

УДК 539.3

С. К. Канаун, Л. Т. Кудрявцева

УПРУГИЕ И ТЕРМОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТОВ, АРМИРОВАННЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ СЛОИСТЫМИ ВОЛОКНАМИ

Рассматриваются композиты, армированные бесконечными однонаправленными цилиндрическими волокнами. Предполагается, что термоупругие характеристики каждого волокна являются функциями расстояния от его оси симметрии. Материал среды и волокон — трансверсально-изотропный с осью изотропии, совпадающей по направлению с осью армирования. Вначале рассматривается задача термоупругости для среды, содержащей изолированное цилиндрически-неоднородное включение, в постоянных внешних полях напряжений и температуры. Для решения этой задачи используется метод, развитый в [1]. В случае цилиндрически-слоистого волокна предлагается эффективный вычислительный алгоритм построения решения.

Для описания взаимодействия между волокнами в композите применяется метод эффективного (самосогласованного) поля [2, 3]. Построены тензоры эффективных модулей упругости и коэффициентов линейного расширения композитов, армированных цилиндрически-слоистыми волокнами. Получены формулы для оценки концентрации микронапряжений на волокнах в композите, приведены результаты некоторых численных расчетов.

1. Изолированное цилиндрическое включение в однородной упругой среде. Пусть в однородной упругой среде с тензором модулей c_0 имеется включение, которое занимает область V , имеющую форму бесконечного кругового цилиндра. Будем считать, что тензор модулей упругости включения $c = c_0 + c_1$ — кусочно-гладкая функция координаты r — расстояния до его оси симметрии. Положение точки x среды будем рассматривать в декартовой (x_1, x_2, x_3) и цилиндрической (r, n, z) системах координат, причем оси x_3 и z направим вдоль оси симметрии включения; n — орт оси r . Если приложенное к среде внешнее поле напряжений σ_0 постоянно, то тензор деформаций $\varepsilon(x)$ в среде с включением не зависит от координаты x_3 (z) и представляется в форме

$$\varepsilon(y) = [I + A(y)] \cdot \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = c_0^{-1} \cdot \sigma_0, \quad y = y(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

где точка означает свертывание тензоров по двум индексам, I — единичный четырехвалентный тензор. Исчезающий при $|y| \rightarrow \infty$ тензор $A(y)$ удовлетворяет интегральному уравнению, которое следует из уравнения для тензора деформаций в среде с неоднородностью [4] и имеет вид

$$A(y) + \int_V K(y - y') \cdot c_1(y') \cdot A(y') dy' = - \int_V K(y - y') \cdot c_1(y') dy' \quad (1.2)$$

Ядро $K(y)$ интегрального оператора K в этом уравнении выражается через вторые производные функции Грина $G(x)$ для однородной трехмерной среды c_0

$$K_{\alpha\beta\lambda\mu}(y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\alpha} \nabla_{(\beta} G_{\lambda)(\mu)}(y, x_3) dx_3$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье $K^*(\xi)$ функции $K(y)$ (символ оператора K) имеет вид

$$\begin{aligned} K^*(\xi) &= K^*(k) \Big|_{k_3=0}, & K_{\alpha\beta\lambda\mu}^*(k) &= k_\alpha k_\beta G_{\lambda(\mu)}^*(k) \\ G^*(k) &= L^{-1}(k), & L^{\alpha\beta}(k) &= k_\lambda c_0^{\lambda\alpha\beta\mu} k_\mu, & \xi &= \xi(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $k(k_1, k_2, k_3)$ — векторный параметр преобразования Фурье, система координат k_1, k_2, k_3 — сопряженная x_1, x_2, x_3 . Из (1.3) видно, что $K^*(\xi)$ — однородная функция нулевой степени по ξ . Решение уравнения (1.2) существует и единственно, если $\det [c_0 + c_1(y)]$ не равен нулю или бесконечности при всех значениях y [4, 5].

2. Специальные тензорные базисы. Для представления тензорных функций, фигурирующих в задаче, удобно ввести три тензорных базиса. Генераторами этих базисов являются единичные векторы e и n (орты осей z и r) и двухвалентный тензор $\theta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta$ — проектор на плоскость θ , ортогональную e ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера).

Начнем с определения P -базиса, состоящего из шести следующих тензоров:

$$\begin{aligned} P_{1\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\lambda(\alpha}\theta_{\beta)(\mu)}, & P_{2\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\alpha\beta}\theta_{\lambda\mu}, & P_{3\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\alpha\beta}e_\lambda e_\mu \\ P_{4\alpha\beta\lambda\mu} &= e_\alpha e_\beta \theta_{\lambda\mu}, & P_{5\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\lambda(\alpha}e_\beta)e_\mu, & P_{6\alpha\beta\lambda\mu} &= e_\alpha e_\beta e_\lambda e_\mu \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тензоры P_i образуют замкнутую алгебру относительно операции умножения — свертки по двум индексам ([6], приложение 4). Базис P_i удобен для представления тензора модулей упругости трансверсально-изотропного тела. В частности, тензор c представляется в форме

$$\begin{aligned} c &= \lambda P_2 + 2\mu P_1 + \tau (P_3 + P_4) + \delta P_5 + \rho P_6 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_3 \Delta} - \frac{E_1}{1 + \nu_{12}} \right), & \mu &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}, & \tau &= \frac{\nu_{13}}{E_3 \Delta} \\ \delta &= 4\mu_3 & \rho &= \frac{1 - \nu_{12}}{E_1 \Delta}, & \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}}{E_1 E_3} - 2 \left(\frac{\nu_{13}}{E_3} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\lambda, \mu, \tau, \delta, \rho$ — скалярные параметры упругости, зависящие от координаты r , связь которых с «техническими» модулями дается приведенными выше равенствами.

Здесь E_1 — модуль Юнга в плоскости поперечного сечения волокна, E_3 — тот же модуль в направлении оси волокна, ν_{12}, ν_{13} — коэффициенты Пуассона, μ_3 — модуль сдвига. Аналогичное (2.2) представление (с параметрами $\lambda_0, \mu_0, \tau_0, \delta_0, \rho_0$) допускает тензор модулей упругости среды c_0 . В случае изотропной среды λ и μ — параметры Ламе, $\tau = \lambda, \delta = 4\mu, \rho = \lambda + \mu$.

