Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.3

Т. С. Кагадий, А. В. Павленко

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ ВЯЗКОУПРУГОМУ ОРТОТРОПНОМУ ТЕЛУ

Исследуется вопрос о передаче нагрузки упругим стержнем вязкоупругому ортотропному телу с цилиндрической анизотропией. Используется асимптотический метод [1, 2], который в первой части работы обобщается на случай вязкоупругих сред.

При решении вопроса об адгезионной прочности волокнистого композиционного материала важную роль играют задачи о передаче нагрузки через подкрепляющие элементы трехмерным телам. Такие задачи даже в упругой области изучены недостаточно в связи со значительными математическими трудностями [1, 3—5].

1. Рассмотрим вязкоупругое ортотропное тело с цилиндрической анизотропией. При аксиальной симметрии нагружения тензор напряжений и вектор перемещений не зависят от θ, а являются функциями координат r, z (r, θ, z — цилиндрические координаты, ось z совпадает с осью анизотропии). В этом случае задача распадается на две независимые: задачу о деформации, в которой отсутствует компонента перемещения v (но, конечно, имеется нормальное напряжение σ_{22}), и задачу кручения. Остановимся на первой из них.

Соотношения между деформациями и напряжениями в ортотропном вязкоупругом теле с цилиндрической анизотропией, в котором отсутствует компонента перемещения v, записываются следующим образом:

$$e_{11} = s_1 - \nu_{12}s_2 - \nu_{13}s_3 \tag{1.1}$$

$$s_i = \frac{1}{E_i}\left(\sigma_{ii} + \int_0^t K_{1i}(t-\tau)\,\sigma_{ii}\,d\tau\right), \quad i = 1, 2, 3$$

$$e_{13} = \frac{1}{G}\left(\sigma_{13} + \int_0^t K(t-\tau)\,\sigma_{13}\,d\tau\right), \quad e_{12} = e_{23} = 0$$

Для получения e_{22}, e_{33} достаточно в e_{11} сделать круговую замену индексов. При этом

$$\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \quad \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3, \quad \nu_{31}E_3 = \nu_{13}E_1$$
$$K_{12} = K_{21}, \quad K_{23} = K_{32}, \quad K_{31} = K_{13}$$

Здесь E_1, E_2, E_3 (G) — мгновенные модули упругости (сдвига), ν_{ij} — коэффициенты Пуассона, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} ($\sigma_{13} = \sigma_{31}$) — нормальные (касательные) напряжения, $K_{ij}(t-\tau)$ — ядра ползучести, t — время; соотношения (1.1) справедливы как при растяжении, так и при сжатии. Для аппроксимации ядер ползучести используем следующие аналитические выражения [6]:

$$K_{ij}(t-\tau) = k_{ij}(t-\tau)^{\alpha_{ij}-1} \exp[-\beta_{ij}(t-\tau)] \tag{1.2}$$
$$K(t-\tau) = k(t-\tau)^{\alpha-1} \exp[-\beta(t-\tau)] \quad (0 < \alpha_{ij}, \ \alpha \leqslant 1)$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через проекции u, w вектора перемещений по формулам

