

УДК 539.3

А. М. Цалик

## МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагается способ сведения краевых задач теории упругости для многосвязных областей к системе алгебраических уравнений, основанный на использовании проекционного метода для аналитических функций комплексного переменного в сочетании с декомпозицией исходной области. В качестве исходных уравнений используется разложение в ряд Лорана необходимого и достаточного признака аналитичности функций. Координатными функциями служат члены рядов Лорана для искомых потенциалов теории упругости в каждой из подобластей декомпозированной области. Предлагаемый метод позволяет избежать составления интегральных уравнений, сохраняя преимущества метода граничных элементов.

**1. Условия аналитичности.** Необходимый и достаточный признак аналитичности функции  $\Phi$  в заданной области  $V$  с границей  $\partial V$  может быть представлен в виде [1]

$$\int_{\partial V} \frac{\Phi(t) dt}{t-z} = 0, \quad z \notin V \quad (1.1)$$

Будем предполагать, что  $V$  — произвольная замкнутая многосвязная область, граница которой  $\partial V$  удовлетворяет условию Гельдера (фиг. 1), а бесконечно удаленная точка не принадлежит области  $V$ . Если  $\{z_m\}$  — произвольные точки внутренних подобластей, не принадлежащих  $V$ , то условие (1.1) после разложения его в ряд Лорана может быть заменено бесконечной системой уравнений для аналитической функции  $\Phi$

$$\int_{\partial V} \Phi(t) \xi dt = 0 \quad (\xi = t^k, (t-z_m)^{-k-1}, k = 0, 1, \dots) \quad (1.2)$$

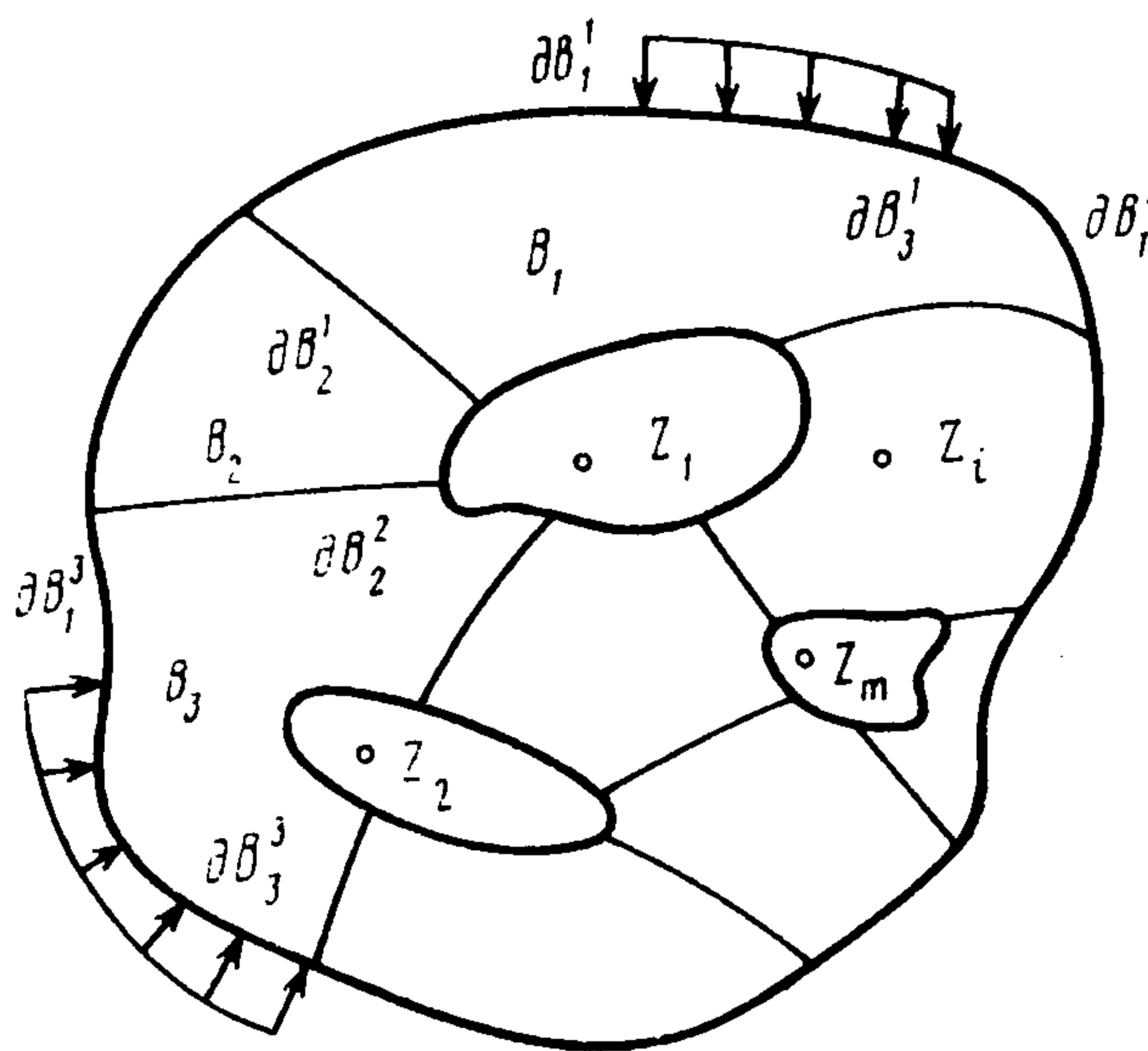
Положим, что рассматриваемая область  $V = UB^i$  декомпозирована так, что внутри каждой подобласти  $B^i$  функция  $\Phi(z)$  может быть представлена своим рядом Лорана

$$\Phi^i = \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-\infty} \Phi_{ms}^i (z-z_m)^s + \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s^i (z-z_i)^s \quad (1.3)$$

где  $M+1$  — связность области  $V$ ,  $z_i$  — произвольная точка подобласти  $B^i$ . На линиях склейки подобластей должны выполняться условия аналитической продолжимости  $\Phi$ .