Θ -базис образуем из шести тензоров Θ_i , принадлежащих плоскости θ

$$\begin{aligned} \Theta_{1\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\lambda(\alpha}\theta_{\beta)(\mu)}, & \Theta_{2\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\alpha\beta}\theta_{\lambda\mu}, & \Theta_{3\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\alpha\beta}n_\lambda n_\mu \\ \Theta_{4\alpha\beta\lambda\mu} &= n_\alpha n_\beta \theta_{\lambda\mu}, & \Theta_{5\alpha\beta\lambda\mu} &= \theta_{\lambda(\alpha}n_\beta)n_\mu, & \Theta_{6\alpha\beta\lambda\mu} &= n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти тензоры также образуют замкнутую алгебру относительно введенной операции умножения. Заметим, что линейные пространства, натянутые на P - и Θ -базисы, имеют непустое пересечение, так как $\Theta_1 = P_1, \Theta_2 = P_2$.

R -базис составим из следующих пяти тензоров:

$$\begin{aligned} R_{1\alpha\beta\lambda\mu} &= n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu, & R_{2\alpha\beta\lambda\mu} &= e_\alpha e_\beta e_\lambda e_\mu \\ R_{3\alpha\beta\lambda\mu} &= e_\alpha e_\beta n_\lambda n_\mu, & R_{4\alpha\beta\lambda\mu} &= n_\alpha n_\beta e_\lambda e_\mu, & R_{5\alpha\beta\lambda\mu} &= n_{(\alpha} e_\beta) n_{(\lambda} e_{\mu)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что произведение элементов P -, Θ - и R -базисов — линейная комбинация тензоров (2.1), (2.3) и (2.4).

Используя соотношения (1.3) и (2.2), можно показать, что символ $K^*(\xi)$ оператора K в (1.2) представляется в виде

$$K^*(m) = \mu_0^{-1} [\Theta_5(m) - \kappa_0 \Theta_6(m)] + 4\delta_0^{-1} R_5(m, e) \quad (2.5)$$

$$m = \xi / |\xi|, \quad \kappa_0 = (\lambda_0 + \mu_0) / (\lambda_0 + 2\mu_0)$$

3. Решение уравнения (1.2). Для построения решения уравнения (1.2) воспользуемся специальным представлением интегрального оператора K . Преобразование Меллина тензорной функции $f(n, r)$ по переменной r имеет вид

$$f^*(n, s) = \int_0^\infty f(n, r) r^{s-1} dr, \quad f(n, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} f^*(n, s) r^{-s} ds$$

Можно показать, что на кусочно-гладких функциях $f(n, r)$ оператор K допускает представление [7]

$$(Kf)(n, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} r^{-s} (K_s f^*)(n, s) ds \quad (3.1)$$

$$(K_s f^*)(n, s) = -\frac{1}{4\pi^2} \Gamma(2-s) \Gamma(s) \int_{\Omega_1} (-n \cdot m)^{-s} dm \int_{\Omega_1} (l \cdot m)^{s-2} K^*(m) \cdot f^*(l, s) dl \quad (3.2)$$

Здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция, n, m, l — векторы на единичной окружности Ω_1 . Тензор $K^*(m)$ имеет вид (2.5).

Действуя на обе части исходного уравнения (1.2) оператором преобразования Меллина и учитывая (3.1), будем иметь

$$A^*(n, s) + K_s (c_1 \cdot A)^*(n, s) = -(K_1 c_1^*)(n, s) \quad (3.3)$$

Преобразование Меллина $A^*(n, s)$ тензора $A(n, r)$ будем искать в виде разложения по элементам P -, Θ - и R -базисов со скалярными коэффициентами, зависящими от параметра s . Рассмотрим сперва результат действия оператора K_s на эти базисы. Выполняя интегрирование в (3.2), можно показать справедливость соотношений

$$K_s P_1 = \frac{1}{\mu_0(2-s)(4-s)} [T_1^* + (1 - \kappa_0) T_3^*], \quad K_s P_2 = \frac{1 - \kappa_0}{\mu_0(2-s)} T_2^* \quad (3.4)$$

$$K_s P_3 = \frac{1 - \kappa_0}{\mu_0(2-s)} T_4^*, \quad K_s P_4 = K_s P_6 = 0, \quad K_s P_5 = \frac{2}{\delta_0(2-s)} T_5^*$$

Входящие сюда пять тензоров T_i^* имеют вид

$$T_1^* = (4-s)(\Theta_1 - s\Theta_5) - T_3^*, \quad T_2^* = \Theta_2 - s\Theta_4$$

$$T_3^* = \Theta_2 + 2\Theta_1 - s(\Theta_3 + \Theta_4 + 4\Theta_5) + s(2+s)\Theta_6 \quad (3.5)$$

$$T_4^* = P_3 - sR_4, \quad T_5^* = P_5 - sR_5$$

Действие оператора K_s на элементы Θ -базиса выражается через три выписанных здесь тензора T_1^* , T_2^* и T_3^* по формулам

$$K_s \Theta_i = K_s P_i, \quad i = 1, 2, \quad K_s \Theta_3 = \frac{1 - \kappa_0}{\mu_0 s(2-s)(4-s)} [(4-s) T_2^* - (2-s) T_3^*]$$

$$K_s \Theta_4 = \frac{(1 - \kappa_0)(s-1)}{\mu_0 s(2-s)} T_2^*, \quad K_s \Theta_5 = \frac{1}{2\mu_0 s(2-s)(4-s)} [2(1 - \kappa_0)(s-1) T_3^* +$$

$$+ s T_1^*], \quad K_s \Theta_6 = \frac{s-1}{\mu_0 s(4-s^2)(4-s)} \{(1 - \kappa_0)[(4-s) T_2^* + s T_3^*] + 2 T_1^*\} \quad (3.6)$$

И, наконец, действие K_s на элементы R -базиса определяется соотношениями

$$\begin{aligned} K_s R_1 &= K_s \gamma_6, & K_s R_2 &= K_s R_3 = 0 \\ K_s R_4 &= \frac{(1 - \kappa_0)(s-1)}{\mu_0 s(2-s)} T_4^*, & K_s R_5 &= \frac{2(s-1)}{\delta_0 s(2-s)} T_5^* \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обратимся к соотношению (3.3). Поскольку тензор c_1^* под оператором K_s в правой части имеет структуру, аналогичную (2.2) с коэффициентами $\lambda_1^*(s)$, $\mu_1^*(s)$, $\tau_1^*(s)$, $\delta_1^*(s)$, $\rho_1^*(s)$, то вследствие (3.4) правая часть (3.3) есть линейная комбинация тензоров T_i^* вида (3.5). Если теперь тензор $A(n, r)$ искать в виде линейной комбинации элементов P -, Θ - и R -базисов с коэффициентами, зависящими от r , то произведение $c_1 \cdot A$ представляется в виде аналогичного разложения и, следовательно, тензор $K_s(c_1 \cdot A)^*$ будет линейной комбинацией тензоров T_i^* . Поэтому тензор $A^*(n, s)$ естественно искать в виде линейной комбинации не всех элементов P -, Θ - и R -базисов, а лишь пяти тензоров $T_i^*(n, s)$

