Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 539.3

Д. Р. Атаджанов, А. Г. Саркисян, А. И. Цейтлин

ФУНКЦИЯ ГРИНА СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Строится стационарная функция Грина для вязкоупругой полуплоскости в виде интеграла Фурье и при помощи полученных асимптотических оценок для подынтегральных функций осуществляется ее эффективная численная реализация.

Функция Грина для упругой полуплоскости построена в [1], однако она сложна для вычислений. Приводилось [2] более простое выражение для этой функции со ссылкой на малодоступный источник. Ниже дается решение задачи об установившихся колебаниях однородной изотропной вязкоупругой полуплоскости, вызванных действием произвольно ориентированной сосредоточенной силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону, положенное в основу гранично-элементной программы BEMDYST.

1. Рассмотрим полуплоскость $P\ (-\infty < x_1 < \infty,\ x_2 \geqslant 0)$ в декартовых координатах x_1, x_2. Предполагается, что материал среды обладает внутренним трением, для описания которого используется модель частотно-независимого относительного демпфирования [3]. При этом комплексный модуль берется в виде

$$E(\omega) = E_1 \,|\, \omega \,|^{\alpha} (\cos {}^1\!/_2\, \pi\alpha + i \operatorname{sign} \omega \sin {}^1\!/_2 \pi\alpha) \tag{1.1}$$
$$E_1 = |\, E(1) \,|, \quad \alpha = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} \gamma$$

а коэффициент Пуассона ν принимается вещественной постоянной, т. е. считается нерелаксирующим. Здесь γ — коэффициент потерь. Указанная модель обеспечивает частотную независимость потерь энергии на всей частотной оси и позволяет исследовать любые динамические процессы, однако исключает рассмотрение статического нагружения вследствие неограниченной ползучести при $\omega = 0$.

Пусть в некоторой точке $a\ (a_1, a_2)$ приложена единичная сосредоточенная сила, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. Исключив временную координату, сведем задачу к определению комплексной матричной функции Грина $g\,(x; a \,|\, \omega) = [g_{kj}\,(x; a \,|\, \omega)]_{2\times 2}$, удовлетворяющей уравнениям Ламе и граничным условиям

$$A\,(\partial_x; i\omega)\; g\,(x; a \,|\, \omega) + \rho\omega^2 g\,(x; a \,|\, \omega) + \delta\,(x, a)\, I = 0$$
$$\lim_{(P\setminus\Gamma)\ni x\to x_0\in\Gamma} T\,(\partial_x, \mathbf{n}\,(x_0); i\omega)\; g\,(x; a \,|\, \omega) = 0$$

Здесь $g_{kj}\,(x; a \,|\, \omega)$ — направленное вдоль оси x_k перемещение в точке $x\ (x_1, x_2)$ от действия единичной силы в направлении x_j в точке $a\ (a_1, a_2)$; $A\,(\partial_x;\ i\omega) = [A_{kj}\,(\partial_x;\ i\omega)]_{2\times 2}$, $T\,(\partial_x, \mathbf{n}\,(x_0);\ i\omega) = [T_{kj}\,(\partial_x,\ \mathbf{n}\,(x_0);\ i\omega)]_{2\times 2}$ — комплексные матричные дифференциальные операторы, полученные соответственно из статического матричного оператора Ламе и оператора напряжений классической теории упругости с заменой вещественных упругих постоянных на соответствующие комплексные модули вязкоупругости

$$A_{kj}(\partial_x;\ i\omega) = \delta_{kj}\mu\Delta + (\lambda + \mu)\,\partial^2/\partial x_k\partial x_j$$

$$T_{kj}(\partial_x, \mathbf{n}(x); i\omega) = \lambda n_k(x)\,\partial/\partial x_j + \mu n_j(x)\,\partial/\partial x_k + \mu\delta_{kj}\partial/\partial\mathbf{n}(x)$$

$$\lambda = \nu E(\omega)/((1+\nu)(1-2\nu)), \quad \mu = E(\omega)/(2(1+\nu))$$

δ_{kj} — символ Кронекера, $\delta(x, a) = \delta(x_1 - a_1)\,\delta(x_2 - a_2)$ — дельта-функция Дирака, I — единичная матрица, ρ — плотность материала полуплоскости, λ, μ — комплексные параметры, аналоги соответствующих постоянных Ламе, $E(\omega)$ определяется по (1.1), Γ — граница полуплоскости, $\mathbf{n}(x_0) = \{0, 1\}$ — вектор внутренней нормали к границе, Γ, Δ — оператор Лапласа.