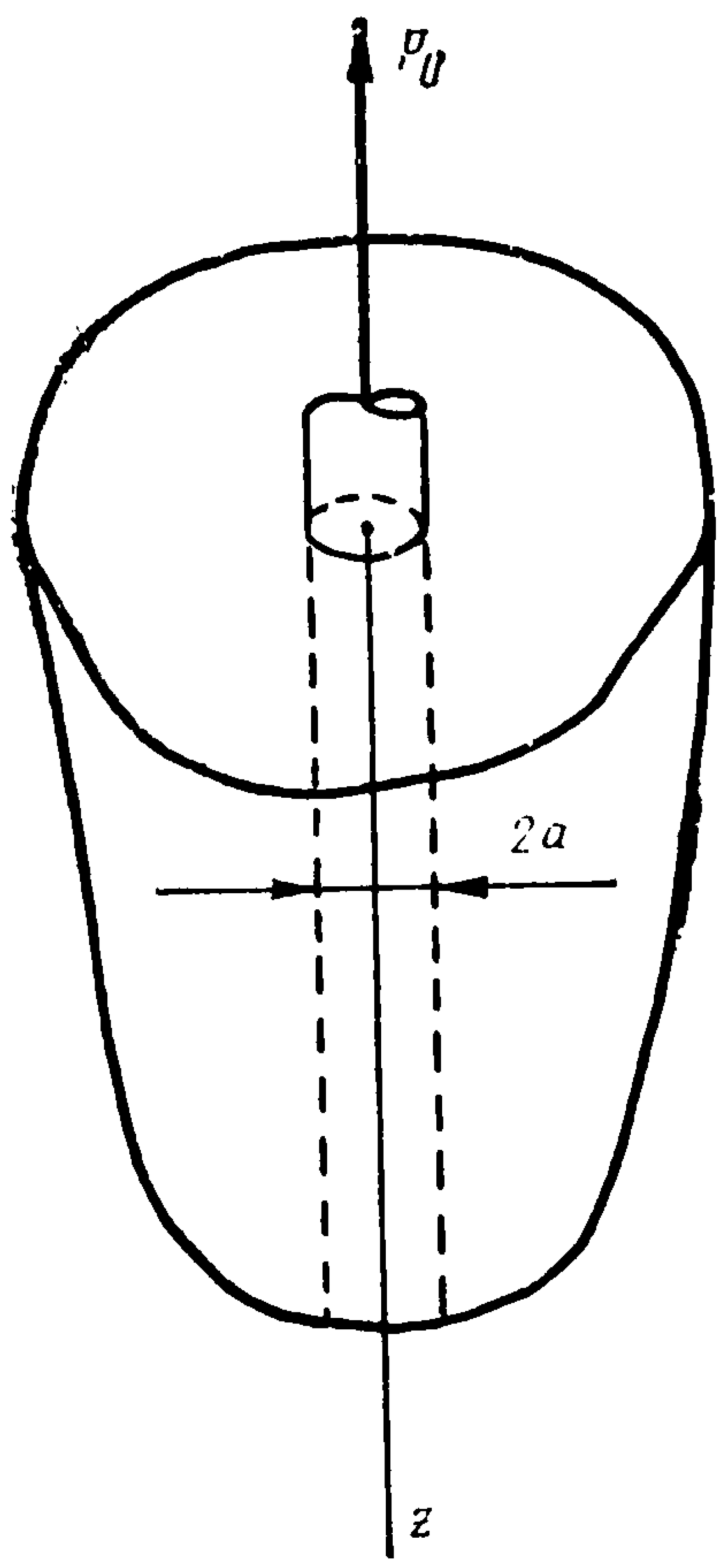
$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{22} = \frac{u}{r}, \quad e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{13} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.3}$$

После применения преобразования Лапласа к соотношениям (11.,) (1.3) и обычной процедуры построения дифференциальных уравнений приходим к интегрированию системы уравнений, аналогичной (1.1) работы [1], где параметр ε имеет вид (Γ (α) — гамма-функция)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \mathbf{F}\,(\mathbf{p};\, \mathbf{k},\, \alpha,\, \beta)/\mathbf{F}\,(\mathbf{p};\, \mathbf{k}_{11},\, \alpha_{11},\, \beta_{11}) \tag{1.4}$$
$$\varepsilon_1 = \mathbf{G}/\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{F}\,(\mathbf{p};\, \mathbf{k},\, \alpha,\, \beta) = [1 + \mathbf{k}\Gamma\,(\alpha)\,(\mathbf{p} + \beta)^{-\alpha}]^{-1}$$

При асимптотическом анализе полученных уравнений, как и в [1], используется малый параметр ε. Он действительно оказывается малым, если мало ε_1, так как коэффициент при ε_1 в выражении (1.4) при произвольном значении параметра **p** имеет порядок единицы.

Следовательно, если используются разностные ядра ползучести (1.2), то при исследовании осесимметричных задач линейной вязкоупругости ортотропных сред также удается расщепить напряженно-деформированное состояние на две составляющие с различными свойствами. Полное решение задачи ищется в виде суперпозиции обеих составляющих, а определение каждой из них сводится к краевым задачам для отыскания одной функции.



