Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.3

В. В. Зозуля

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА О ТЕРМОУПРУГОМ КОНТАКТЕ ПЛАСТИН ЧЕРЕЗ ТЕПЛОПРОВОДНЫЙ СЛОЙ

Формулируется задача о контакте двух пластин при действии силового и температурного поля. Учитывается, что при деформациях пластин изменяются условия теплообмена между ними. Уравнения движения и теплопроводности термоупругих пластин, а также уравнения теплопроводности теплопроводного слоя выводятся путем разложения трехмерных уравнений в ряды по полиномам Лежандра. Строятся уравнения n-го приближения. Более подробно рассматриваются уравнения первого приближения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим две пластины (*1* и *2*) произвольного очертания постоянной толщины h_1 и h_2 соответственно, которые в начальном недеформированном состоянии располагаются на расстоянии h_0 одна от другой. Будем считать, что h_0 соизмеримо с прогибами пластин, которые предполагаем малыми. Между пластинами заключена теплопроводная среда, не сопротивляющаяся их деформациям, а теплообмен в ней происходит за счет теплопроводности. Пусть Ω_γ $(\gamma = 1, 2)$ — области, занятые срединными поверхностями пластин, $\partial\Omega_\gamma$ — их границы, Ω_γ^+ и Ω_γ^- — верхние и нижние лицевые поверхности, а Γ_γ — торцовые поверхности.

Термодинамическое состояние системы, включающей в себя пластины и теплопроводный слой, определяется следующими параметрами: $\sigma_{ij(\gamma)}(x_k, t)$, $\varepsilon_{ij(\gamma)}(x_k, t)$, $u_{i(\gamma)}(x_k, t)$ $(i, j, k = 1, 2, 3;\ \gamma = 1, 2)$ — компонентами тензоров напряжений, деформаций и векторов перемещений пластин; $T_\gamma(x_k, t)$, $\chi_\gamma(x_k, t)$, $T_*(x_k, t)$, $\chi_*(x_k, t)$ — температурой и удельной мощностью внутренних источников тепла соответственно в пластинах и слое. На лицевых поверхностях Ω_γ^+ и Ω_γ^- заданы граничные условия в напряжениях и условия теплообмена с внешней средой и теплопроводным слоем. Граничные условия на торцах складываются из механических и тепловых и зависят от способа их закрепления и условий теплообмена. В начальный момент $t = 0$ известно распределение перемещений, скоростей и температуры в пластинах и слое.

Под действием внешних сил и температурных полей пластины изгибаются в направлении одна к другой и могут вступить в контакт. При этом образуется заранее неизвестная зона плотного контакта $\Omega_e(t) = \Omega_1^- \cap \Omega_2^+$, изменяющаяся во времени, в которой возникают контактные силы взаимодействия $q_i(x_\alpha, t)$ $(i = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2)$ и происходит контактный теплообмен. Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния и температурных полей в пластинах, области плотного контакта $\Omega_e(t)$ и контактных сил взаимодействия $q_i(x_\alpha, t)$.

2. Уравнения, описывающие термодинамическое состояние системы. При рассмотрении термоупругого состояния пластин исходим из связанных уравнений термоупругости [1]

$$\mu\Delta u_{i(\gamma)} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{u}_{(\gamma)} = \rho\frac{\partial^2 u_{i(\gamma)}}{\partial t^2} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\frac{\partial(T_\gamma - T_{0(\gamma)})}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

$$\Delta T_\gamma + \frac{\chi_\gamma}{\lambda_T} = \frac{1}{a}\frac{\partial T_\gamma}{\partial t} + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_{0(\gamma)}}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{u}_{(\gamma)} \tag{2.2}$$

$$\left(\operatorname{div}\mathbf{u}_{(\gamma)} = \frac{\partial u_{1(\gamma)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2(\gamma)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{3(\gamma)}}{\partial x_3}\right)$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа, λ и μ — коэффициенты Ламе, ρ — плотность материала пластин, α_T, λ_T и a — соответственно коэффициенты линейного температурного расширения, теплопроводности и и температуропроводности, $T_{0(\gamma)}$ — начальное, соответствующее недеформированному состоянию пластин, распределение температур. Предполагаем, что механические и тепловые свойства пластин одинаковы.