Регулярное решение поставленной задачи с учетом затухания колебаний на бесконечности можно представить [4] в виде

$$c(x^*)\,g(x^*; a\,|\,\omega) = G(x^*; a\,|\,\omega) + \int G_q(x_0; x^*\,|\,\omega)\,g(x_0; a\,|\,\omega)\,dx_1 \quad (1.2)$$

$$c(x^*) = \{1 \text{ при } x^* \in (P \setminus \Gamma);\ {}^1/_2 \text{ при } x^* \in \Gamma\}$$

$$G_q(x_0; x^*\,|\,\omega) = [T(\partial_x, \mathbf{n}(x_0);\ i\omega)\,G(x; x^*)\,|\,\omega)]^T\,|_{x_2=0}$$

где $G(x^*; x\,|\,\omega)$ — стационарная функция Грина для вязкоупругой плоскости. Здесь и далее интегрирование по x_1, x_1^* и ξ_2 ведется от $-\infty$ до $+\infty$. В силу соотношения

$$G_p(x_0^*; x_0\,|\,\omega) \equiv [T(\partial_{x^*}, \mathbf{n}(x_0); i\omega)\,G(x^*; x_0\,|\,\omega)]^T\,|_{x_2^*=0} = -G_q(x_0; x_0^*\,|\,\omega) \quad (1.3)$$

решение (1.2) при $x^* \in \Gamma$ для дальнейших выкладок удобнее представить в виде

$$^1/_2 g(x_0^*; a\,|\,\omega) = G(x_0^*; a\,|\,\omega) - \int G_p(x_0^*; x_0\,|\,\omega)\,g(x_0; a\,|\,\omega)\,dx_1 \quad (1.4)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения.

Применим к обеим частям равенства (1.4) преобразование Фурье по x_1^* [5]

$$^1/_2 g_F(\xi_1, 0; a\,|\,\omega) = G_F(\xi_1, 0; a\,|\,\omega) -$$
$$-\iint G_p(x_1^*, 0; x_0\,|\,\omega)\,g(x_0; a\,|\,\omega)\exp(i\xi_1 x_1^*)\,dx_1^*\,dx_1 \quad (1.5)$$

где индекс F означает трансформанту Фурье. Так как $G_p(x_0^*; x_0\,|\,\omega)$ — функция разности $x_0^* - x_0$, двойной интеграл в (1.5) можно представить в форме

$$G_{pF}^e(\xi_1\,|\,\omega)\ g_F(\xi_1, 0;\ a\,|\,\omega)$$

$$G_{pF}^e(\xi_1\,|\,\omega) = \int G_p(R\,|\,\omega)\exp(i\xi_1 R)\,dR \quad (R = x_1^* - x_1)$$

С учетом сказанного равенство (1.5) приводим к виду

$$[{}^1/_2 I + G_{pF}^e(\xi_1\,|\,\omega)]\ g_F(\xi_1, 0;\ a\,|\,\omega) = G_F(\xi_1, 0;\ a\,|\,\omega) \quad (1.6)$$

Отсюда определим

$$g_F(\xi_1, 0;\ a\,|\,\omega) = [C]^{-1}\,G_F(\xi_1, 0;\ a\,|\,\omega), \quad C = {}^1/_2 I + G_{pF}^e(\xi_1\,|\,\omega) \quad (1.7)$$