Фиг. 1

2. Остановимся далее на задаче о передаче осевой нагрузки упругим стержнем вязкоупругому ортотропному полубесконечному телу с цилиндрической анизотропией. Стержень помещен в тело перпендикулярно ограничивающей плоскости, средняя линия его совпадает с осью **z** (фиг. 1). Площадь **F** поперечного сечения стержня достаточно мала, т. е. его радиус **a** достаточно мал. Требуется определить закон распределения контактных напряжений между стержнем и полупространством, когда в концевой точке стержня **z** = 0 в начальный момент времени приложена сосредоточенная сила $\mathbf{P}_0$, направленная по оси стержня, которая затем остается постоянной.

Решение поставленной задачи в изображениях проводится аналогично [1], при этом трансформанта перемещения имеет вид

$$\mathbf{W}\,(\mathbf{r},\, \mathbf{z},\, \mathbf{p}) = -\frac{2\mathbf{P}_0}{\pi \mathbf{E}\mathbf{F}}\,\frac{1}{\mathbf{p}}\int \frac{\mathbf{K}_0\,(\mathbf{r}\omega\mathbf{s})\cos \mathbf{z}\mathbf{s}}{\mathbf{s}\,[\mathbf{s}\mathbf{K}_0\,(\mathbf{a}\omega\mathbf{s}) + \mathbf{g}\mathbf{K}_1\,(\mathbf{a}\omega\mathbf{s})]}\,\mathbf{d}\mathbf{s}$$
$$\mathbf{g} = 2\pi \mathbf{a}\mathbf{G}\mathbf{F}\,(\mathbf{p};\, \mathbf{k},\, \alpha,\, \beta)\,\omega/(\mathbf{E}\mathbf{F})$$

Здесь $\mathbf{K}_0\,(\mathbf{x})$, $\mathbf{K}_1\,(\mathbf{x})$ — модифицированные функции Бесселя, интегрирование по s всюду ведется в пределах от 0 до ∞. Трансформанты усилия в стержне $\mathbf{N}_* = \mathbf{E}\mathbf{F}\,(\mathbf{d}\mathbf{W}/\mathbf{d}\mathbf{z})\,|_{r=\mathbf{a}}$ и контактного напряжения $\tau_* = 2\pi \mathbf{a}\mathbf{G}\mathbf{F}\,(\mathbf{p};\, \mathbf{k},\, \alpha,\, \beta)\,(\mathbf{d}\mathbf{W}/\mathbf{d}\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{a}}$ определяются по формулам

$$\mathbf{N}_*\,(\mathbf{z},\, \mathbf{p}) = \frac{2\mathbf{P}_0}{\pi}\,\frac{1}{\mathbf{p}}\int \frac{\sin \mathbf{z}\mathbf{s}}{\mathbf{s} + \mathbf{g}\mathbf{M}\,(\mathbf{s})}\,\mathbf{d}\mathbf{s}$$
$$\tau_*\,(\mathbf{z},\, \mathbf{p}) = \frac{2\mathbf{P}_0}{\pi}\,\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{p}}\int \frac{\cos \mathbf{z}\mathbf{s}}{\mathbf{g} + \mathbf{s}\mathbf{M}^{-1}\,(\mathbf{s})}\,\mathbf{d}\mathbf{s} \tag{2.1}$$
$$\mathbf{M}\,(\mathbf{s}) = \mathbf{K}_1\,(\mathbf{a}\omega\mathbf{s})/\mathbf{K}_0\,(\mathbf{a}\omega\mathbf{s})$$

При обратном преобразовании Лапласа контурный интеграл удается свести к обычному несобственному интегралу изложенным в [6] методом.

Асимптотические выражения указанных усилий при малых и больших значениях времени могут быть выписаны в явном виде, если трансформанты их представить в форме ряда по малому параметру ε_*, зависящему от $\mathbf{p}$

$$\mathbf{T}_* (\mathbf{z}, \mathbf{p}) = [\mathbf{T}_0 (\mathbf{z}) + \mathbf{T}_1 (\mathbf{z}) \varepsilon_* + \mathbf{T}_2 (\mathbf{z}) \varepsilon_*^2 + \ldots]/\mathbf{p} \tag{2.2}$$

где под $\mathbf{T}$ подразумевается либо усилие $\mathbf{N}$, либо τ.