$$A^*(n, s) = \sum_{i=1}^5 \alpha_i^*(s) T_i^*(n, s) \quad (3.8)$$

Здесь $\alpha_i^*(s)$ — скалярные функции параметра s , r -представления которых — $\alpha_i(r)$. Поскольку множителю $(-s)$ в пространстве преобразований Меллина соответствует оператор $D = rd/dr$ в r -пространстве, из (3.5), (3.8) следует, что

$$A(n, r) = \sum_{i=1}^5 T_i(n, D) \alpha_i(r) \quad (3.9)$$

где дифференциальные операторы $T_i(n, D)$ определяются правыми частями соотношений (3.5), если в них параметр $(-s)$ заменить оператором D .

Для построения пяти скалярных функций $\alpha_i(r)$ подставим выражения (3.8), (3.9) для $A^*(n, s)$ и $A(n, r)$ в (3.3) и воспользуемся формулами (3.4) — (3.7). При этом обе части равенства (3.3) оказываются линейными комбинациями пяти тензоров $T_i^*(n, s)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых тензорах в левой и правой частях полученного равенства, придем к системе соотношений, связывающих функции $\alpha_i^*(s)$. После алгебраических преобразований эти соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \mu_0 s (4 - s^2)(4 - s) \alpha_1^*(s) + S_1^*(s) &= -2s(2 + s) \mu_1^*(s) \\ \mu_0 s (4 - s^2)(4 - s) [\alpha_3^*(s) - (1 - \kappa_0) \alpha_1^*(s)] + S_2^*(s) &= 0 \\ (\lambda_0 + 2\mu_0) s (2 - s) \beta^*(s) + S_3^*(s) &= -2s [\lambda_1^*(s) + \mu_1^*(s)] \\ (\lambda_0 + 2\mu_0) s (2 - s) \alpha_4^*(s) + S_4^*(s) &= -s \tau_1^*(s) \\ \delta_0 s (2 - s) \alpha_5^*(s) + S_5^*(s) &= -2s \delta_1^*(s), \quad \beta = \alpha_2 + (4 + D) \alpha_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $S_i^*(s)$ — скалярные функции s -, r -представления которых имеют вид

$$\begin{aligned} S_1 &= D(2 - D) \mu_1 [(2 + D)^2 \alpha_1 + 4(1 + D) \alpha_3] - 4(1 + D) \mu_1 D(D - 2)(\alpha_3 - \alpha_1) \\ S_2 &= (2 + D) \{ (2 - D) [\lambda_1 D(4 + D) \alpha_3 + \mu_1 (6D \alpha_3 + D^2 \alpha_1 - 2D \alpha_1)] - 2(1 + D) \mu_1 D(D - 2)(\alpha_3 - \alpha_1) \} \\ S_3 &= D [\lambda_1 (2 + D) + 2\mu_1] \beta - 2(1 + D) \mu_1 D \beta \\ S_4 &= D \tau_1 (2 + D) \alpha_4 - 2(1 + D) \mu_1 D \alpha_4 \\ S_5 &= 1/2 [D \delta_1 - (D + 1) \delta_1 D] \alpha_5 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Заменяя в соотношениях (3.10) функции $\alpha_i^*(s)$ и $S_i^*(s)$ их оригиналами (3.11), а множитель $(-s)$ — оператором D , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка для определения функций α_1 и α_3 и дифференциальным уравнениям второго порядка для функций β , α_4 и α_5 .

Если параметры упругости включения — кусочно-гладкие функции r с равными нулю производными при $r = 0$, то граничные условия для определения функций $\alpha_i(r)$ и $\beta(r)$ примут вид

$$\begin{aligned} D\alpha_i = D^2\alpha_i = 0, \quad i = 1, 3; \quad D\alpha_4 = D\alpha_5 = D\beta = 0 \quad (3.12) \\ \text{при } r = 0 \\ \alpha_i, \beta \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad i = 1, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Первая группа этих условий выполняется в силу непрерывности функции $A(n, r)$ при $r = 0$, а вторая — вследствие стремления $A(n, r)$ к нулю на бесконечности.

4. Задача термоупругости. Будем считать, что кроме модулей упругости среда и включение имеют различные коэффициенты линейного расширения — α_0 и α . Для трансверсально-изотропных материалов α_0 и α — двухвалентные тензоры вида (\otimes — тензорное произведение).

$$\alpha_0 = \alpha_{0\theta}\theta + \alpha_{0e}e \otimes e, \quad \alpha(r) = \alpha_\theta(r)\theta + \alpha_e(r)e \otimes e$$

где $\alpha_{0\theta}$ и α_θ — коэффициенты линейного расширения в плоскости, ортогональной оси волокна, α_{0e} , α_e — те же величины в направлении оси волокна. Рассмотрим напряженное состояние среды с цилиндрическим неоднородным включением в постоянном температурном поле t , считая, что при $t = 0$ среда свободна от внутренних напряжений.

Пусть $\sigma_t(y)$ — тензор температурных напряжений, $\varepsilon_t^e = c^{-1} \cdot \sigma_t$ — соответствующая σ_t упругая деформация, $\varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \alpha t$ — полная деформация ($c = c_0$, $\alpha = \alpha_0$ при $y \in V$), $\varepsilon_{t1} = \varepsilon_t - \alpha_0 t$ — возмущение полной деформации, связанное с наличием неоднородности, $\varepsilon_{t1}(y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$.

Можно показать, что тензор $\varepsilon_{t1}(y)$ в среде с бесконечным цилиндрическим включением удовлетворяет следующему интегральному уравнению [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t1}(y) + \int_V K(y - y') \cdot c_1(y') \cdot \varepsilon_{t1}(y') dy' = \\ = \int_V K(y - y') \cdot c(y') \cdot \alpha_1(y') t dy' \quad (\alpha_1 = \alpha - \alpha_0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где ядро $K(y)$ имеет тот же вид, что и в (1.2). В дальнейшем будем считать $t = 1$, поэтому полученные далее выражения для деформаций и напряжений следует умножить на истинное значение температуры t .

