_{2y}'(x, 0) = 0,\ 0<x<a,\ b<x<\infty$$
$$u_{2x}'(x, 0) = 0,\ a<x<\infty$$
$$u_{1y}'(x, 0) = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2-z^2}}\cdot\frac{d}{dz}\int_0^z\frac{\rho f(\rho)\,d\rho}{\sqrt{z^2-\rho^2}},\quad 0<x<b \tag{10}$$

В случае штампа с плоским основанием можно положить

$$f_1(\rho) = c,\ f_2(\rho) = 0$$

Отобразим область $y < 0$ на внутренность круга плоскости $\omega = \xi + i\eta$ посредством однозначной аналитической функции $\omega = R$ (z). Последнее соотношение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками x контура $y = 0$ и точками $t = e^{i\varphi}$ окружности: $t = R$ (x). При этом устанавливается соответствие между точками a, $-a$, b, $-b$ и точками окружности следующего вида:

$$a \Rightarrow e^{i\theta_1},\quad -a\Rightarrow e^{-i\theta_1},\quad b\Rightarrow e^{i\theta_2},\quad -b\Rightarrow e^{-i\theta_2}\quad (\theta_2 = \pi - \theta_1)$$

Искомая функция, отображающая нижнюю полуплоскость на внутренность круга, будет иметь вид

$$\omega = i\sqrt{ab}\,(1 - z)/(1 + z)$$

При этом отображении граница полуплоскости $y = 0$ переходит в окружность $|e^{i\varphi}| = 1$, причем

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,(x/\sqrt{ab})$$

Введем в рассмотрение некоторые аналитические функции

$$\Phi_k(\omega) = \Sigma A_{kn}\omega^{n-1}, \quad k = 1, 2$$

A_{kn} — постоянные (суммирование здесь и далее ведется от $n = 1$ до ∞).

Пусть функции u'_{kx}, u'_{ky} связаны с Φ_k следующим образом:

$$\Phi_k(t) = u'_{ky}(x, 0) + iu'_{kx}(x, 0)$$

Тогда функции $u'_{ky}(x, 0)$, $u'_{kx}(x, 0)$ представляются некоторыми тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u'_{kx}(x, 0) &= \Sigma A_{kn}\sin(n-1)\varphi \\ u'_{ky}(x, 0) &= \Sigma A_{kn}\cos(n-1)\varphi \end{aligned} \tag{11}$$

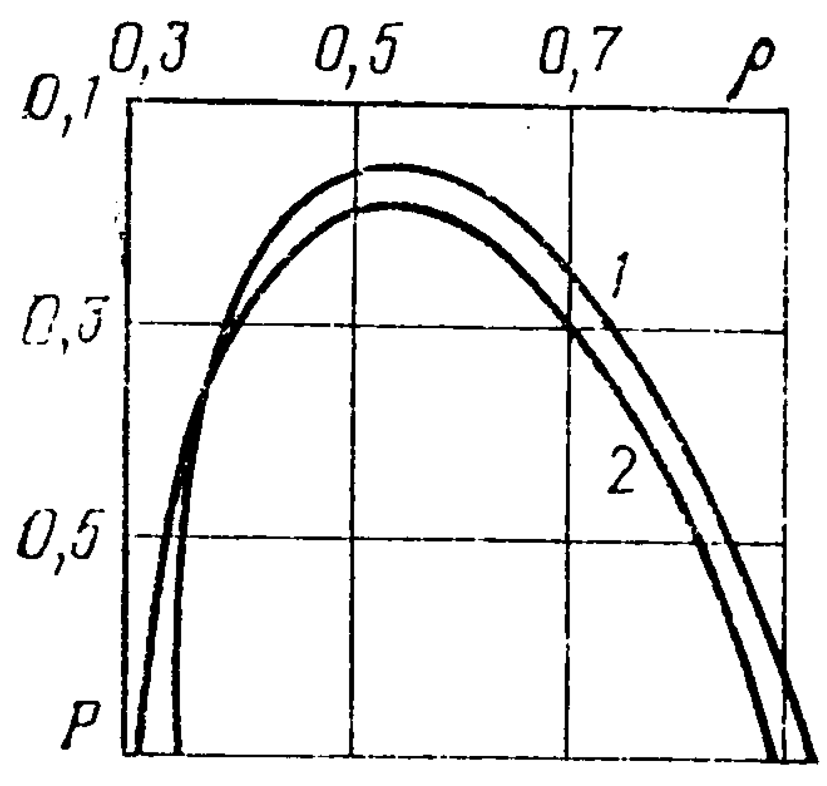
Функции $u_k(x, 0)$ имеют особенности в точках $a, -a, b, -b$ (условия (10)) соответственно, ряды (11) будут медленно сходящимися.

Следующий прием дает возможность упростить вычисления, усилив быстроту сходимости рядов. Для этого введем новые ряды, связанные с (11) зависимостью

$$\Sigma C_{kn}t^{n-1} = \Sigma A_{kn}t^{n-1}(t - e^{i\theta_1})(t - e^{-i\theta_1})(t - e^{-i(\pi-\theta_1)})(t - e^{i(\pi-\theta_1)}) = \Sigma A_{kn}t^{n-1}\Delta$$
$$\Delta = 2(\cos 2\varphi - \cos 2\theta_1)$$

Учитывая проведенные преобразования, получим

$$u'_{kx}(x, 0) = \Sigma C_{kn}/\Delta\,\sin(n-1)\varphi, \quad u'_{ky}(x, 0) = \Sigma C_{kn}/\Delta\cos(n-1)\varphi$$



Постоянные C_{kn} определяются при помощи формул (10) по методу наименьших квадратов.

Из условий (8) определим давление под штампом

$$P(\rho) = {}^1/_2E\,(1 - \nu^2)^{-1}\rho^{-1}(u_{1x}'(\rho, 0) + u_{2y}'(\rho, 0)) \tag{12}$$

Распределение давлений под штампом с плоским основанием для $a/b = 0{,}3$ $(b = 1)$, построенное по формуле (12) с точностью до множителя ${}^1/_2E\,(1 - \nu^2)^{-1}$ изображено на фигуре. Кривая *1* построена по предлагаемой методике, *2* — по известному методу [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моссаковский В. И., Губенко В. С.* НовI методи розв'язання задачI про тиск кругового штампа на пружний пIвпростIр // Прикл. механIка. 1961. Т. 7. Вип. 1. С. 25—33.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 6.X.1988