Если материал полупространства обладает преимущественно сдвиговой ползучестью ($\mathbf{k}_{ij} = 0$) и $\alpha = 1$, то

$$\omega = \omega_0 [(\mathbf{p} + \beta + \mathbf{k})/(\mathbf{p} + \beta)]^{1/2}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 [(\mathbf{p} + \beta)/(\mathbf{p} + \beta + \mathbf{k})]^{1/2}$$

$$\omega_0 = (\mathbf{E}_3/\mathbf{G})^{1/2}, \quad \mathbf{g}_0 = 2\pi \mathbf{a} (\mathbf{E}_3\mathbf{G})^{1/2}/(\mathbf{EF})$$

В этом случае в ряде (2.2) при больших значениях параметра $\mathbf{p}$ (что соответствует малым значениям времени $\mathbf{t}$) $\varepsilon_* = \mathbf{k}/(\mathbf{p} + \beta)$, а при малых (что соответствует большим значениям времени) $\varepsilon_* = \Delta\mathbf{p}/(\mathbf{p} + \beta)$, $\Delta = -\mathbf{k}/(\beta + \mathbf{k})$.

Переходя к оригиналу в (2.2), получим при малых значениях времени

$$\mathbf{T} (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{T}_0 (\mathbf{z}) + \mathbf{T}_{10} (\mathbf{z}) (\mathbf{k}/\beta) (1 - \mathbf{e}^{-\beta\mathbf{t}}) + \ldots \tag{2.3}$$

где для усилия в стержне $\mathbf{N} (\mathbf{z}, \mathbf{t})$

$$\mathbf{T}_0 (\mathbf{z}) = \frac{2\mathbf{P}_0}{\pi} \int \frac{\sin \mathbf{zs}}{\mathbf{s} + \mathbf{g}_0\mathbf{M}_0 (\mathbf{s})} \mathbf{ds} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{T}_{10} (\mathbf{z}) = \frac{2\mathbf{P}_0}{\pi} \int \frac{\mathbf{g}_0\mathbf{a}\omega_0\mathbf{s} [1 - \mathbf{M}_0^2 (\mathbf{s})] + 2\mathbf{g}_0\mathbf{M}_0 (\mathbf{s})}{2 [\mathbf{s} + \mathbf{g}_0\mathbf{M}_0 (\mathbf{s})]^2} \sin \mathbf{zs}\, \mathbf{ds}$$

а для контактного напряжения $\tau (\mathbf{z}, \mathbf{t})$

$$\mathbf{T}_0 (\mathbf{z}) = \frac{2\mathbf{P}_0\mathbf{g}_0}{\pi} \int \frac{\cos \mathbf{zs}}{\mathbf{g}_0 + \mathbf{s}\mathbf{M}_0^{-1} (\mathbf{s})} \mathbf{ds} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{T}_{10} (\mathbf{z}) = \frac{2\mathbf{P}_0\mathbf{g}_0}{\pi} \int \frac{\mathbf{a}\omega_0\mathbf{s}^2 [1 - \mathbf{M}_0^{-2} (\mathbf{s}) - 2\mathbf{s}\mathbf{M}_0^{-1} (\mathbf{s})]}{2 [\mathbf{g}_0 + \mathbf{s}\mathbf{M}_0^{-1} (\mathbf{s})]^2} \cos \mathbf{zs}\, \mathbf{ds}$$

$$\mathbf{M}_0 (\mathbf{s}) = \mathbf{K}_1 (\mathbf{a}\omega_0\mathbf{s})/\mathbf{K}_0 (\mathbf{a}\omega_0\mathbf{s})$$

Коэффициенты $\mathbf{T}_{20} (\mathbf{z}), \ldots$ из-за громоздкости не выписаны. При больших значениях времени из (2.2) имеем

$$\mathbf{T} (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{T}_\infty (\mathbf{z}) + \mathbf{T}_{1\infty} (\mathbf{z}) \Delta \mathbf{e}^{-\beta\mathbf{t}} + \ldots \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{T}_\infty (\mathbf{z})$, $\mathbf{T}_{1\infty} (\mathbf{z}), \ldots$ находятся по тем же формулам (2.4), (2.5) после замены ω_0 на ω_∞, $\mathbf{g}_0$ на $\mathbf{g}_\infty$, причем $\omega_\infty = \omega_0 (1 + \mathbf{k}/\beta)^{1/2}$, $\mathbf{g}_\infty = \mathbf{g}_0 (1 + \mathbf{k}/\beta)^{-1/2}$.