Действуя оператором преобразования Меллина на обе части (4.1), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t1}^*(n, s) + \mathbf{K}_s(c_1 \cdot \varepsilon_{t1})^*(n, s) = \mathbf{K}_s(c \cdot \alpha_1)^*(n, s) \quad (4.2) \\ c_1 \cdot \alpha_1 = (2k\alpha_{1\theta} + \tau\alpha_{1e})\theta + (2\tau\alpha_{1\theta} + \rho\alpha_{1e})e \otimes e \quad (k = \lambda + \mu) \end{aligned}$$

Оператор \mathbf{K}_s определен в (3.2), а его действие на тензоры θ , $e \otimes e$ и $n \otimes n$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s\theta = \frac{1 - \kappa_0}{\mu(2 - s)} H(n, s), \quad \mathbf{K}_s(e \otimes e) = 0 \\ \mathbf{K}_s(n \otimes n) = \frac{(1 - \kappa_0)(s - 1)}{\mu_0 s(2 - s)} H(n, s), \quad H(n, s) = \theta - sn \otimes n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти соотношения показывают, что функции $\varepsilon_{t1}^*(n, s)$ и $\varepsilon_{t1}(n, r)$ можно искать в виде

$$\varepsilon_{t1}^*(n, s) = (\theta - sn \otimes n) \beta_t^*(s), \quad \varepsilon_{t1}(n, r) = (\theta + n \otimes \otimes nD) \beta_t(r) \quad (4.4)$$

где $\beta_t^*(s)$ — преобразование Меллина скалярной функции $\beta_t(r)$. Подставляя (4.4) в (4.2), можно убедиться, что левая и правая части (4.2) пропорциональны тензору $H(n, s)$, а приравнивая коэффициенты при этом тензоре слева и справа, получим

$$\begin{aligned} k_0 s (2 - s) \beta_t^*(s) + S_t^*(s) &= \kappa_0 s \gamma^*(s) \\ \gamma(r) &= 2k(r) \alpha_{1\theta}(r) + \tau(r) \alpha_{1e}(r), \quad k_0 = \lambda_0 + \mu_0 \\ S_t(r) &= \kappa_0 [D(2k_1(r) + \lambda_1(r)D) - 2(D+1)\mu_1(r)D] \beta_t(r) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заменяя в (4.5) функции $S_t^*(s)$, $\beta_t^*(s)$, $\gamma^*(s)$ их оригиналами, а множитель $(-s)$ — оператором D , получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для $\beta_t(r)$. Граничные условия для этого уравнения имеют вид, аналогичный (3.12)

$$D\beta_t = 0 \text{ при } r = 0; \quad \beta_t \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

5. Цилиндрически-слоистое включение. Пусть параметры упругости и коэффициенты линейного расширения включения — кусочно-постоянные функции с разрывами в точках $r = a_i$, $i = 1, 2, \dots, N$; $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$. В этом случае включение состоит из ядра и $N - 1$ цилиндрических слоев. В областях постоянства свойств (внутри слоев) дифференциальные уравнения для функций α_j , β и β_t , следующие из (3.10) и (4.5), упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} D(2-D)(2+D)(4+D)\alpha_j &= 0, \quad j = 1, 3; \quad D(2+D)\alpha_j = 0, \\ & \quad j = 4, 5 \\ D(2+D)\beta &= 0, \quad D(2+D)\beta_t = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в интервале $a_{i-1} < r < a_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ ($a_0 = 0$, $a_{N+1} = \infty$) вид функции α_j , β и β_t определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Y_1^i + Y_2^i r^2 + Y_3^i r^{-2} + Y_4^i r^{-4}, \quad \alpha_3 = Y_5^i + Y_6^i r^2 + Y_7^i r^{-2} + Y_8^i r^{-4} \\ \beta &= Y_9^i + Y_{10}^i r^{-2}, \quad \alpha_4 = Y_{11}^i + Y_{12}^i r^{-2}, \quad \alpha_5 = Y_{13}^i + Y_{14}^i r^{-2}, \\ \beta_t &= Y_{15}^i + Y_{16}^i r^{-2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

где Y_j^i — произвольные постоянные. Таким образом, внутри каждого слоя решение задачи определяется с точностью до 16 постоянных.

Рассмотрим скачки производных функций $\alpha_j(r)$, $\beta(r)$ и $\beta_t(r)$ на границах слоев при $r = a_i$. Обозначим $[\varphi]_i$ скачок кусочно-гладкой функции $\varphi(r)$ в точке $r = a_i$

$$[\varphi]_i = \varphi(a_i + 0) - \varphi(a_i - 0), \quad \varphi(a_i \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(a_i \pm \varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

Для функций $\alpha_j(r)$, $\beta(r)$ и $\beta_t(r)$ вида (5.1), используя соотношения (3.10) и (4.5), тем же путем, что и в [1], можно установить справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} [\alpha_j]_i &= 0, \quad j = 1, 3, 4, 5; \quad [\beta]_i = [\beta_t]_i = 0, \quad [D\alpha_j]_i = 0, \quad j = 1, 3 \\ [\mu D^2 \alpha_1]_i &= -2[\mu]_i - 4[\mu \alpha_1]_i - 2[\mu D \alpha_1]_i - 4[\mu \alpha_3]_i - 4[\mu D \alpha_3]_i \\ [\mu D^3 \alpha_1]_i &= 12[\mu]_i + 24[\mu \alpha_1]_i + 16[\mu D \alpha_1]_i + 24[\mu \alpha_3]_i + 12[\mu D \alpha_3]_i \\ [(\lambda + 2\mu)D^2 \alpha_3]_i &= -2[\mu]_i - 4[\mu \alpha_1]_i - 4[\mu D \alpha_1]_i - 4[\mu \alpha_3]_i - \\ & \quad - 2[(2\lambda + 3\mu)D \alpha_3]_i \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
[(\lambda + 2\mu)D^3\alpha_3]_i &= 12 [\mu]_i + 24 [\mu\alpha_1]_i + 12 [\mu D\alpha_1]_i + 24 [\mu\alpha_3]_i + \\
&\quad + 16 [(\lambda + 2\mu) D\alpha_3]_i \\
[(\lambda + 2\mu)D\beta]_i &= -2 [(\lambda + \mu)(1 + \beta)]_i, [\delta D\alpha_5]_i = -[\delta (2 + \alpha_5)]_i \\
[(\lambda + 2\mu)D\alpha_4]_i &= -[\tau]_i - 2 [(\lambda + \mu)\alpha_4]_i, [(\lambda + 2\mu)D\beta_t]_i = \\
&= [\gamma]_i - 2 [(\lambda + \mu) \beta_t]_i \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

Используя соотношения (5.1), (5.2) и граничные условия (3.12), (4.6), можно найти весь массив постоянных Y_j^i , определяющих решение рассматриваемой задачи. Опишем алгоритм вычисления этих постоянных.