Функции, входящие в разложение (1.3), выбираются здесь в качестве координатных функций метода проектирования.

**2. Смешанная задача теории упругости.** Граничные условия смешанной задачи теории упругости в терминах комплексных потенциалов могут



Фиг. 1

быть представлены в виде [2].

$$\varphi - \beta t \bar{\varphi}' - \beta \psi = \alpha u, \quad \alpha = 2G\beta \quad (2.1)$$

для частей контура, на которых заданы перемещения, и

$$\varphi + t \bar{\varphi}' + \bar{\psi} = f, \quad f = i \int_{t_1}^t (X_n + iY_n) dt + C_1 \quad (2.2)$$

для частей контура, на которых заданы напряжения. Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — искомые аналитические функции комплексного переменного,  $t$  — координаты границы,  $\beta = (3 - 4\sigma)^{-1}$  для плоской задачи,  $\beta = (1 + \sigma)(3 - \sigma)^{-1}$  для обобщенного плоского напряженного состояния,  $G$  — модуль сдвига,  $u$  — комплексное перемещение точек границы,  $X_n + iY_n$  — внешняя нагрузка, приложенная в точках границы  $B$ .

На линиях склейки должны быть выполнены условия

$$u^i = u^j, \quad (X_n + iY_n)^i = (X_n + iY_n)^j \quad (2.3)$$

где индексы  $i$  и  $j$  означают номера смежных подобластей.

Как известно [2],  $X_n + iY_n = -id(\varphi + t\bar{\varphi}' + \bar{\psi})/dt$ , так что второму уравнению (2.3) можно придать вид

$$(\varphi + t\bar{\varphi}' + \bar{\psi})^i = (\varphi + t\bar{\varphi}' + \bar{\psi})^j + C_2^* \quad (2.4)$$

Учитывая формулу (2.1), первое уравнение (2.3) можно переписать следующим образом:

$$(\alpha^{-1}(\varphi - \beta t \bar{\varphi}' - \beta \bar{\psi}))^i = (\alpha^{-1}(\varphi - \beta t \bar{\varphi}' - \beta \bar{\psi}))^j \quad (2.5)$$

Из формул (2.4) и (2.5) можно получить также формулу

$$\varphi^i = a\varphi^j + bt\bar{\varphi}^{j'} + b\bar{\psi}^j + C_2, \quad C_2 = C_2^* \beta^i (1 + \beta^i)^{-1} \quad (2.6)$$

$$a = (\beta^i/\alpha^i + 1/\alpha^j)/(\beta^i/\alpha^i + 1/\alpha^i), \quad b = (\beta^i/\alpha^i - \beta^j/\alpha^j)/(\beta^i/\alpha^i + 1/\alpha^i)$$

Спроектируем уравнения (2.1), (2.2) и (2.6) на уравнения (1.2). В результате получим

$$\int_{\partial B_1^i} (-\beta^i t \bar{\varphi}^i - \beta^i \bar{\psi}^i) \xi dt + \int_{\partial B_2^i} (t + \bar{\varphi}^{i'} + \bar{\psi}^i + C_1) \xi dt +$$

$$+ \int_{\partial B_3^i} (b^j t \bar{\varphi}^{j'} + b^j \bar{\psi}^j + C_2) \xi dt = \int_{\partial B_1^i} \alpha^i u^i \xi dt + \int_{\partial B_2^i} f \xi dt \quad (2.7)$$

$$(\xi = t^k, (t - z_m)^{-k-1}; i = 1, 2, \dots, I; k = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots, k, M)$$

Переходя в уравнениях (2.1), (2.2) и (2.6) к сопряженным величинам и вновь проектируя полученные выражения на уравнения (1.2), получим другую группу уравнений

$$\int_{\partial B_1^i} (\alpha^i \bar{\varphi}^i - \beta^i t \varphi^{i'}) \xi dt + \int_{\partial B_2^i} (\bar{\varphi}^i + t \varphi^{i'} + C_1) \xi dt +$$

$$+ \int_{\partial B_3^i} (\alpha \bar{\varphi}^j + b t \varphi^{j'} + \bar{C}_2) \xi dt = \int_{\partial B_1^i} \alpha^i \bar{u}^i \xi dt + \int_{\partial B_2^i} \bar{f} \xi dt \quad (2.8)$$

$$(\xi = t^k, (t - z_m)^{-k-1}; i = 1, 2, \dots, I; k = 0, 1, \dots, k; m = 1, 2, \dots, M)$$

Здесь  $\partial B_1^i$  — часть границы с заданными напряжениями,  $\partial B_2^i$  — часть границы с заданными перемещениями,  $\partial B_3^i$  — линия склейки подобластей  $B^i$  и  $B^j$ ,  $I$  — число подобластей области  $B$ .