В этом разделе все термодинамические параметры зависят от четырех переменных: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, t, которые для сокращения записи опущены. Дальше будем использовать те же сокращения.

Распределение температуры в слое описывается уравнением теплопроводности

$$\Delta T_* + \chi_*/\lambda_* = a_*^{-1}\partial T_*/\partial t \tag{2.3}$$

где λ_* и a_* — соответственно коэффициенты тепло- и температуропроводности.

Механические граничные условия на лицевых поверхностях пластин запишем в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{i3(1)} = \sigma_{i3}^+, \quad \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_1^+, \quad \sigma_{i3(2)} = \sigma_{i3}^-, \quad \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_2^- \\ \sigma_{i3(1)} = \begin{cases} 0, & \forall(\mathbf{x}) \notin \Omega_e(t), \\ -q_i, & \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_e(t), \end{cases} \quad \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_1^- \\ \sigma_{i3(2)} = \begin{cases} 0, & \forall(\mathbf{x}) \notin \Omega_e(t), \\ -q_i, & \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_e(t), \end{cases} \quad \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_2^+ \end{gathered} \tag{2.4}$$

На торцах

$$u_{1(\gamma)} = u_{2(\gamma)} = u_{3(\gamma)} = 0, \ \forall(\mathbf{x}) \in \Gamma_\gamma \quad (\gamma = 1, 2) \tag{2.5}$$

Тепловые граничные условия на внешних поверхностях

$$T_1 = T_1^+, \ \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_1^+, \ T_2 = T_2^-, \ \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_2^- \tag{2.6}$$

На торцах

$$\begin{gathered}\lambda_T\partial T_\gamma/\partial h + \alpha(T_\gamma - T) = 0, \ \forall(\mathbf{x}) \in \Gamma_\gamma \\ \lambda_*\partial T_*/\partial h + \alpha_*(T_* - T) = 0, \ \forall(\mathbf{x}) \in \Gamma_* \end{gathered} \tag{2.7}$$

где T — температура окружающей среды, α и α_* — коэффициенты теплопередачи пластин и слоя.

Случай других механических и тепловых граничных условий рассматривается аналогично.

Будем предполагать, что на границах раздела между теплопроводным слоем и пластинами происходит идеальный контактный теплообмен.

$$\begin{gathered}T_1 = T_*, \ -\lambda_T\partial T_1/\partial h = \lambda_*\partial T_*/\partial h, \quad \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_1 \\ T_2 = T_*, \ \lambda_T dT_2/\partial h = -\lambda_*\partial T_*/\partial h, \quad \forall(\mathbf{x}) \in \Omega_2^+ \end{gathered} \tag{2.8}$$

Начальные условия при $t = 0$ запишем в виде

$$\begin{gathered}u_{i(\gamma)} = f_{i(\gamma)}, \quad \partial u_{i(\gamma)}/\partial t = q_{i(\gamma)} \quad (i = 1, 2, 3; \ \gamma = 1, 2) \\ T_\gamma = T_\gamma^\circ, \quad T_* = T_*^\circ \end{gathered} \tag{2.9}$$

На нормальные перемещения точек поверхностей Ω_1^- и Ω_2^+ накладываются дополнительные ограничения

$$u_{3(2)} - u_{3(1)} \leqslant h_0 \tag{2.10}$$

Предполагаем, что поверхности Ω_1^- и Ω_2^+ шероховаты. Поэтому если пластины в процессе деформирования соприкасаются и образуется область $\Omega_e(t)$, то между ними происходит контакт с трением. При такой постановке приходим к аналогу задачи Синьорини с трением [2]. В области плотного контакта $\Omega_e(t)$ механические параметры должны удовлетворять дополнительным условиям (f — коэффициент трения в зоне контакта)

$$\begin{gathered}\forall (x) \in \Omega_e(t),\ u_{3(2)} - u_{3(1)} = h \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{33(1)} = \sigma_{33(2)} - q_3 \\ |\sigma_{\beta 3(\gamma)}| < f\,|q_3| \Rightarrow u_{\alpha(1)} = u_{\alpha(2)}\ (\alpha,\ \beta, \gamma = 1, 2)\end{gathered} \tag{2.11}$$