Введем $N + 1$ шестнадцатимерных вектора Y^i , компонентами которых являются постоянные Y_j^i , входящие в (5.1), и $N + 1$ векторов $X^i(r)$ с компонентами

$$\begin{aligned}
X_1^i &= \alpha_1, X_2^i = D\alpha_1, X_3^i = D^2\alpha_1, X_4^i = D^3\alpha_1, X_5^i = \alpha_3, \\
X_6^i &= D\alpha_3, X_7^i = D^2\alpha_3, X_8^i = D^3\alpha_3, X_9^i = \beta, X_{10}^i = D\beta, X_{11}^i = \\
&= \alpha_4, X_{12}^i = D\alpha_4, X_{13}^i = \alpha_5, X_{14}^i = D\alpha_5, X_{15}^i = \beta_t, X_{16}^i = D\beta_t \\
\alpha_j &= \alpha_j(r), \beta = \beta(r), \beta_t = \beta_t(r), a_{i-1} < r < a_i, i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Векторы Y^i и X^i связаны соотношениями, которые следуют из (5.1)

$$\begin{aligned}
X^i(r) &= H(r) Y^i, Y^i = H^{-1}(r) X^i(r), \\
H &= \bigoplus^2 h_1 \bigoplus^4 h_2 \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$h_1 = \begin{vmatrix} 1 & r^2 & r^{-2} & r^{-4} \\ 0 & 2r^2 & -2r^{-2} & -4r^{-4} \\ 0 & 4r^2 & 4r^{-2} & 16r^{-4} \\ 0 & 8r^2 & -8r^{-2} & -64r^{-4} \end{vmatrix}, \quad h_2 = \begin{vmatrix} 1 & r^{-2} \\ 0 & -2r^{-2} \end{vmatrix}$$

где \bigoplus^n — прямое (декартово) n -кратное произведение матриц.

Из (5.4) следует, что значение вектора $X^i(r)$ на правом конце i -го интервала ($r = a_i - 0$) выражается через его значение на левом конце ($r = a_{i-1} + 0$) по формулам

$$X^i(a_i) = R^i X^i(a_{i-1}), \quad R^i = H(a_i) H^{-1}(a_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (5.5)$$

В силу (5.2) векторы X^i и X^{i+1} в точке $r = a_i$ на границе i -го и $(i + 1)$ -го слоев связаны соотношениями

$$X^{i+1}(a_i + 0) = F^i + \Gamma^i X^i(a_i - 0) \quad (5.6)$$

где вид матрицы Γ^i и вектора F^i восстанавливаются из (5.2).

Пусть вектор решения в первом слое $X^1(a_1)$ известен. Тогда вектор $X^{i+1}(a_i)$, определяющий решение в $(i + 1)$ -м слое, вычисляется по формулам, которые следуют из (5.5), (5.6)

$$\begin{aligned}
X^{i+1}(a_i) &= g^i + G^i X^1(a_1), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.7) \\
g^1 &= F^1, \quad g^i = F^i + \sum_{j=1}^i \left(\prod_{k=i}^{j+1} Q^k \right) F^j, \quad i \geq 2
\end{aligned}$$

$$G^i = \prod_{k=i}^1 Q^k, \quad Q^k = \Gamma^k R^k$$

Здесь R^1 — единичная матрица, матрицы R^k при $k \geq 2$ определены в (5.5). Для построения вектора $X^1(a_1)$ воспользуемся граничными условиями задачи. Из ограниченности решения при $r = 0$ и стремления его

к нулю на бесконечности следует, что выражения (5.1) для функций α_j , β и β_t в первом интервале ($0 < r < a_1$) не содержат отрицательных степеней r , а на $(N + 1)$ -м интервале ($a_N < r < \infty$) — положительных степеней r , т. е. $Y_j^1 = 0$ при $j = 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 16$; $Y_j^{N+1} = 0$ при $j = 1, 2, 5, 6, 9, 11, 13, 15$. Отсюда тем же путем, что и в [1, 8], можно получить уравнение для определения вектора $X^1(a_1)$

$$BZ = f, X^1(a_1) = MZ \quad (5.8)$$

$$B = LG^N M, \quad f = -Lg^N, \quad m_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M = \bigoplus^2 m_1 \oplus^2 m_2,$$

$$L = \bigoplus^2 l_1 \oplus^4 l_2, \quad l_1 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 1 & 0 \\ -48 & -28 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad l_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Здесь B, M, L — матрицы размером $8 \times 8, 16 \times 8$ и 8×16 соответственно, Z — восьмимерный вектор, G^N и g^N определены в (5.7).

Определив вектор $X^1(a_1)$ из (5.8), затем из (5.7) найдем все векторы $X^{i+1}(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, а из (5.4) — постоянные Y_j^i , которыми определяется решение задачи в каждом интервале $a_{i-1} < r < a_i$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$.

На фиг. 1, 2 представлены графики распределения напряжения σ_{11} вдоль оси x_2 в среде с цилиндрически-неоднородным включением при действии вдоль оси x_1 одноосного напряжения σ_0 . При расчете σ_{11} по предложенной схеме среда и включение предполагались изотропными с одинаковым коэффициентом Пуассона $\nu = 0,4$ и модулем Юнга $E(r)$, изменяющимся по закону

$$E(r) = E_0 \left[1 + \delta \exp\left(\frac{\lambda r^2}{r^2 - 1}\right) \right] \quad \text{при } r < 1, \quad E(r) = E_0 \quad \text{при } r \geq 1 \quad (5.9)$$

При расчете включение разбивалось на N слоев толщиной $1/N$, а модуль Юнга i -го слоя принимался равным $E(i/N)$ и вычислялся по (5.9). При $N > 40$ распределение напряжений не зависело от числа разбиений и соответствовало непрерывному изменению модуля по закону (5.9). Графики на фиг. 1 соответствуют податливому включению ($\delta = -0,99$), а на фиг. 2 — жесткому включению ($\delta = 100$).