Заменяя граничные значения аналитических функций  $\varphi$  и  $\psi$  их соответствующими редуцированными разложениями в ряд Лорана, уравнения

(2.7) можно преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений. Пусть

$$\begin{aligned}\varphi^i &= \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{N_1-1} \varphi_{sm}^i (z - z_m)^s + \sum_{s=0}^{N_2} \varphi_s (z - z_i)^s \\ \psi^i &= \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} \psi_{sm}^i (z - z_m)^s + \sum_{s=0}^{N_2} \psi_s (z - z_i)^s \\ \varphi^{i'} &= \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} s \varphi_{sm}^i (z - z_m)^{s-1} + \sum_{s=0}^{N_2} s \varphi_s (z - z_i)^{s-1}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Подстановка представлений (2.9) в уравнения (2.7), (2.8) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$TA = F \quad (2.10)$$

где  $A$  — вектор искомых коэффициентов разложений (2.9), а  $T$  и  $F$  — соответственно матрица и вектор, компоненты которых с точностью до постоянной являются композицией интегралов вида

$$\begin{aligned}\int_{\partial B^i} s (t - z_m)^{-s+1} t^{k+1} dt, & \quad \int_{\partial B^i} st \overline{(t - z_m)^{-s+1}} (t - z_m)^{-k} dt, \\ \int_{\partial B^i} \overline{(t - z_m)^{-s}} (t - z_m)^{-k} dt, & \quad \int_{\partial B^i} t^{k+1} \overline{(t - z_i)^s} dt\end{aligned}\quad (2.11)$$

и т. п. Здесь  $s$  — целая степень со значениями в интервале принятых границ редукции ряда Лорана,  $\{s: -N_1, N_2\}$ ,  $k$  — целая степень, ограниченная принятым числом уравнений (2.7) и (2.8). Для вычисления интегралов типа (2.11) удобней воспользоваться равенством  $dt = -indl$ ,  $n$  — внешняя единичная нормаль к контуру,  $dl$  — элемент длины контура. Для получения однозначного решения уравнений (2.7) и (2.8) необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

$C_1 = 0$  или  $C_2 = 0$ , а также соотношение

$$(MN_1 + N_2 + 1) = K$$

Компоненты вектора перемещений рассматриваемой задачи примут вид

$$\begin{aligned}u &= \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} (\alpha^i \varphi_{sm}^i (z - z_m)^s - (\beta^i z \overline{\varphi_{sm}^i} (s+1) - \beta \overline{\psi_{sm}}) \overline{(z - z_m)^s}) + \\ &+ \sum_{s=0}^{N_2} (\alpha^i \varphi_s (z - z_i)^s - (\beta^i z \overline{\varphi_s^i} (s+1) - \beta \overline{\psi_s}) (z - z_i)^s)\end{aligned}\quad (2.12)$$

а компоненты поля напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_X + \sigma_Y &= 4 \operatorname{Re} \left( \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} s \varphi_{sm}^i (z - z_m)^{s-1} + \sum_{s=0}^{N_2} s \varphi_s (z - z_i)^{s-1} \right) \\ \sigma_Y - \sigma_X + 2i\tau_{XY} &= 2 \left( z \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} (s(s-1) \varphi_{sm}^i (z - z_m)^{s-2} + \right. \\ &+ s \psi_{sm}^i (z - z_m)^{s-1}) + \sum_{s=0}^{N_2} (s(s-1) \varphi_s (z - z_i)^{s-2} + s \psi_s (z - z_i)^{s-1}) \left. \right)\end{aligned}\quad (2.13)$$

**3. Кручение призматических стержней.** Введением функции кручения  $\varphi$  рассматриваемую задачу можно свести к уравнению Лапласа. При этом касательные напряжения связаны с функцией кручения формулами

$$\tau_{XZ} - i\tau_{YZ} = \theta G ((\partial\varphi/\partial X - i\partial\varphi/\partial Y) - i\bar{z}) \quad (3.1)$$

где  $\theta$  — угол закручивания,  $G$  — модуль сдвига.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi = \partial\varphi/\partial X - i\partial\varphi/\partial Y = 2\partial\varphi/\partial z$$

которая является аналитической, так как

$$\partial\Phi/\partial\bar{z} = 2\partial^2\varphi/\partial z\partial\bar{z} = 4\nabla^2\varphi = 0$$

Формула (3.1) при этом принимает вид

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \theta G (\Phi - i\bar{z}) \quad (3.2)$$

На границе  $\partial B$  области  $B$ , свободной от напряжений, граничное условие задачи кручения в принятых здесь терминах описывается выражением

$$\operatorname{Re} ((\tau_{xz} - i\tau_{yz}) n) = \theta G \operatorname{Re} ((\Phi - i\bar{z}) n) = 0$$

или

$$\Phi n + \overline{\Phi n} = -i (z\bar{n} - \bar{z}n) \quad (3.3)$$

Если область  $B$  декомпозирована так, что  $B = UB^i$ , то на линиях склейки подобластей  $B^i$  и  $B^j$  должны выполняться условия непрерывности функции кручения

$$\varphi^i = \varphi^j \quad (3.4)$$

и равенство касательных напряжений

$$\operatorname{Re} ((\tau_{xz} - i\tau_{yz}) n)^i = \operatorname{Re} ((\tau_{xz} - i\tau_{yz}) n)^j \quad (3.5)$$

Дифференцируя уравнение (3.4) вдоль линии склейки по касательной к ней, имеем

$$d\varphi^i / ds = d\varphi^j / ds$$

или

$$(\operatorname{Re} ((\partial\varphi/\partial X - i\partial\varphi/\partial Y) \tau))^i = (\operatorname{Re} ((\partial\varphi/\partial X - i\partial\varphi/\partial Y) \tau))^j$$

где  $\tau$  — единичная касательная к контуру. Отсюда, учитывая, что  $\tau = -in$ , получим

$$\operatorname{Im} (\Phi n)^i = \operatorname{Im} (\Phi n)^j \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) с учетом (3.2) запишем в виде

$$G^i \operatorname{Re} (\Phi n)^i - G^j \operatorname{Re} (\Phi n)^j = - (G^i - G^j) \operatorname{Im} (\bar{z}n) \quad (3.7)$$

Таким образом, на границе склейки на основании уравнений (3.6) и (3.7) должно выполняться условие

$$\Phi^i n - \frac{G^i + G^j}{G^i} \Phi^j n + \frac{G^i - G^j}{2G^i} \Phi^j n = - \frac{G^i - G^j}{G^i} \operatorname{Im} (\bar{t}n) \quad (3.8)$$

Здесь и выше под  $n$  понимается внешняя нормаль к линии склейки по отношению к подобласти  $B^i$ .