Тепловые условия в области контакта запишем в виде

$$q = \alpha_c (T_2 - T_1),\ \forall (\mathrm{x}) \in \Omega_e(t) \tag{2.12}$$

где q — тепловой поток, проходящий через поверхность контакта, α_c — тепловая проводимость контакта.

Анализ поставленной задачи связан с большими математическими трудностями, вызванными как размерностью задачи, так и ее нелинейностью, обусловленной условиями контакта (2.10), (2.11). Частично задача может быть упрощена, если воспользоваться тем, что рассматриваемые тела — пластины, а зазор между ними мал. Разложим термодинамические параметры, описывающие состояние системы, в ряды по полиномам Лежандра $P_k(\omega)$ вдоль координаты x_3 и составим уравнения рассматриваемой задачи относительно коэффициентов этого разложения. В результате получим систему уравнений, зависящую только от двух пространственных координат.

3. Редукция трехмерных уравнений, описывающих термодинамическое состояние пластин и слоя, к двумерным. Введем декартову систему координат с началом в срединной поверхности недеформированного теплопроводного слоя. Оси x_1 и x_2 расположим в срединной плоскости, а x_3 — перпендикулярно ей. Аргументы при полиномах Лежандра ω_i и ω_* должны изменяться в пределах от -1 до 1. Для этого они должны быть связаны с x_3 зависимостями

$$\begin{gathered}\omega_1 = (2x_3 - h_0 - h_1)/h_1,\ x_3 \in [h_0/2,\ h_1^+],\ h_1^+ = h_0/2 + h_1 \\ \omega_2 = (2x_3 + h_0 + h_2)/h_2,\ x_3 \in [h_2^-, h_0/2],\ h_2^- = -h_0/2 - h_2 \\ \omega_* = (2x_3 - h_*)/h,\ x_3 \in [h^-,\ h^+],\ h^+ = h_0/2 - \overset{-}{u}_{3(1)} \\ h^- = -h_0/2 + \overset{+}{u}_{3(2)},\ h = h^+ - h^-,\ h_* = h^+ + h^-\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\overset{-}{u}_{3(1)}$ и $\overset{+}{u}_{3(2)}$ — нормальные составляющие векторов перемещений точек пластин, расположенных соответственно на поверхностях Ω_1^- и Ω_2^+.

Умножив уравнения (2.1) на $(2k+1)h_\gamma^{-1}P_k(\omega_\gamma)$ $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$ и проинтегрировав по x_3 для пластины 1 от $h_0/2$ до h_1^+, для пластины 2 от h_2^- до $-h_0/2$, после преобразования получим:

$$\Delta_2 u^k_{\alpha(\gamma)} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u^k_{1(\gamma)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^k_{2(\gamma)}}{\partial x_2} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{2k+1}{h_\gamma}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial u^{k+1}_{3(\gamma)}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u^{k+3}_{3(\gamma)}}{\partial x_\alpha} + \ldots\right) - \frac{2k+1}{h_\gamma}\left[\frac{\partial u^{k-1}_{3(\gamma)}}{\partial x_\alpha} + \right.\right.$$

$$+\frac{\partial u_{3(\gamma)}^{k-3}}{\partial x_\alpha}+\ldots+\frac{2k-1}{h_\gamma}\left(u_{\alpha(\gamma)}^{k}+u_{\alpha(\gamma)}^{k+2}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{2k-5}{h_\gamma}\left(u_{\alpha(\gamma)}^{k-2}+u_{\alpha(\gamma)}^{k}+u_{\alpha(\gamma)}^{k+2}+\ldots\right)+\ldots\Big]+$$