Использование в соотношениях (1.7) стационарной функции Грина G для вязкоупругой плоскости и порождаемого ею тензора напряжений G_p приводит к громоздким вычислениям. Обойти эти трудности можно следующим образом. Имеем

$$G_F(\xi_1, 0; a\,|\,\omega) = (2\pi)^{-1}\int G_{FF}(\xi_1, \xi_2; a\,|\,\omega)\exp(-i\xi_2 x_2^*)\,d\xi_2\,|_{x_2^*=0} \quad (1.8)$$

$$G_{pF}^e(\xi_1, x_2^*\,|\,\omega) = (2\pi)^{-1}\exp(-i\xi_1 x_1)\int G_{pFF}(\xi_1, \xi_2; x_0\,|\,\omega)\exp(-i\xi_2 x_2^*)\,d\xi_2 \quad (1.9)$$

где G_{FF}, G_{pFF} — двойные трансформанты Фурье от G и G_p.

Применяя в уравнениях Ламе двойное преобразование Фурье по x^*, определим

$$G_{FFmj}(\xi_1, \xi_2; x \mid \omega) = \frac{\exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)]}{\rho\omega^2}\left(\frac{\xi_m \xi_j}{\xi^2 + k_l^2} + \frac{\delta_{mj} k_t^2 - \xi_m \xi_j}{\xi^2 - k_t^2}\right) \quad (1.10)$$

$$k_l^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu), \quad k_t^2 = \rho\omega^2/\mu, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

Для определения $G_{pFF}(\xi_1, \xi_2; x_0 \mid \omega)$ к соотношению

$$G_p(x^*; x_0 \mid \omega) = [T(\partial_{x^*}, \mathbf{n}(x^*); i\omega) G(x^*; x_0 \mid \omega)]^T$$

также применим двойное преобразование Фурье по x^* и проинтегрируем по частям в правой части

$$G_{pFFjk}(\xi_1, \xi_2; x_0 \mid \omega) = -in_l(x^*)(\lambda\delta_{lk}\xi_m + \mu\xi_k\delta_{lm} + \mu\xi_l\delta_{km}) G_{FFmj}(\xi_1, \xi_2; x_0 \mid \omega) \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.9) с учетом равенства (1.10), интегрируя [6]

$$2\pi i\rho\omega^2 G^e_{pFjk}(\xi_1, x_2^* \mid \omega) = \lambda\xi_1^2\delta_{2k}((\xi_j - \delta_{2j}\xi_2) I_0 + \delta_{2j} I_1) +$$
$$+ \lambda\delta_{2k}((\xi_j - \delta_{2j}\xi_2) I_2 + \delta_{2j} I_3) + \lambda k_t^2 \delta_{2k}((\xi_j - \delta_{2j}\xi_2) I_{0t} + \delta_{2j} I_{1t}) +$$
$$+ 2\mu((\xi_k - \delta_{2k}\xi_2)(\xi_j - \delta_{2j}\xi_2) I_1 + (\xi_j - \delta_{2j}\xi_2)\delta_{2k} I_2 + (\xi_k - \delta_{2k}\xi_2)\delta_2 I_2 +$$
$$+ \delta_{2k}\delta_{2j} I_3) + \mu k_t^2(\delta_{2j}(\xi_k - \delta_{2k}\xi_2) I_{0t} + \delta_{2j}\delta_{2k} I_{1t} + \delta_{kj} I_{1t}) \quad (1.12)$$

где

$$I_n = I_{nl} - I_{nt}, \quad I_{ns} = (-i)^n \pi R_s^{n-1} \exp(-R_s x_2^*)$$
$$R_s = \operatorname{sign}\omega \sqrt{\xi_1^2 - k_s^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \quad s = l, t$$