Подставляя уравнения (3.3) и (3.8) в условия (1.2) для каждой из подобластей  $B^i$  и учитывая, что  $dt = -ndl$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_1^i} \overline{\Phi^i n} \xi dl + \int_{\partial B_2^i} \left( - \frac{G^i + G^j}{2G^i} \Phi^j n + \frac{G^i - G^j}{2G^i} \overline{\Phi^j n} \right) \xi dl = \\ & = -i \int_{\partial B_1^i} (t\bar{n} - \bar{t}n) \xi dl - \frac{G^i - G^j}{2G^i} \int_{\partial B_2^i} (t\bar{n} - \bar{t}n) \xi dl \quad (3.9) \\ & (\xi = t^k, (t - z_m)^{-k-1}; k = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

Здесь  $\partial B_1^i$  — свободная граница подобласти  $B^i$ ,  $\partial B_2^i$  — граница склейки подобластей  $B^i$  и  $B^j$ .

Если функция  $\Phi^i$  аппроксимируется координатными функциями

$$\Phi^i = \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} \Phi_{sm} (z - z_m)^s + \sum_{s=0}^{N_2} \Phi_s (z - z_i)^s \quad (3.10)$$

то подстановка представления (3.10) в уравнения (3.9) приводит к системе линейных уравнений  $A\Phi = f$ , где элементы матрицы  $A$  и вектора  $f$  имеют вид (2.11).

Касательные напряжения могут быть вычислены по формуле

$$(\tau_{XZ} - i\tau_{YZ})^i = \theta G^i \left( \sum_{m=1}^M \sum_{s=-1}^{-N_1} \Phi_{sm} (z - z_m)^s + \sum_{s=0}^{N_2} \Phi_s (z - z_i)^s - i\bar{z} \right)$$

Для определения жесткости стержня при кручении воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} D &= - \int_B \operatorname{Im} ((\tau_{XZ} - i\tau_{YZ}) \bar{z} dX dY = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_i G^i \int_{\partial B^i} \left( -\Phi^i \frac{\bar{z}^2}{3} + i \frac{\bar{z}^3}{3} \right) n dl \end{aligned} \quad (3.11)$$

в которой интеграл по области, учитывая аналитичность функции  $\Phi$ , заменен интегралом по контуру.

**4. Изгиб составных стержней поперечной силой.** В соответствии с представлениями Н. И. Мухелишвили [2] задачу изгиба стержней поперечной силой в предположении равенства нормальных напряжений

$$\sigma_z = -W_X (l - s) X / I_Y, \quad \sigma_X = \sigma_Y = 0 \quad (4.1)$$

и отсутствия касательных напряжений  $\tau_{XY}$  можно привести к плоской задаче теории упругости. Здесь  $\sigma_i$  — соответствующие нормальные напряжения,  $W_X$  — поперечная сила, параллельная оси  $X$ ,  $l$  — длина стержня,  $s$  — координата оси стержня,  $I_Y$  — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси  $Y$ .

Для поперечных сечений, составленных из материалов с различными коэффициентами Пуассона, касательные напряжения в комплексной форме можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\tau_{XZ} + i\tau_{YZ})_k &= -W_l G^i I_l^{-1} (\bar{X}_k + \bar{X}_{0k} + g_k(z) - U_k) \\ g_k(z) &= i^{k-1} \left( \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4} \right) z^2 - \frac{3}{4} \bar{z}^2 + \frac{z\bar{z}}{(-1)^k 2} \right) \\ k, l &= 1, 2, k \neq l \end{aligned} \quad (4.2)$$

Первая из этих формул ( $k = 1, l = 2$ ) записана для случая поперечной силы, параллельной оси  $X$ , вторая ( $k = 2, l = 1$ ) для случая поперечной силы, параллельной оси  $Y$ . Здесь  $X_k$  — искомая аналитическая функция,  $U_k$  — перемещения, полученные при решении так называемых дополнительных задач теории упругости [2],  $X_0$  — частное решение уравнения Пуассона,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона

$$4\partial^2 \chi_{0k} / \partial z \partial \bar{s} = (\partial U_k / \partial z + \partial U_k / \partial \bar{z}) (1 - 2\sigma)^{-1} \quad (4.3)$$

Так как

$$\partial U_k / \partial z + \partial U_k / \partial \bar{z} = (1 - \beta) \alpha^{-1} (\varphi_k' + \bar{\varphi}_k') \quad (4.4)$$

где  $\varphi$  — комплексный потенциал дополнительных задач, то

$$X_{0k} = (1 - \beta) (1 - 2\sigma)^{-1} (\varphi_k' z + \varphi_k) / 4 \quad (4.5)$$

Выписанные представления позволяют свести рассматриваемую зада-

чу к следующей краевой задаче аналитических функций с граничными условиями:

на свободных границах

$$X_k n + \overline{X_k n} = f_k \quad (4.6)$$

на линиях склейки

$$\begin{aligned} G^i (X_k n + \overline{X_k n})^i - G^j (X_k n + \overline{X_k n})^j &= G^i f^i - G^j f^j \\ (X_k n - \overline{X_k n})^i - (X_k n - \overline{X_k n})^j &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь

$$-f_k = \overline{X_{0k}} + g_k(z) - U_k$$

Таким образом, задача с условиями (4.6), (4.7) для аналитической функции  $X$  имеет тот же вид, что и задача кручения (3.3), (3.7) для функции  $\Phi$ , отличаясь лишь правой частью уравнения (3.8), которая в рассматриваемом случае равна  $-\text{Im}((G^i f_k^i - G^j f_k^j) n)$ . Значения этого выражения могут быть найдены как решения дополнительных задач теории упругости с помощью уравнений, представленных в п. 1.