$$+\frac{2k+1}{2\mu h_\gamma}\Phi_{\alpha(\gamma)}-\frac{3\lambda+2\mu}{\mu}\alpha_T\frac{\partial T_\gamma{}^k-T_{0(\gamma)}^k}{\partial x_\alpha}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 u_{\alpha(\gamma)}^k}{\partial t^2}\qquad(\alpha=1,2)\qquad(3.2)$$

$$\Delta_2 u_{3(\gamma)}^k+\frac{2k+1}{h_\gamma}\left(\frac{\partial u_{1(\gamma)}^{k+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{1(\gamma)}^{k+3}}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial u_{2(\gamma)}^{k+1}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{2(\gamma)}^{k+3}}{\partial x_2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{2k+1}{\mu h_\gamma}\left[\lambda\left(\frac{\partial u_{1(\gamma)}^{k-1}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{2(\gamma)}^{k-1}}{\partial x_2}\right)+\lambda\left(\frac{\partial u_{1(\gamma)}^{k-3}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{2(\gamma)}^{k-3}}{\partial x_2}\right)+\ldots\right.$$

$$\ldots+(\lambda+2\mu)\frac{2k-1}{h_\gamma}\left(u_{3(\gamma)}^k+u_{3(\gamma)}^{k+2}+\ldots\right)+(\lambda+2\mu)\frac{2k-5}{h_\gamma}\left(u_{3(\gamma)}^{k-2}+u_{3(\gamma)}^{k}+\right.$$

$$\left.+u_{3(\gamma)}^{k+2}+\ldots)+\ldots\right]+\frac{2k+1}{2\mu h_\gamma}\Phi_{3(\gamma)}-(3\lambda+2\mu)\alpha_T\left(T_\gamma^{k-1}+T_\gamma^{k-3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-T_{0(\gamma)}^{k-1}-T_{0(\gamma)}^{k-3}-\ldots\right)=\rho\frac{\partial^2 u_{3(\gamma)}^k}{\partial t^2}$$

$$\Phi_{i(1)}=\sigma_{i3}{}^{+}+(-1)^k q_i,\qquad-\Phi_{i(2)}=q_i+(-1)^k\sigma_{i3}{}^{-}$$

где Δ_2 — двухмерный оператор Лапласа, $u_{i(\gamma)}^k$ и $T_\gamma{}^k$ — коэффициент разложения компонент векторов перемещений и температуры пластин в ряды по полиномам Лежандра.

Преобразованные таким образом уравнения теплопроводности (2.2) имеют вид

$$\Delta_2 T_\gamma{}^k-\frac{2k+1}{2h_\gamma}\left(Q_\gamma^{k-1}+Q_\gamma^{k-3}+\ldots\right)+\frac{\chi_\gamma{}^k}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial T_\gamma{}^k}{\partial t}+$$

$$+\frac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda}\alpha_T T_{0\gamma}^k\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u_{1(\gamma)}^k}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{2(\gamma)}^k}{\partial x_2}\frac{2k+1}{h_\gamma}\left(u_{3(\gamma)}^{k+1}+u_{3(\gamma)}^{k+3}+\ldots\right)\right]\qquad(3.3)$$

Здесь Q_γ, $Q_\gamma{}^+$, $Q_\gamma{}^-$ и $Q_\gamma{}^k$ — соответственно производная от температуры по x_3, ее значения на поверхностях $\Omega_\gamma{}^+$ и $\Omega_\gamma{}^-$, каждый член разложежения ее в ряд по полиномам Лежандра.