Усилия (2.3), (2.6) могут быть представлены асимптотическими выражениями соответственно при малых и больших значениях координаты $\mathbf{z}$ аналогично упругой задаче [1]. В частности, при $\mathbf{t} = 0$ при малых значениях координаты $\mathbf{z}$ получим

$$\mathbf{N}_0 (\mathbf{z}) = \frac{2\mathbf{P}_0}{\pi} (\sin \mathbf{z}_1 \operatorname{ci} \mathbf{z}_1 - \cos \mathbf{z}_1 \operatorname{si} \mathbf{z}_1), \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{g}_0\mathbf{z} \tag{2.7}$$

$$\tau_0 (\mathbf{z}) = -\frac{2\mathbf{P}_0\mathbf{g}_0}{\pi} (\cos \mathbf{z}_1 \operatorname{ci} \mathbf{z}_1 + \sin \mathbf{z}_1 \operatorname{si} \mathbf{z}_1)$$

Предельные (при $\mathbf{t} = 0$) усилия при малых значениях координаты $\mathbf{z}$ также определяются формулами (2.7), но после замены $\mathbf{g}_0$ на $\mathbf{g}_\infty$. Характер убывания усилий при больших значениях координаты $\mathbf{z}$ аналогичен упругой задаче [1].

3. Соотношения (2.3), (2.6) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{T} (\mathbf{t}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{t} + \ldots (\mathbf{t} \to 0), \; \mathbf{T} (\mathbf{t}) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{e}^{-\beta\mathbf{t}} + \ldots (\mathbf{t} \to \infty) \tag{3.1}$$

Предельная информация (3.1) позволяет судить о поведении соответствующих функций при произвольных значениях времени, если использовать двухточечную аппроксиманту Паде [7]. Это функция вида