Решение задачи (4.6), (4.7), выполняемое по аналогии с задачей кручения, дает возможность определить координаты центра изгиба сечения  $(x_k)$ , если воспользоваться формулой

$$x_k = \int_B \text{Im}((\tau_{XZ} + i\tau_{YZ})_l \bar{z} dX dY) \quad (4.8)$$

где  $(\tau_{XZ} + i\tau_{YZ})_l$  — касательные напряжения, возникающие при действии поперечной силы вдоль оси  $X_l$ . Подставляя выражения (4.2) в формулы (4.8) и пользуясь формулой перехода от интегрирования по площади к интегрированию по контуру

$$\int_B f(z, \bar{z}) dX dY = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \left( \int f(z, \bar{z}) d\bar{z} \right) n dl$$

находим

$$\begin{aligned} x_k &= (2I_k)^{-1} \sum_i G^i \left( \int_{\partial B^i} X_k z \bar{z} + ((1 - \beta)(1 - 2\sigma)^{-1} \alpha^{-1/4} + \right. \\ &+ (1 - \beta) \alpha^{-1}) \varphi_k' z \bar{z}^2 / 2 + ((1 - \beta)(1 - 2\sigma)^{-1} \alpha^{-1} - \alpha^{-1}) \varphi_k z \bar{z} - \\ &\left. - (1 - \beta) \alpha^{-1} \psi_k \bar{z}^2 / 2 + i^{k-1} \left( \left( \frac{\sigma}{2} + 1/4 \right) z^2 \bar{z}^2 / 2 - 3\bar{z}^4 / 16 + (-1)^k z \bar{z}^3 / 6 \right) n dl \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Решения задач (4.6), (4.7) дают возможность вычислить направленные жесткости сдвига рассматриваемой области, если воспользоваться формулами [3]

$$(GF)_k = k_k GF = W_k^2 / J_k, \quad J_k = \int_B |\tau_{XZ} + i\tau_{YZ}|_k^2 dX dY$$

откуда после подстановки формул (4.2) следует

$$(GF)_k = I_l^2 \left( \sum_i G^i \int_B |\overline{X_k} + \overline{X_{0k}} + g_k(z) - U_k|^2 dX dY \right) \quad (4.10)$$

5. Оценка метода. Теорема. Пусть для аналитической функции  $\Phi$ , определенной в многосвязной области  $B$  с границей  $\partial B$ , удовлетворяющей условию Гельдера, задано граничное условие

$$\Phi = F(\overline{\Phi}, \Phi', \overline{\Phi'}, t) \quad (5.1)$$

в котором функция  $F$  удовлетворяет условию Гельдера

$$|F(t) - F(t_0)| \leq A |t - t_0|^\mu, \quad \mu < 1$$

равномерно по  $\Phi$ . Пусть

$$\Delta = \Phi^* - F(\bar{\Phi}^*, \Phi^{*'}, \bar{\Phi}^{*'}, t) \quad (5.2)$$

— граничное значение функции, для которой  $\Phi^*$  — произвольная аналитическая функция в области  $B$ .

Тогда если справедлива система равенств

$$\int_{\partial B} F \xi dt = 0 \quad (\xi = (t^k, k = 0, 1, \dots, K), \xi = (t - z_m)^k, \\ k = -1, \dots, -N; m = 1, \dots, M) \quad (5.3)$$

где  $\{z_m\}$  — произвольные точки внутренних односвязных областей, не принадлежащих области  $B$ , то существует такая декомпозиция области  $B$ , что

$$\Delta = o(\min_m (|t|^{-K-2}, |t - z_m|^N)) \quad (5.4)$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$\varphi = \int_{\partial B} \Delta (t - z)^{-1} dt \quad (5.5)$$

аналитическую во всех точках  $z \notin B$ . Так как функция  $\Phi^*$  аналитична в области  $B$ , то

$$\varphi = - \int_{\partial B} F(\bar{\Phi}^*, \Phi^{*'}, \bar{\Phi}^{*'}, t) (t - z)^{-1} dt \quad (5.6)$$

В соответствии с теоремой Лорана о разложении аналитической функции во внешности области  $B$  находим

$$\varphi = \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{ms} (z - z_m)^s - \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s z^{-s} \quad (5.7)$$

где  $\varphi_{ms}$  и  $\varphi_s$  — коэффициенты разложения функции  $\varphi$ .

В силу формулы Сохоцкого — Племеля [1] для точек  $t \in \partial B$ , учитывая равенства (5.3), получим

$$\frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \Delta (t - t_0)^{-1} dt = \sum_{m=1}^M \sum_{s=N+1}^{\infty} \varphi_{ms} (t - z_m)^s + \sum_{s=K+2}^{\infty} \varphi_s t^{-s}$$

откуда следует

$$\Delta \leq |(2\pi i)^{-1} \int_{\partial B} (F(t) - F(t_0)) (t - t_0)^{-\mu} ||t - t_0|^{\mu-1} d|t - t_0| + \Sigma_1 + \Sigma_2| \leq \\ \leq (2\pi\mu)^{-1} AR^\mu + |\Sigma_1| + |\Sigma_2| \quad (5.8)$$