Функции $Q_\gamma{}^+$, $Q_\gamma{}^-$ и $Q_\gamma{}^k$ определяются из условий теплообмена на лицевых поверхностях пластин и рекуррентных соотношений

$$\frac{Q_\gamma^{k-1}}{2k-1}-\frac{Q_\gamma^{k+1}}{2k+3}=\frac{1}{h_\gamma}T_\gamma{}^k\qquad(3.4)$$

При составлении двухмерных уравнений теплопроводности для слоя учтем, что его толщина изменяется при деформациях пластин. Умножим уравнение (2.3) на $(2k+1)\,h^{-1}P_k\,(\omega_*)$ $(k=1,2,\ldots)$ и проинтегрируем по x_3 от h^- до h^+. После преобразования с учетом зависимости h^- и h^+ от x_α и t $(\alpha=1,2)$ [3] получим уравнения теплопроводности в виде

$$\Delta_2 T_*{}^k+T_{*1}^k\Delta_* h+T_{*2}^k\Delta_* h_*+\frac{1}{h}\left(\nabla_2 T_{*1}^k\nabla_2 h+\nabla_2 T_{*2}^k\nabla_2 h_*\right)+$$

$$+\frac{2k+1}{2}\left[T_*{}^+\Delta_* h^++(-1)^k\,T_*{}^-\Delta_* h^-\right]+\frac{1}{h}\left(\nabla_2 h\mathrm{Q}_1{}^k+\nabla_2 h_*\mathrm{Q}_2{}^k\right)+$$

$$+\frac{2k+1}{2h}\left[Q_*{}^+-(-1)^k Q_*{}^-\right]+\frac{2k+1}{2h}\left(Q_*^{k-1}+Q_*^{k-3}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{\chi_*{}^k}{\lambda_*}=\frac{1}{a}\left\{\frac{\partial T_*{}^k}{\partial t}+\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial t}T_{*1}^k+\frac{1}{h}\frac{\partial h_*}{\partial t}T_{*2}^k-\right.\qquad(3.5)$$

$$\left.-\frac{2k+1}{2h}\left[\frac{\partial h^+}{\partial t}T_*{}^+-(-1)^k\frac{\partial h^-}{\partial t}T_*{}^-\right]\right\}$$

$$T_{*1}^k=(k+1)\,T_*{}^k+(2k+1)\left(T_*^{k-2}+T_*^{k-4}+\ldots\right),$$

$$T_{*2}^{k} = (2k+1)(T_*^{k-1} - T_*^{k-3} + \ldots)$$

$$Q_{11}{}^k = (k+1)\left\{\frac{\partial T_*{}^k}{\partial x_1} - \frac{2k+1}{2h} F(T_*{}^+, T_*{}^-) + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1} T_{*1}^k + \right.$$

$$+ \left.\frac{1}{h}\frac{\partial h_*}{\partial x_1} T_{*2}^k\right\} + (2k+1)\frac{\partial T_*^{k-2}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_*^{k-4}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1}[(k-1)T_*^{k-2} +$$

$$+ (3k-6)T_*^{k-4} + \ldots] + \frac{1}{h}\frac{\partial h_*}{\partial x_1}[(2k-3)T_*^{k-3} + (4k-10)T_*^{k-5} + \ldots] -$$

$$- \left.\left(\frac{2k-3}{2} + \frac{2k-7}{2} + \ldots\right)\frac{1}{h} F(T_*{}^+, T_*{}^-)\right\}$$

$$Q_{12}{}^k = (2k+1)\left\{\frac{\partial T_*^{k-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_*^{k-3}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_1}[kT_*^{k-1} + \right.$$

$$+ (3k-3)T_*^{k-3} + \ldots]\frac{1}{h}\frac{\partial h_*}{\partial x_1}[(2k-1)T_*^{k-2} + (4k-6)T_*^{k-4} + \ldots] -$$

$$- \left.\left(\frac{2k-1}{2} + \frac{2k-5}{2} + \ldots\right)\frac{1}{h} F(T_*{}^+, T_*{}^-)\right\}$$

$$\Delta_* = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\mathbf{Q}_2{}^k = (Q_{21}{}^k, Q_{22}{}^k)$$

$$\mathbf{Q}_1{}^k = (Q_{11}{}^k, Q_{12}{}^k), \quad F(T_*{}^+, T_*{}^-) = \frac{\partial h^+}{\partial x_1} T_*{}^+ - (-1)^k \frac{\partial h^-}{\partial x_1} T_*{}^-$$

Формулы для $Q_{21}{}^k$ и $Q_{22}{}^k$ совпадают с формулами для $Q_{12}{}^k$ и $Q_{11}{}^k$, если в последних заменить частные производные по x_1 производными по x_2.