и переходя к пределу при $(P \setminus \Gamma) \ni x^* \to x_0^* \in \Gamma$ (иначе будем обозначать $x_2^* \to +0$), получим

$$2i\rho\omega^2 G^e_{pFjk}(\xi_1, +0 \mid \omega) = (\lambda + 2\mu)\delta_{2k}(\xi_j - \delta_{2j}\xi_2)(R_t - R_l) +$$
$$+ \lambda\xi_1^2\delta_{2k}(\xi_j - \delta_{2j}\xi_2)(R_l^{-1} - R_t^{-1}) + \lambda k_t^2\delta_{2k}(\xi_j - \delta_{2j}\xi_2) R_t^{-1} +$$
$$+ 2\mu\delta_2 (\xi_k - \delta_{2k}\xi_2)(R_t - R_l) + \mu k_t^2(\delta_{2j}(\xi_k - \delta_{2k}\xi_2) R_t^{-1} - i\delta_{kj})$$

Учитывая связь между граничным и прямым (сингулярным) значением обобщенного потенциала двойного слоя [4]

$$G_{pF}{}^e(\xi_1 \mid \omega) = {}^1/_2 I + G_{pF}{}^e(\xi_1, +0 \mid \omega)$$

после преобразования найдем

$$G^e_{pFjk}(\xi_1 \mid \omega) = {}^1/_2(\delta_{2k}(\xi_j - \delta_{2j}\xi_2) R_l^{-1} - \delta_{2j}(\xi_k - \delta_{2k}\xi_2) R_t^{-1})\alpha(\xi_1)$$
$$\alpha(\xi_1) = ik_t^{-2}(2(R_t - R_l) R_t + k_t^2)$$

Далее, согласно второму равенству (1.7)

$$C = {}^1/_2 \begin{Vmatrix} 1 & \xi_1 R_l^{-1}\alpha(\xi_1) \\ -\xi_1 R_t^{-1}\alpha(\xi_1) & 1 \end{Vmatrix}$$

Теперь из (1.2), используя первое равенство (1.7) (с учетом (1.8), (1.10)) и (1.12) (с учетом (1.3)), окончательно получим матрицу Грина

$$g(x^*; a \mid \omega) = G(x^*; a \mid \omega) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\xi_1, x_2^*; a_2 \mid \omega) \times$$
$$\times \exp[-i\xi_1(x_1^* - a_1)] d\xi_1 \quad (x^*, a \in P) \quad (1.13)$$

$$B_{11} = \frac{\xi_1^2}{N_-(\xi_1)\mu k_t^2 R_l}\left(N_+(\xi_1)\left(\frac{R_t R_l}{2\xi_1^2}\exp[-R_t(x_2^* + a_2)] +\right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\exp[-R_l(x_2^* + a_2)]\right) - 2(2\xi_1^2 - k_t^2) R_l R_t(\exp[-(R_t x_2^* + R_l a_2)] +$$
$$\left. + \exp[-(R_l x_2^* + R_t a_2)]\right)\Big)$$

$$B_{12}=\frac{i\xi_1}{N_-(\xi_1)\mu k_t^2}\left(\frac{1}{2}N_+(\xi_1)(\exp[-R_t(x_2^*+a_2)]+\exp[-R_l(x_2^*+a_2)])-\right.$$
$$-2(2\xi_1^2-k_t^2)R_lR_t\exp[-(R_tx_2^*+R_la_2)]-$$
$$\left.-2\xi_1^2(2\xi_1^2-k_t^2)\exp[-(R_lx_2^*+R_ta_2)]\right)$$
$$N_\pm(\xi_1)=(2\xi_1^2-k_t^2)^2\pm4\xi_1^2R_lR_t$$

Величина B_{22} получается из B_{11} заменой R_t на R_l и R_l на R_t, величина B_{21} — из B_{12} той же заменой и сменой знака; $N_-(\xi_1)$ — функция Релея.

Для простоты записи в дальнейшем изложении звездочки будем опускать. Полученное решение при $a_2=0$ и упругих постоянных в точности совпадает с решением задачи Лемба [7] для упругой полуплоскости. Сравнение с функцией Грина, приведенной в работе [2], упомянутой в начале статьи, обнаружило неточность в последней.