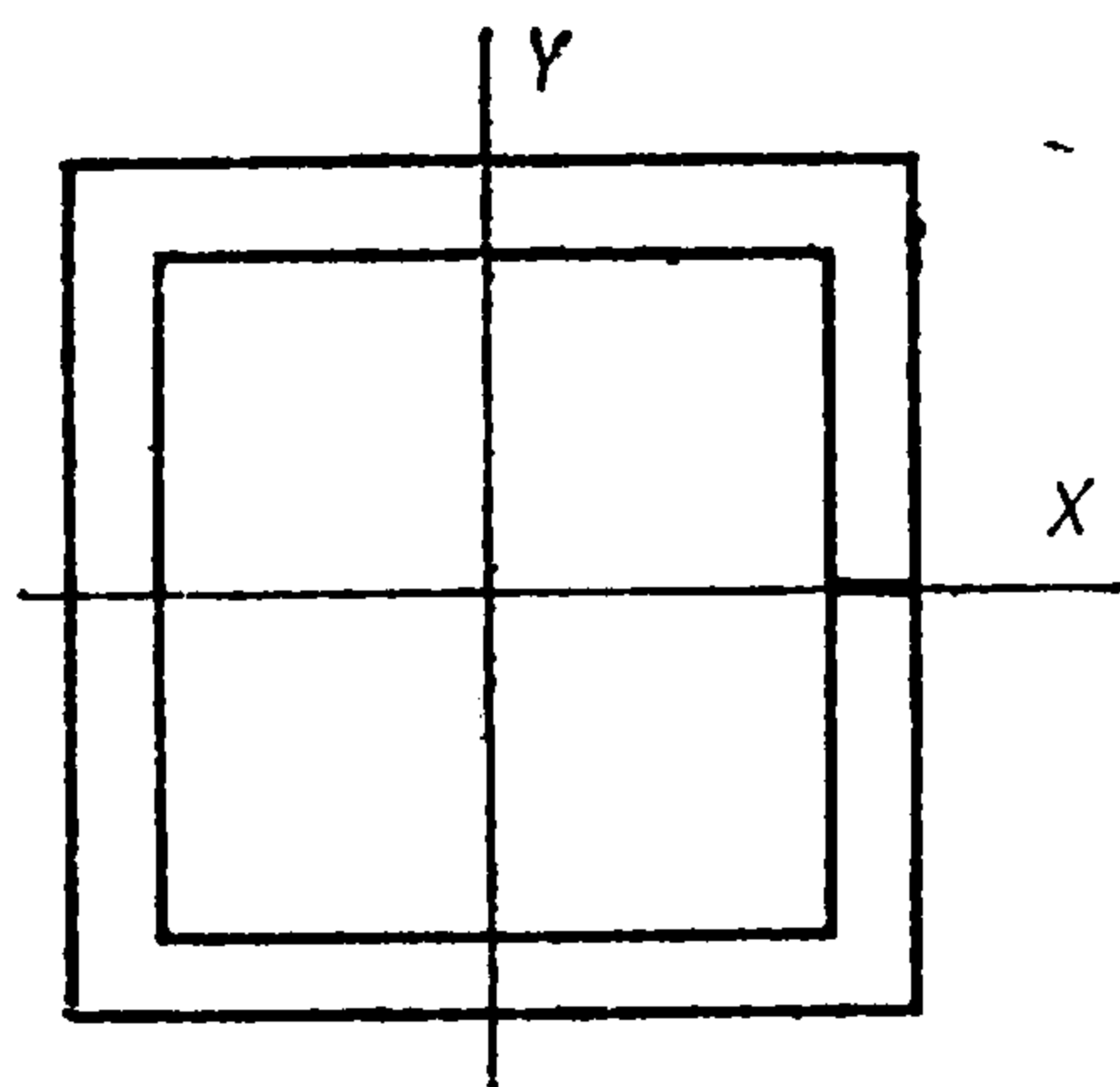
Здесь  $R = \max (t - t_0)$  — максимальное расстояние между точками декомпозированной области.