Для функций $Q_*{}^k$ имеют место рекуррентные соотношения, аналогичные (3.4), а значения $T_*{}^+$, $T_*{}^-$, $Q_*{}^+$ и $Q_*{}^-$ определяются из условий теплообмена с пластинами.

Термодинамические параметры в (3.2) и (3.3) зависят только от трех переменных (x_1, x_2), t.

4. Приведение граничных и контактных условий к двухмерным. Уравнения (3.2), (3.3) и (3.5) взаимосвязаны, причем их взаимосвязанность обусловлена как структурой уравнений, так и условиями теплообмена между пластинами и слоем и условиями контакта пластин.

Приведем в соответствие с двумерными уравнениями термоупругости и теплопроводности пластин и слоя начальные, граничные и контактные условия. Для этого механические и тепловые условия на торцах (2.5), (2.7) и начальные условия (2.9) разложим в ряды по полиномам Лежандра и запишем их относительно коэффициентов разложения.

Предположим, что под действием внешней нагрузки и температурного поля пластины движутся так, что ни в одной точке не вступают в контакт между собой, т. е. $\Omega_e(t) = 0$. Тепловые условия на внешних поверхностях пластин (2.6) и условия их теплообмена с теплопроводным слоем (2.8) представим в виде (здесь и далее суммирование от $k = 0$ до $k = \infty$)

$$\Sigma T_1{}^k = T_1{}^+, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_1{}^+, \quad \Sigma(-1)^k T_2{}^k = T_2{}^-, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_2{}^-$$

$$\Sigma(-1)^k T_1{}^k = \Sigma T_*{}^k, \quad \lambda\Sigma(-1)^{k+1} Q_1{}^k = \lambda_*\Sigma Q_*{}^k, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_1{}^- \tag{4.1}$$

$$\Sigma(-1)^k T_*{}^k = \Sigma T_2{}^k, \quad \lambda_*\Sigma(-1)^{k+1} Q_*{}^k = \lambda\Sigma Q_2{}^k, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_2{}^+$$

Из этих условий и рекуррентных соотношений (3.4) находим функции $Q_\gamma{}^+$, $Q_\gamma{}^-$, $Q_\gamma{}^k$, $T_*{}^+$, $T_*{}^-$, $Q_*{}^+$, $Q_*{}^-$ и $Q_*{}^k$, которые входят в уравнения (3.3) и (3.5). Таким образом, построена взаимосвязанная система квазилинейных уравнений, описывающих термоупругое состояние пластин, теплообмен между которыми происходит через теплопроводный слой при отсутствии между ними контакта.

Если в процессе движения пластины вступают в контакт и появляется область $\Omega_e(t)$, то между ними возникают контактные силы взаимодействия q_i. При этом в областях Ω_γ/Ω_e термодинамическое состояние системы описывается уравнениями (3.2), (3.3) и (3.5), а в Ω_e — своей системой уравнений, которая значительно проще (3.2), (3.3) и (3.5). Это связано с тем, что здесь теплообмен происходит непосредственно между пластинами через поверхности Ω_1^- и Ω_2^+, а значит, потребность в уравнениях (3.5) отпадает.