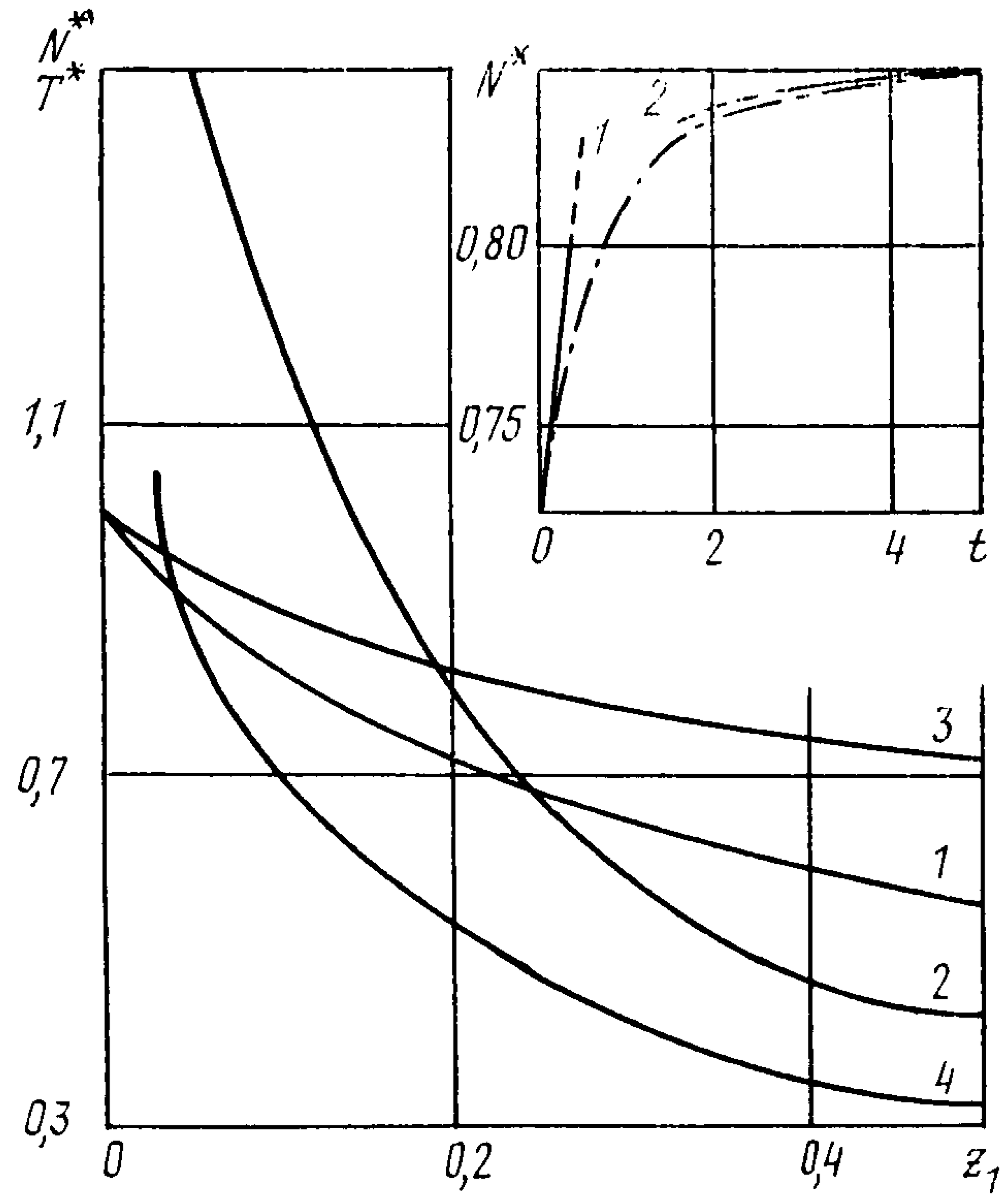
$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{t} + \beta_1 \mathbf{e}^{\beta \mathbf{t}} + \dots}{1 + \gamma_1 \mathbf{t} + \delta_1 \mathbf{e}^{\beta \mathbf{t}} + \dots} \tag{3.2}$$

коэффициенты которой подбираются из условий, что при разложении в ряды при $\mathbf{t} \to 0$ и $\mathbf{t} \to \infty$ получаются асимптотические выражения (3.1). Эти условия дают

$$\alpha_0 = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\delta_1, \quad \alpha_1 = \mathbf{b}_0\gamma_1, \quad \beta_1 = \mathbf{b}_0\delta_1,$$

$$\delta_1 = -\frac{\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0}{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_0},$$

$$\gamma_1 = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \beta(\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0)^2}{(\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0)(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_0)}$$



Фиг. 2

Аппроксиманта Паде (3.2) действительно позволяет «сшить» между собой предельные разложения (3.1) и найти области «малых» и «больших» времен.

На фиг. 2 представлены результаты расчета по формулам (2.7) усилий в стрежне $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}/\mathbf{P}_0$ и контактных усилий $\tau^* = \tau/(\mathbf{P}_0\mathbf{g}_0)$ при $\mathbf{t} = 0$ (кривые *1*, *2* соответственно) и при $\mathbf{t} = \infty$ (кривые *3*, *4*). Справа вверху показано изменение усилия $\mathbf{N}^*$ во времени при $\mathbf{z}_1 = 0{,}2$. Штриховые кривые *1*,*2* построены по формулам (3.1), штрихпунктирная кривая — по формуле (3.2). Расчеты проводились при $\mathbf{k} = 2{,}5$, $\beta = 0{,}5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павленко А. В.* Передача нагрузки от стержня к упругому анизотропному полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 103—111.
2. *Маневич Л. И.*, *Павленко А. В.*, *Коблик С. Г.* Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев; Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
3. *Арутюнян Н. Х.*, *Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 770—787.
4. *Александров В. М.*, *Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. *Павленко А. В.* Применение асимптотического метода к пространственной задаче теории упругости для композитных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 50—61.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
7. *Бейкер Дж.*, *Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
23.XI.1988