Если

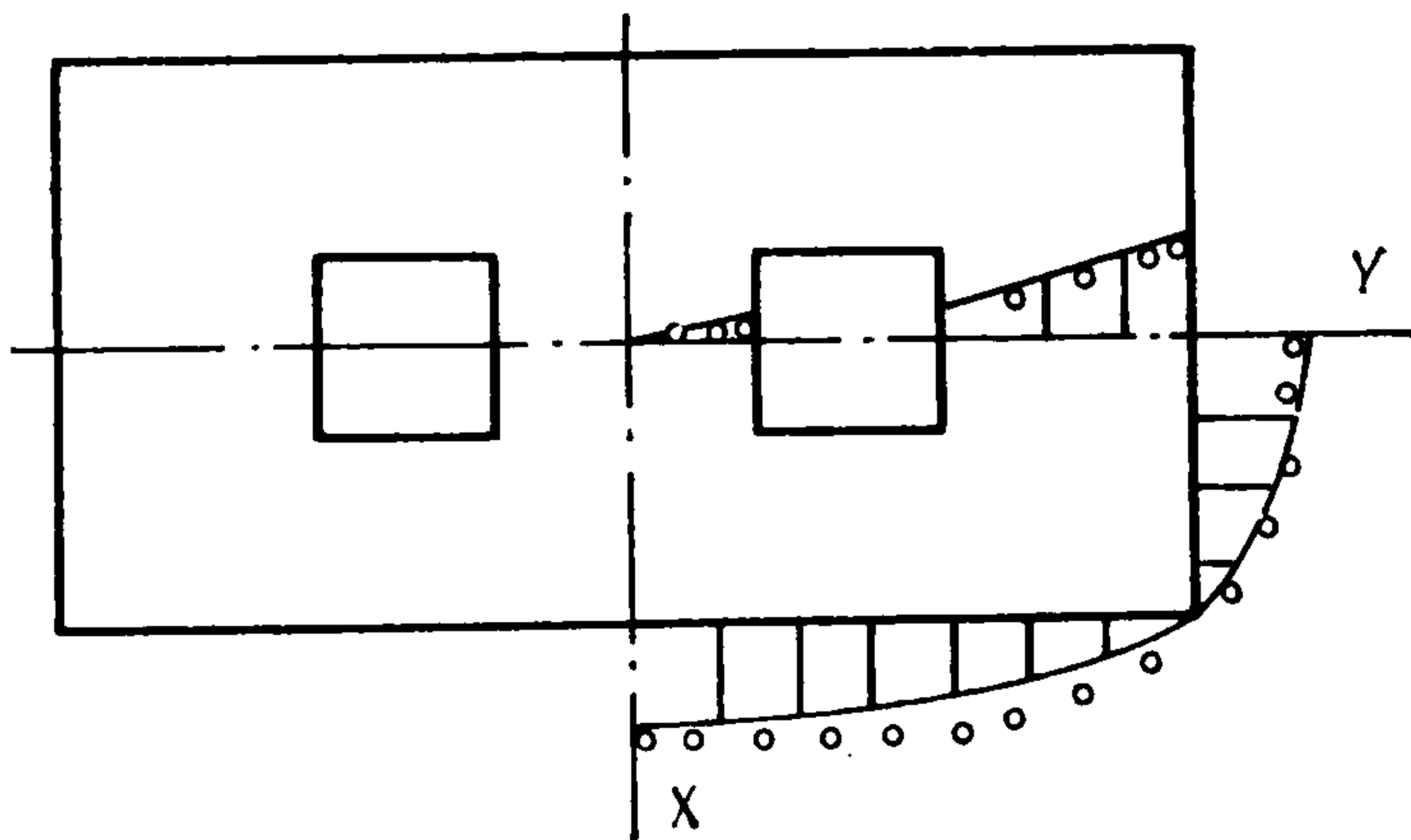
$$R \leq (2\pi\mu)^\mu A^{-\mu} o(\min_m (|t - z_m|^N, |t|^{-K-2})) \quad (5.9)$$

то из неравенства (5.8) получаем оценку (5.4) и доказательство теоремы.

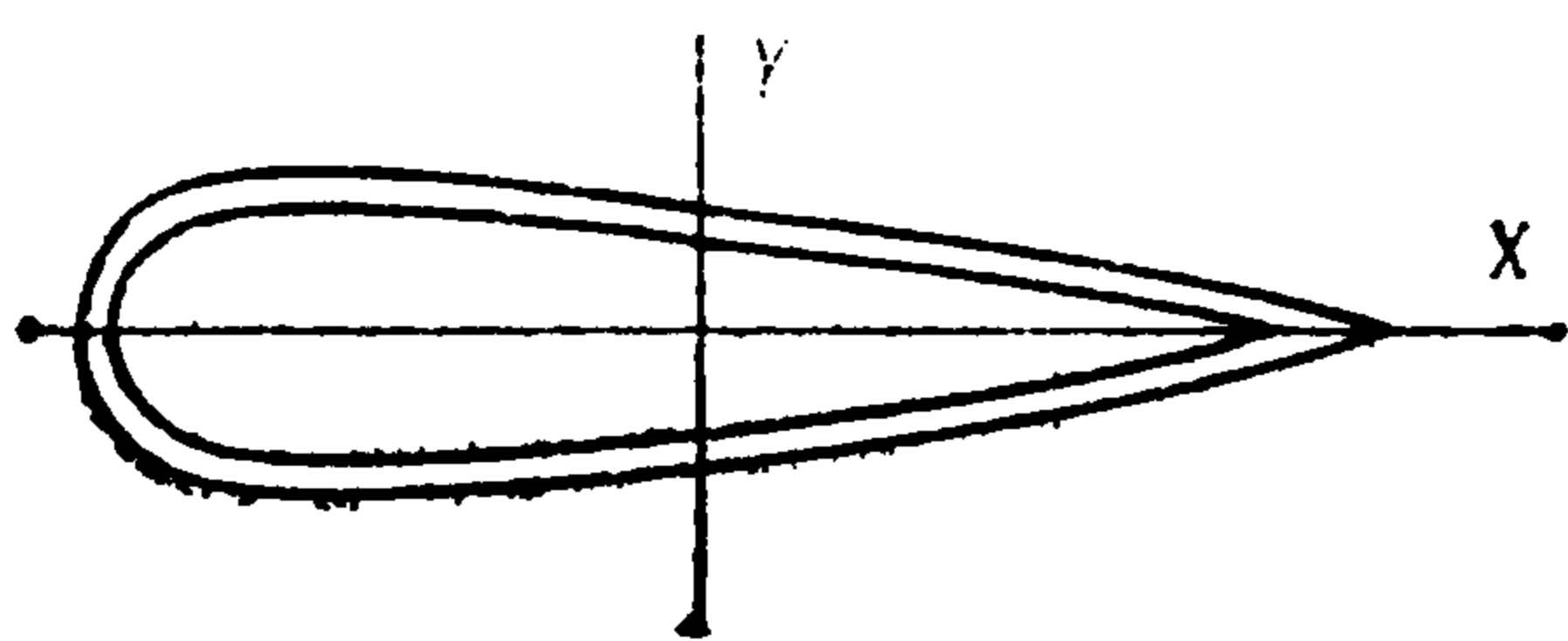
**6. Численная реализация.** Изложенные исследования легли в основу программного комплекса, результаты работы которого иллюстрируются сравнением вычисленных по этим программам значений геометрических и жесткостных характеристик ряда тестовых сечений с известными литературными данными (фиг. 2, 3) и новыми результатами по характеристикам нескольких профилей лопастей ветроэнергетических установок (фиг. 4, 5). Для сечения (фиг. 2), представляющего собой квадратное кольцо толщиной 0,01 м и внешней стороной 0,10 м и имеющего разрез, координаты центра изгиба, вычисленные по известным формулам [3] для тонкостенных элементов и по формуле (4.9)