Задача заключается в решении системы уравнений (3.2), (3.3), определении области контакта $\Omega_e(t)$ и сил взаимодействия пластин q_i в ней при выполнении ограничений (2.11), которые преобразуем следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall (x_1, x_2) \in \Omega_e, \quad \Sigma u^k_{3(2)} - \Sigma(-1)^k u^k_{3(1)} = h_0 \Rightarrow \Sigma \overset{*}{\sigma}{}^k_{33(2)} = \Sigma(-1)^k \sigma^k_{33(1)} = -q_3 \\ |\Sigma \sigma^k_{\beta 3(2)}| < f|q_3|, \quad |\Sigma(-1)^k \sigma^k_{\beta 3(1)}| < f|q_3| \Rightarrow \\ \Rightarrow \Sigma(-1)^k u^k_{\alpha(1)} = \Sigma u^k_{\alpha(2)} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Заметим, что при наличии области плотного контакта Ω_e поставленная задача значительно усложняется. Это связано с тем, что в областях, свободных от контакта (Ω_γ/Ω_e), остается справедливой связанная квазилинейная система (3.2), (3.3) и (3.5), а в области Ω_e — система уравнений (3.2), (3.3) с ограничениями (4.2) и неизвестными Ω_e и q_i. Задача заключается в решении каждой системы уравнений и стыковке полученных решений на $\partial\Omega_e$.

5. **Построение приближений.** Система уравнений (3.2), (3.3) и (3.5) имеет то преимущество, что входящие в нее функции зависят от двух пространственных координат. Однако она содержит бесконечное число уравнений. При выполнении практических расчетов используют редукцию. Для этого в разложении термодинамических параметров в ряды по полиномам Лежандра ограничиваются конечным числом членов. Уравнения n-го приближения получим, если в (3.2)—(3.5), (4.1) и (4.2) индекс k будет изменяться от 0 до n.

Рассмотрим более подробно уравнения первого приближения. Уравнения теплопроводности пластин (3.3) при учете условий (4.1) запишем в виде

$$\begin{gathered}\Delta_2 T_\gamma{}^\circ + \frac{3}{2h_\gamma^2} F_\gamma{}^\circ + \frac{\chi_\gamma{}^\circ}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T_\gamma{}^\circ}{\partial t} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda}\alpha_T T^\circ_{0(\gamma)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_{1(\gamma)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_{2(\gamma)}}{\partial x_2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_\gamma} u^1_{3(\gamma)}\right) \\ \Delta_2 T_\gamma{}^1 + \frac{9}{h_\gamma^2} F_\gamma{}^1 - \frac{3Q_\gamma{}^\circ}{2h_\gamma} + \frac{\chi_\gamma{}^1}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T_\gamma{}^1}{\partial t} + \\ + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda}\alpha_T T^1_{0(\gamma)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^1_{1(\gamma)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^1_{2(\gamma)}}{\partial x_2}\right) \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered} F_1{}^\circ = T_1{}^+ + T_k{}^+ - 2T_1{}^\circ/h_1, \quad F_2{}^\circ = T_k{}^- + T_2{}^- - 2T_2{}^\circ/h_2 \\ F_1{}^1 = T_1{}^+ - T_k{}^+ - 5T_1{}^1/(3h_1), \quad F_2{}^1 = T_k{}^- - T_2{}^- - 5T_2{}^1/(3h_2) \\ T_k{}^- = [(\lambda^2 h^2 + \lambda\lambda_* h h_1)(27T_2{}^- + 54T_2{}^\circ + 90T_2{}^1) + \lambda_*{}^2 h_1 h_2 (72T_*{}^\circ - 60T_*{}^1) + \\ + \lambda\lambda_* h h_2 (54T_*{}^\circ - 90T_*{}^1 + 18T_1{}^\circ - 30T_1{}^1 + 9T_1{}^+)][81\lambda\lambda_* h(h_1 + h_2) + \\ + 72\lambda_*{}^2 h_1 h_2]^{-1} \end{gathered}$$

Выражение для $T_k{}^+$ получается из последней формулы заменой h_1 на h_2, h_2 на h_1, $T_2{}^-$ на $T_1{}^+$, $T_2{}^1$ на $-T_1{}^1$, $T_*{}^1$ на $-T_*{}^1$. Уравнения теплопроводности слоя

$$\Delta_2 T_*{}^\circ + L_0(T_*{}^\circ, T_*{}^1) + \frac{3}{2h^2}(T_k{}^+ + T_k{}^-) = \frac{1}{a}\left\{\frac{\partial T_*{}^\circ}{\partial t} + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial t} T_*{}^\circ - \right.$$