2. Особенности вычисления входящего в (1.13) внеинтегрального слагаемого, т. е. функции Грина для вязкоупругой плоскости, были обсуждены ранее [1]. Рассмотрим способы вычисления интегрального члена — преобразования Фурье для элементов матрицы $B(\xi_1, x_2; a_2\mid\omega)$. Последние являются четными функциями ξ_1 при $j=k$ и нечетными функциями ξ_1 при $j\neq k$.

С учетом этих соотношений представим интегральное слагаемое в (1.13) в виде

$$\pi^{-1}\delta_{jk}I_c(0,\infty)-i\pi^{-1}(1-\delta_{jk})I_s(0,\infty)$$
$$I_c(p,q)=\int_p^q B_{jj}(\xi_1,x_2;a_2\mid\omega)\cos[\xi_1(x_1-a_1)]\,d\xi_1$$
$$I_s(p,q)=\int_p^q B_{jk}(\xi_1,x_2;a_2\mid\omega)\sin[\xi_1(x_1-a_1)]\,d\xi_1$$

Далее интервалы интегрирования в $I_c(0,\infty)$ и $I_s(0,\infty)$ разделим на конечные и полубесконечные промежутки точками $\xi_1=b$ и $\xi_1=d$ соответственно.

Так как $\cos[\xi_1(x_1-a_1)]$ и $\sin[\xi_1(x_1-a_1)]$ при больших значениях x_1-a_1 быстро осциллируют, для получения значения интеграла с необходимой точностью следует в соответствующей квадратурной формуле брать многочлены степени $n\gg n_*$, где l — длина интервала интегрирования, а $n_*=(x_1-a_1)\,l/\pi+1$ — число нулей подынтегральной функции. Это, очевидно, требует весьма громоздких вычислений. Была предложена [8] квадратурная формула, пригодная для широких диапазонов изменения частоты осциллирующей функции. Согласно этой формуле для интегралов по конечным интервалам получим

$$I_c(0,b)\approx J\sum_{m=0}^{n_1-1}B_{jj}(\xi_1^m,x_2;a_2\mid\omega)\cos\left[\frac{1}{2}(x_1-a_1)(\xi_1^{m+1}+\xi_1^m)\right]$$
$$I_s(0,d)\approx J\sum_{m=0}^{n_2-1}B_{jk}(\xi_1^m,x_2;a_2\mid\omega)\sin\left[\frac{1}{2}(x_1-a_1)(\xi_1^{m+1}+\xi_1^m)\right]$$
$$J=[{}^1/_2(x_1-a_1)\Delta\xi_1]^{-1}\sin[{}^1/_2(x_1-a_1)\Delta\xi_1]\,\Delta\xi_1$$
$$\xi_1^0=0,\quad \xi_1^1=\Delta\xi_1,\ \ldots,\xi_1^{n_1}=n_1\Delta\xi_1=b\,(\xi_1^{n_2}=n_2\Delta\xi_1=d);\quad \Delta\xi_1=\xi_1^{m+1}-\xi_1^m$$

---

[1] *Саркисян А. Г.* Решение плоских стационарных динамических задач вязкоупругости методом граничных элементов: Дис. ... канд. техн. наук: М., 1986. 152 с.

Теперь оценим интегралы по полубесконечным интервалам. После несложных, но громоздких выкладок для элементов матрицы $B(\xi_1, x_2; a_2 \mid \omega)$ получим следующие асимптотические равенства при $\xi_1 \to \infty$:

$$B_{jk}(\xi_1, x_2; a_2 \mid \omega) \sim -D_{jk}\mu^{-1}\xi_1^{-1} \exp[-\xi_1(x_2 + a_2)] \tag{2.1}$$

$$D_{11} = D_{22} = [4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2]/[8(1-\nu)] \tag{2.2}$$

$$D_{12} = -D_{21} = -i(^1/_2 - \nu) \tag{2.3}$$

При учете (2.1), (2.2) получим оценку

$$|\operatorname{Re}(I_c(b, \infty))| \sim$$

$$\sim \left| -\operatorname{Re}(\mu^{-1}) D_{11} \int_b^\infty \xi_1^{-1} \exp[-\xi_1(x_2 + a_2)] \cos[\xi_1(x_1 - a_1)]\, d\xi_1 \right| \leqslant$$