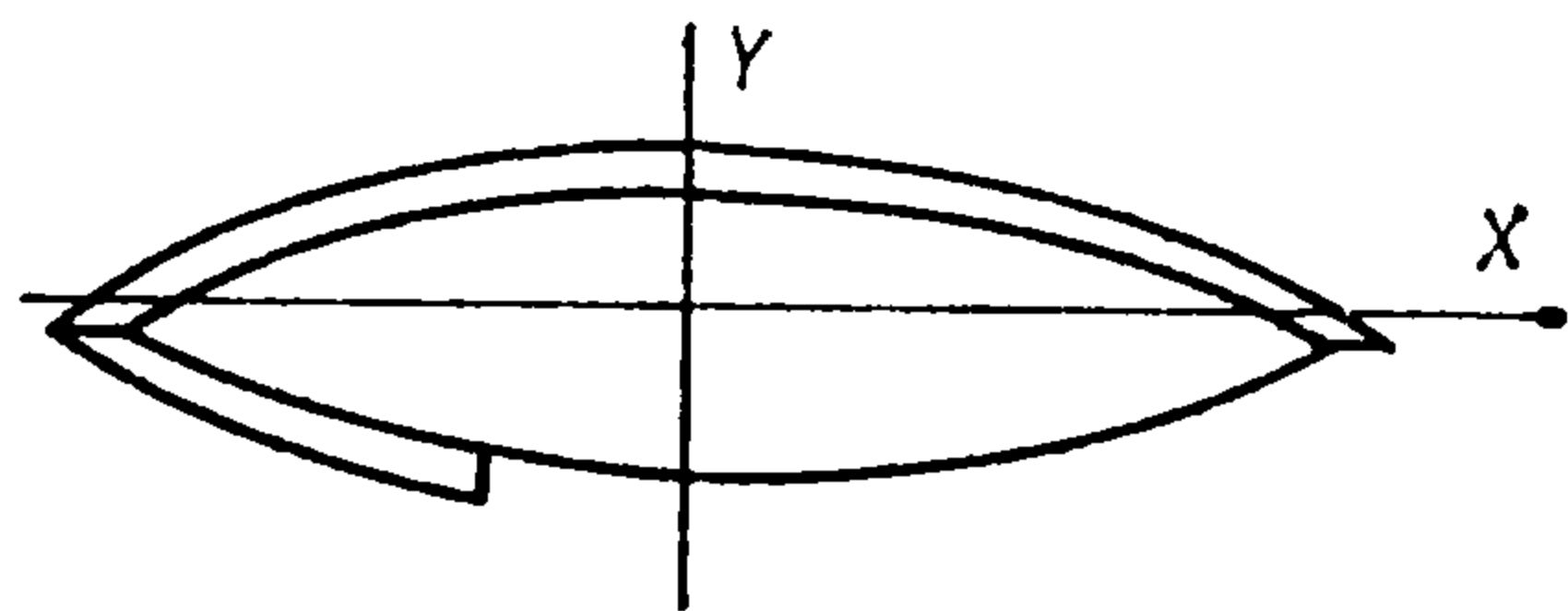
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

приняли значения  $-0,112$  и  $-0,106$  м соответственно, крутильная жесткость по данным [4] и по формуле (3.11)  $4,73 \cdot 10^5$  и  $4,71 \cdot 10^5$   $\text{Нм}^2$ . Кроме того, по формуле (4.10) были найдены значения направленных жесткостей сдвига  $(GF)_x = 228,5$  Н,  $(GF)_y = 175,6$  Н. Модуль сдвига  $G = 3,98 \cdot 10^4$   $\text{Нм}^2$ . Для сечения (фиг. 3), приведенного в [4], при том же значении модуля сдвига крутильная жесткость приняла значение  $1,17 \cdot 10^5$   $\text{Нм}^2$  по обеим формулам, а направленные жесткости сдвига  $(GF)_x = 527,8$  Н и  $(GF)_y = 288,4$  Н. Для этого же сечения были определены также значения касательных напряжений во внутренних точках области. Приведенные графические сопоставления численных результатов свидетельствуют о достаточной близости решений, приведенных в [4] и в настоящей работе.

На фиг. 4 и 5 изображены поперечные сечения лопастей ветроэнергетических установок, имеющих хорду  $B = 0,30$  м, высоту в модуле  $0,072$  и  $0,064$  м, толщину стенки  $0,004$  и  $0,006$  м соответственно. При модуле сдвига  $G = 2,65 \cdot 10^{11}$   $\text{Нм}^{-2}$  для сечения, изображенного на фиг. 4, координаты центра изгиба приняли значения:  $x = -0,0399$  м,  $y = 0$ , направленные жесткости сдвига  $(GF)_x = 1,28 \cdot 10^8$  Н,  $(GF)_y = 9,39 \cdot 10^7$  Н, крутильная жесткость  $D = 1,63 \cdot 10^5$   $\text{Нм}^2$ . Для сечения, изображенного на фиг. 5, соответствующие величины таковы:  $x = -0,194$  м,  $y = 0,0293$  м,  $(GF)_x = 1,21 \cdot 10^8$  Н,  $(GF)_y = 7,03 \cdot 10^7$  м,  $D = 1,83 \cdot 10^4$   $\text{Нм}^2$ . Во всех изображенных сечениях начало системы координат совпадает с центром масс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
3. Справочник металлиста. Т. 2. М.: Машгиз, 1959. 974 с.
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.