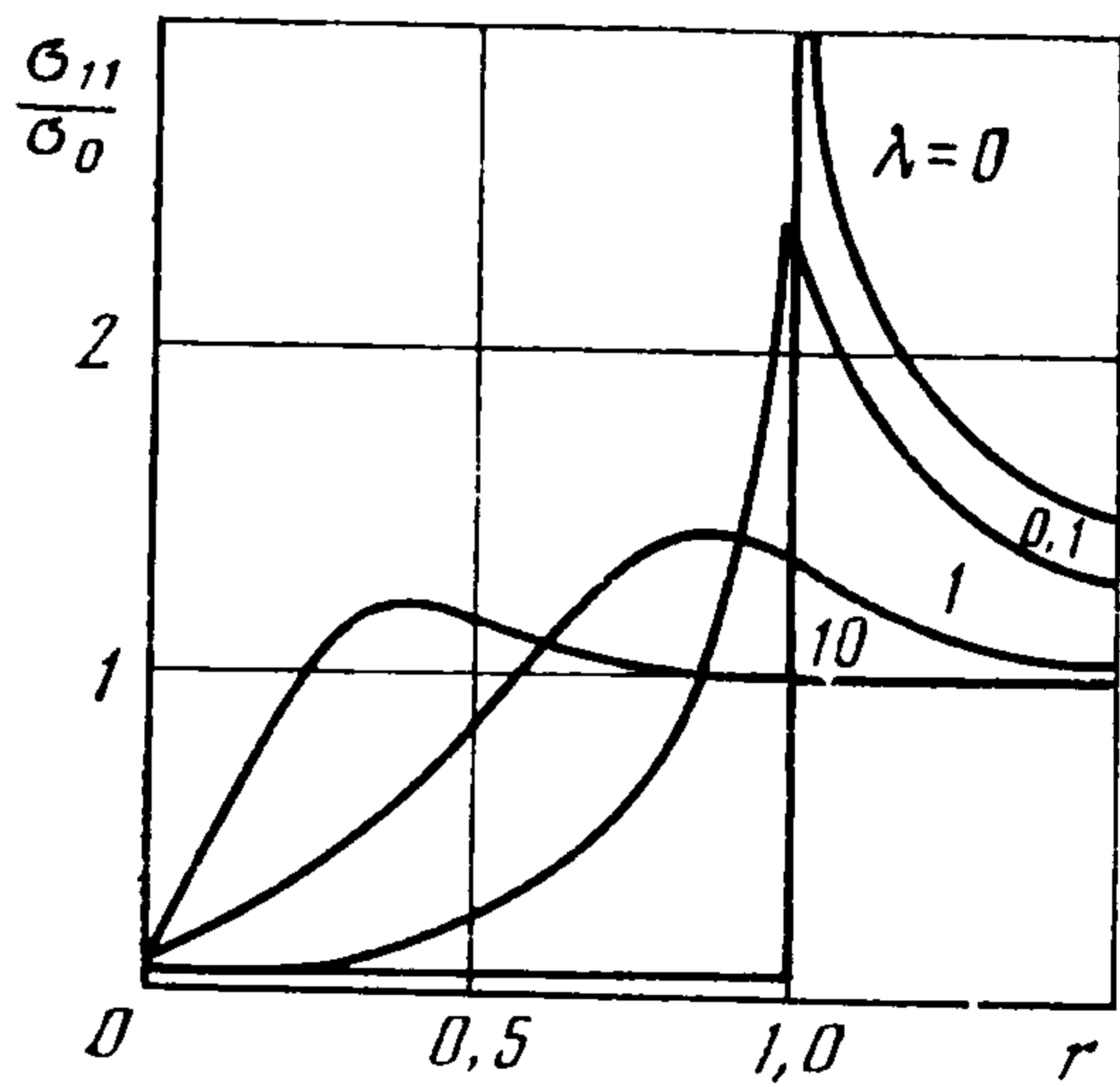
6. Среда с множеством цилиндрически-слоистых волокон. Рассмотрим теперь среду, содержащую множество одинаковых цилиндрически-слоистых включений. Предположим, что все включения имеют одну ориентацию, а их распределение в плоскости поперечного сечения волокон статистически изотропно. Для построения термоупругих характеристик такой среды воспользуемся методом эффективного (самосогласованного) поля, в основе которого лежит решение задачи об изолированном волокне, полученное выше. Схема метода излагалась в работах [1—3, 8] и может быть применена здесь без каких-либо изменений.

Приведем здесь окончательные выражения для тензоров эффективных модулей упругости c_* и коэффициентов линейного расширения α_* композита, полученные указанным методом

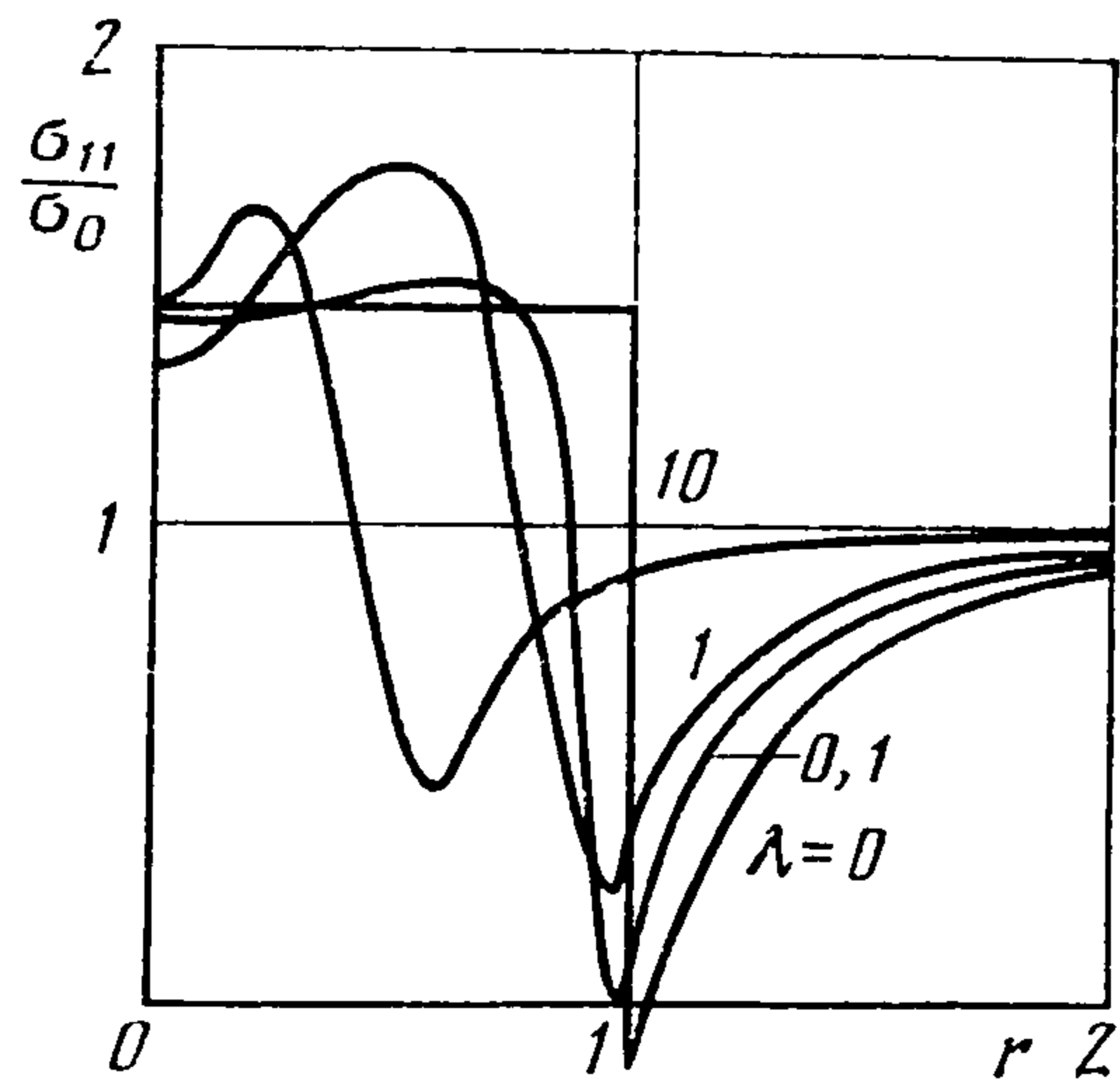
$$c_* = c_0 + \Lambda_s \cdot (I - A_0 \cdot \Lambda_s)^{-1}, \quad \alpha_* = \alpha_0 - (I - D_0 \cdot \Lambda_s)^{-1} \cdot \Lambda_t$$