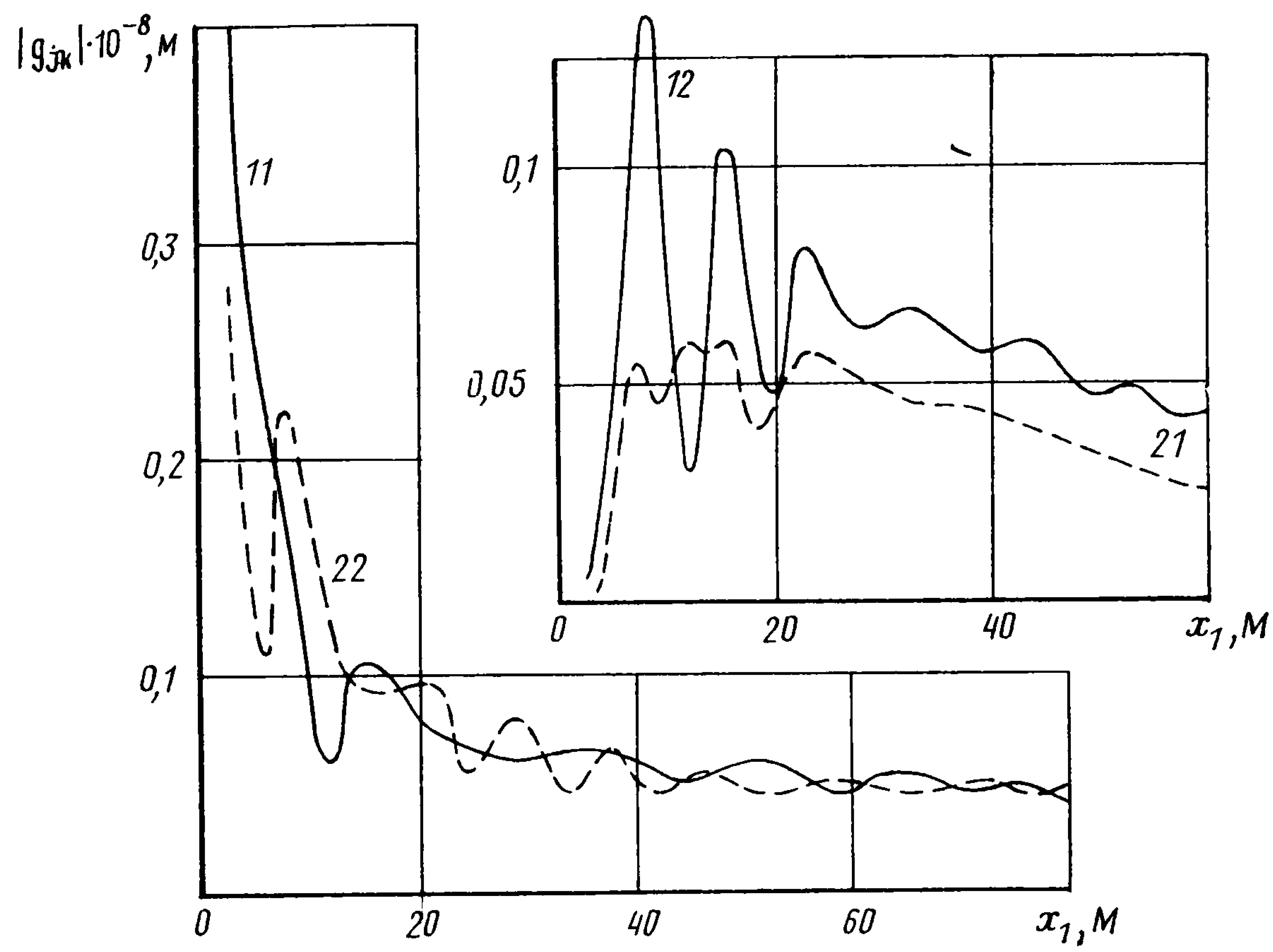
$$\leqslant \operatorname{Re}(\mu^{-1}) D_{11} \int_b^\infty \exp[-\xi_1(x_2 + a_2)]\, d\xi_1 =$$

$$= \operatorname{Re}(\mu^{-1}) D_{11} (x_2 + a_2)^{-1} \exp[-b(x_2 + a_2)] \quad (b \gg 1)$$