$$-\frac{1}{2h}\left[\frac{\partial h^+}{\partial t}T_*{}^+ - \frac{\partial h^-}{\partial t}T_*{}^-\right]\Bigg\} \qquad (5.2)$$

$$\Delta_2 T_*{}^1 + L_1(T_*{}^\circ, T_*{}^1) + \frac{9}{h^2}(T_k{}^+ - T_k{}^-) = \frac{1}{a_*}\Bigg\{\frac{\partial T_*{}^1}{\partial t} + \frac{2}{h}\frac{\partial h}{\partial t}T_*{}^1 +$$
$$+\frac{3}{h}\frac{\partial h_*}{\partial t}T_2{}^\circ - \frac{3}{2h}\left[\frac{\partial h^+}{\partial t}T_*{}^+ + \frac{\partial h^-}{\partial t}T_*{}^-\right]\Bigg\}$$

где L_0 и L_1 — квазилинейные дифференциальные операторы.

Систему уравнений первого приближения для пластин получим из (3.2). Эта система распадается на две независимые: первая характеризует движение пластин в своей плоскости, вторая — в плоскости изгиба. Деформациями пластин в своей плоскости пренебрегаем, тогда их движение полностью описывается параметрами $\overset{\circ}{u}_{3(\gamma)}$, $\overset{1}{u}_{1(\gamma)}$ и $\overset{1}{u}_{2(\gamma)}$. Часто используют не уравнения первого приближения, а модели, основанные на тех или иных гипотезах, упрощающих систему уравнений движения пластин. Одной из наиболее простых и часто используемых при решении практических задач является теория пластин, основанная на гипотезах Кирхгофа. Движение пластин в этой теории описывается параметрами $\overset{\circ}{u}_{s(\gamma)}$, которые называются прогибами срединных поверхностей и обозначаются $\omega_{(\gamma)}$. Два других параметра теории первого приближения связаны с ним зависимостями $\overset{1}{u}_{\alpha(\gamma)} = -h_\gamma \partial\omega_{(\gamma)}/\partial x_\alpha$ $(\alpha = 1,\ 2)$. Уравнения движения пластин для этого случая имеют вид

$$\Delta_2\Delta_2\omega_{(\gamma)} + (1+\nu)\,\alpha_T\Delta_2 T^1_{(\gamma)} + \frac{2\rho h_\gamma}{D}\frac{\partial^2\omega_{(\gamma)}}{\partial t^2} = \frac{1}{D}(p-q) \qquad (5.3)$$

где p — нормальная нагрузка, приложенная к наружным поверхностям пластин, q — нормальная составляющая контактного давления.

Даже с учетом этих упрощений задача остается сложной. В первую очередь это вызвано наличием квазилинейной системы уравнений теплопроводности для слоя (5.2). Оставим в разложении температуры слоя в ряд по полиномам Лежандра один член, тогда температурное поле в нем будет описываться первым уравнением (5.2). Имеем

$$T_k{}^- = [(9\lambda^2 h + \lambda\lambda_* h_1)(3T_2{}^- + 6T_2{}^\circ + 10T_2{}^1) +$$
$$+\lambda\lambda_* h_2(3T_1{}^+ + 6T_1{}^\circ - 10T_1{}^1)]\{9\,[9\lambda^2 h + \lambda\lambda_*(h_1 + h_2)]\}^{-1}$$

Здесь отсутствует параметр $T_*{}^\circ$, а значит, система уравнений (5.1) (5.3) не связана с (5.2), что значительно упрощает решение задачи.

Таким образом, в рамках модели Кирхгофа рассматриваемая контактная задача сводится к системе уравнений (5.1), (5.3) с условием контакта $\omega_2 - \omega_1 = h_0$.

Здесь получены общие уравнения задачи о термоупругом контакте пластин через теплопроводный слой на основании уравнений связанной термоупругости. Уравнения несвязанной динамической, квазистатической или статической термоупругой контактной задачи можно получить из них как частный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 520 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.

Харьков

Поступила в редакцию 2.III.1989