$$D_0 = c_0 \cdot A_0 \cdot c_0 - c_0, \quad A_0 = b_1 P_2 + b_2 (P_1 - 1/2 P_2) + b_3 P_3 \quad (6.1)$$

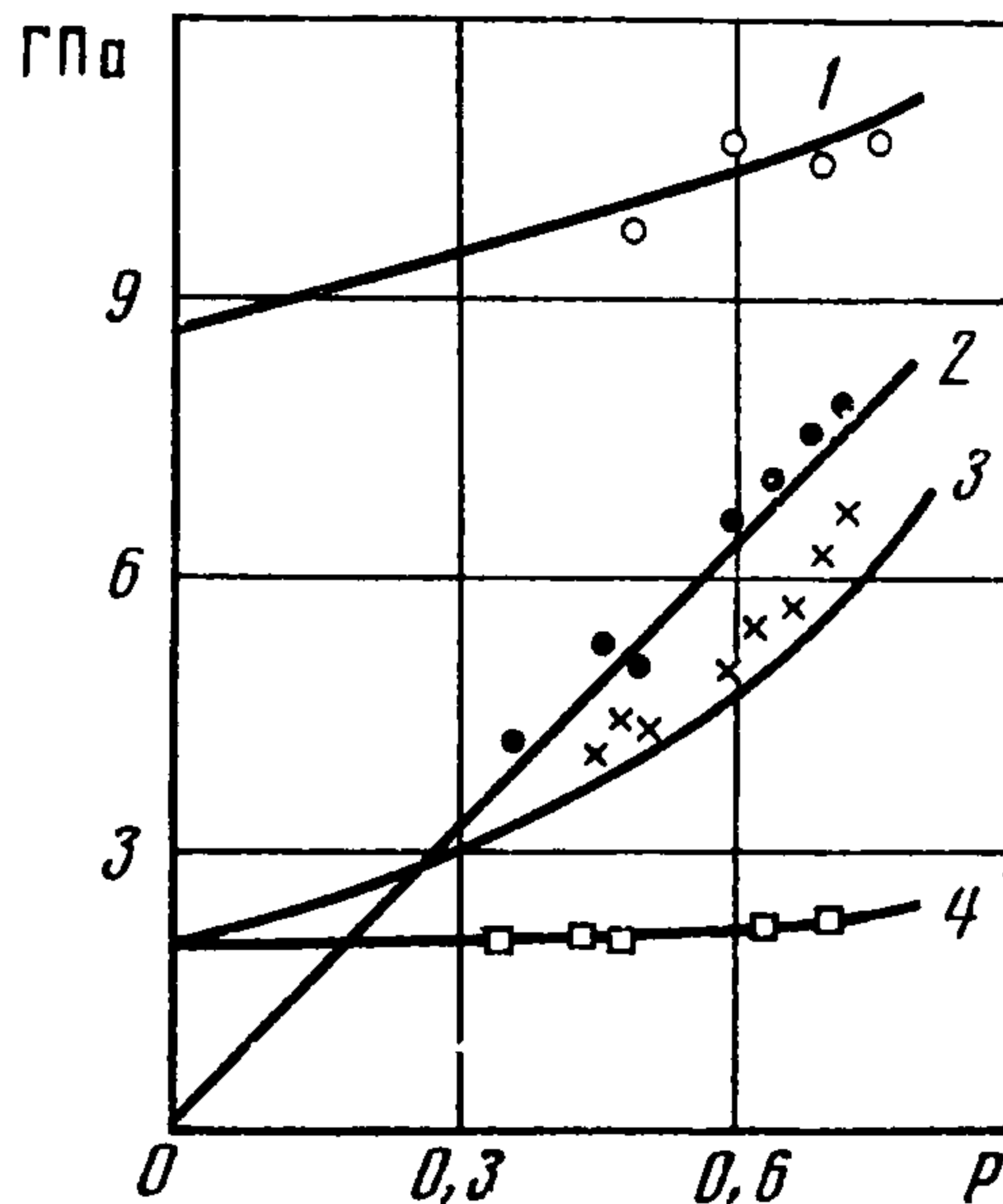
$$b_1 = \frac{1 - \nu_0}{4\mu_0}, \quad b_2 = \frac{2 - \nu_0}{4\mu_0}, \quad b_3 = \frac{2}{\delta_0}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Входящие сюда четырехвалентный Λ_s и двухвалентный Λ_t тензоры выражаются через интегралы по сечению ω произвольного волокна и имеют вид (n_0 — числовая концентрация включений)

$$\Lambda_s = n_0 \int_{\omega} c_1(y) \cdot (I + A(y)) dy, \quad \Lambda_t = n_0 c_0^{-1} \cdot \int_{\omega} [c_1(y) \cdot \varepsilon_{t1}(y) - c(y) \cdot \alpha_1(y)] dy \quad (6.2)$$