При помощи аналогичных рассуждений в силу (2.1), (2.3) будем иметь

$$|\operatorname{Re}(I_s(d, \infty))| \leqslant |\operatorname{Re}(i\mu^{-1})| (^1/_2 - \nu)(x_2 + a_2)^{-1} \exp[-d(x_2 + a_2)]$$

$$(d \gg 1)$$



Фиг. 1

При $x_2 = a_2 = 0$ оценку указанных интегралов, учитывая асимптотическое поведение интегрального косинуса и интегрального синуса [9], произведем следующим образом:

$$\operatorname{Re}(I_c(b, \infty)) \approx \operatorname{Re}(\mu^{-1}) D_{11} [b(x_1 - a_1)]^{-1} \sin[b(x_1 - a_1)]$$

$$\operatorname{Re}(I_s(d, \infty)) \approx \pm \operatorname{Re}(i\mu^{-1})(^1/_2 - \nu)[d(x_1 - a_1)]^{-1} \cos[d(x_1 - a_1)]$$

$$(b \gg 1/|x_1 - a_1|,\ d \gg 1/|x_1 - a_1|,\ x_1 - a_1 \neq 0)$$

Верхний знак соответствует интегралу с подынтегральной функцией B_{12}, а нижний — B_{21}.

Аналогичные оценки получаются для $\operatorname{Im}(I_c(b, \infty))$ и $\operatorname{Im}(I_s(d, \infty))$ при замене соответственно $\operatorname{Re}(\mu^{-1})$ на $\operatorname{Im}(\mu^{-1})$ и $\operatorname{Re}(i\mu^{-1})$ на $\operatorname{Im}(i\mu^{-1})$.

Построенное решение наиболее эффективно для дальнего поля, т. е. при определении перемещений вдали от точки приложения сосредоточенной гармонической силы. Время счета существенно возрастает при расположении силы и определении перемещений в окрестности начала координат.

На фигуре приведены результаты численной реализации на ЭВМ решения (1.13) при $x_2 = 0$ (на границе полуплоскости), расположении источника на глубине $a_2 = 30$ м, круговой частоте $\omega = 62{,}28$ рад/с, модуле упругости $E_1 = 2{,}2$ ГПа, плотности $\rho = 2{,}2$ т/м^3, коэффициенте потерь $\gamma = 0{,}2$, коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}15$. Цифры у кривых соответствуют индексам j, k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильичев В. А.*, *Шехтер О. Я.* Определение динамических напряжений и перемещений в упругой полуплоскости от внутреннего источника, имитирующего воздействие тоннеля метрополитена мелкого заложения // Основания и фундаменты при сейсмических воздействиях: Тр. НИИОСП. М.: Стройиздат, 1976. Вып. 67. с. 42—64.
2. *Kobayashi S.* Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics // Boundary elm: Proc. 5th Intern. Conf., Hiroshima, 1983. Berlin; Springer, 1983. P. 775—784.
3. *Цейтлин А. И.* Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 334 с.
4. *Купрадзе В. Д.*, *Гегелиа Т. Г.*, *Башелейшвили М. О.*, *Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
5. *Case K. M.*, *Hazeltine R. D.* Elastic radiation in a half-space // J. Math. Phys. 1970. V. 11. No. 8. P. 2546—2552.
6. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. *Задирака В. К.* Теория вычисления преобразования Фурье. Киев: Наук. думка, 1983. 213 с.
9. *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Леш Ф.* Специальные функции: Формулы, таблицы, графики. М.: Наука, 1977. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IX.1989