где тензоры $A(y)$ и $\varepsilon_{t1}(y)$ определяются соотношениями (3.9), (4.4). Вычисляя эти интегралы, получим (суммирование по i от 1 до N , Y_j^i — постоянные определяющие решение задачи по (5.1))

$$\Lambda_s = q_1 P_2 + q_2 (P_1 - 1/2 P_2) + q_3 (P_3 + P_4) + q_5 P_5 + q_6 P_6 \quad (6.3)$$

$$q_1 = p \sum k_1^i (1 + Y_9^i) \xi_i, \quad k_1^i = k^i - k_0$$

$$q_2 = 2p \sum \mu_1^i [(1 + 2Y_1^i + 2Y_5^i) \xi_i + 3(Y_2^i + Y_6^i)(a_i^2 + a_{i-1}^2) \xi_i]$$

$$q_3 = p \sum \tau_1^i (1 + Y_9^i) \xi_i, \quad q_5 = 1/2 p \sum \delta_1^i (2 + Y_{13}^i) \xi_i$$

$$q_6 = p \sum (\rho_1^i + 2\tau_1^i Y_{11}^i) \xi_i$$

$$\Lambda_t = q_0 \theta + q_e e \otimes e, \quad q_0 = p \sum t_0^i \xi_i, \quad q_e = p \sum t_e^i \xi_i \quad (6.4)$$

$$t_0^i = \frac{\tau_0 \rho_0}{\Delta_0} \left[\left(\frac{\tau_1^i}{\rho_0} - \frac{k_1^i}{\tau_0} \right) Y_{15}^i + \left(\frac{k^i}{\tau_0} - \frac{\tau^i}{\rho_0} \right) \alpha_{10}^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^i}{\tau_0} - \frac{\rho^i}{\rho_0} \right) \alpha_{1e}^i \right]$$

$$t_e^i = \frac{\tau_0 k_0}{\Delta_0} \left[2 \left(\frac{k_1^i}{k_0} - \frac{\tau_1^i}{\tau_0} \right) (Y_{15}^i - \alpha_{10}^i) - \left(\frac{\tau^i}{k_0} - \frac{\rho^i}{\tau_0} \right) \alpha_{1e}^i \right]$$

$$p = \pi n_0 a N^2, \quad \xi_i = (a_i^2 - a_{i-1}^2) / a N^2, \quad \Delta_0 = k_0 \rho_0 - \tau_0^2$$

Подставляя (6.3) в (6.1), найдем

$$c_* = k_* P_2 + 2\mu_* \left(P_1 - \frac{1}{2} P_2 \right) + \tau_* (P_3 + P_4) + \delta_* P_5 + \rho_* P_6 \quad (6.5)$$

$$k_* = k_0 + \frac{q_1}{1 - 4b_1q_1}, \quad \mu_* = \mu_0 + \frac{1}{2} \frac{q_2}{1 - b_2q_2}, \quad \tau_* = \tau_0 + \frac{q_3}{1 - 4b_1q_1}$$

$$\delta_* = \delta_0 + \frac{4q_5}{4 - b_5q_5}, \quad \rho_* = \rho_0 + q_6 + \frac{4b_1q_3^2}{1 - 4b_1q_1}$$

Из (6.3), (6.4) и (6.1) можно получить выражения для коэффициентов линейного расширения композита α_{*0} и α_{*e} . При $N = 1$ и изотропных матрице и включениях эти выражения для c_* и α_* совпадают с полученными в [2].

Характер погрешности используемого метода осреднения обсуждался в [2, 9]. Отмечалось, что для материалов типа стеклопластиков относительная ошибка в вычислении c_* и α_* по формулам, аналогичным (6.1), не превышает 10...15% вплоть до концентрации волокон, близкой к плотной упаковке. На фиг. 3 представлено сравнение рассчитанных по (6.5) значений эффективных параметров упругости волокнистого композита с результатами экспериментов [10]. В [10] исследовались композиты с изотропной матрицей из эпоксидной смолы ($E_0 = 5,27$ ГПа, $\nu_0 = 0,3$) и трансверсально-изотропных углеродных волокон ($E_1 = 8$ ГПа, $E_3 = 410,6$ ГПа, $\nu_{12} = 0,568$, $\nu_{13} = 0,277$, $\mu_3 = 10,2$ ГПа). Кривые 1—4 соответствуют расчетным зависимостям параметров $\lambda_* + 2\mu_*$, $\rho_*/40$, $\delta_*/4$, μ_* от концентрации волокон p ; экспериментальные значения показаны светлыми и темными точками, крестиками и квадратами.

В заключение заметим, что метод эффективного поля позволяет оценить концентрацию микронапряжений на отдельных волокнах в композите по известной схеме [11]. Тензор напряжений в окрестности типичного волокна при действии внешнего поля σ_0 вычисляется по формуле

$$\sigma(y) = c(y) \cdot (I + A(y)) \cdot \varepsilon_{*s}, \quad \varepsilon_{*s} = [I - \Lambda_s \cdot (A_0 - I)]^{-1} \cdot \varepsilon_0$$

а при нагревании (охлаждении) композита до температуры t имеет

$$\sigma(y) = c(y) \cdot [\varepsilon_{t1}(y) - \alpha_1(y) + (I + A(y)) \cdot \varepsilon_{*t}] t$$

$$\varepsilon_{*t} = (I - D_0 \cdot \Lambda_s)^{-1} \cdot D_0 \cdot c_0^{-1} \cdot \Lambda_t$$

Здесь ε_{*s} и ε_{*t} — эффективные внешние поля деформаций, в которых находится типичное включение. Введением этих полей учитывается взаимодействие между волокнами в композите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канаун С. К., Кудрявцева Л. Т. Сферически-слоистые включения в однородной упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 633—643.
2. Левин В. М. К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 137—145.
3. Канаун С. К. // Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 655—665.
4. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Эллипсоидная неоднородность в упругой среде // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 3. С. 571—575.
5. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
6. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
7. Пламеневский Б. А. Об ограниченности сингулярных интегралов в пространствах с весом // Мат. сб. 1968. Т. 6. № 4. С. 573—592.
8. Канаун С. К., Кудрявцева Л. Т. Температурные напряжения в композитах со сферически-слоистыми включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 113—121.
9. Кочетков Е. П., Леонтьев Н. В., Угодчиков М. А. Эффективные термоупругие характеристики регулярных волокнистых композитов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ. 1985. Вып. 29. С. 66—72.
10. Dean G. D., Lockett F. J. Determination of the mechanical properties of fiber composites by ultrasonic techniques // Analysis of the test methods for high modulus fibers and composites. Amer. Soc. for Testing and Materials. STP No 521. 1973. P. 326—346.
11. Левин В. М. О концентрации напряжений на включениях в композитных материалах // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 735—743.