

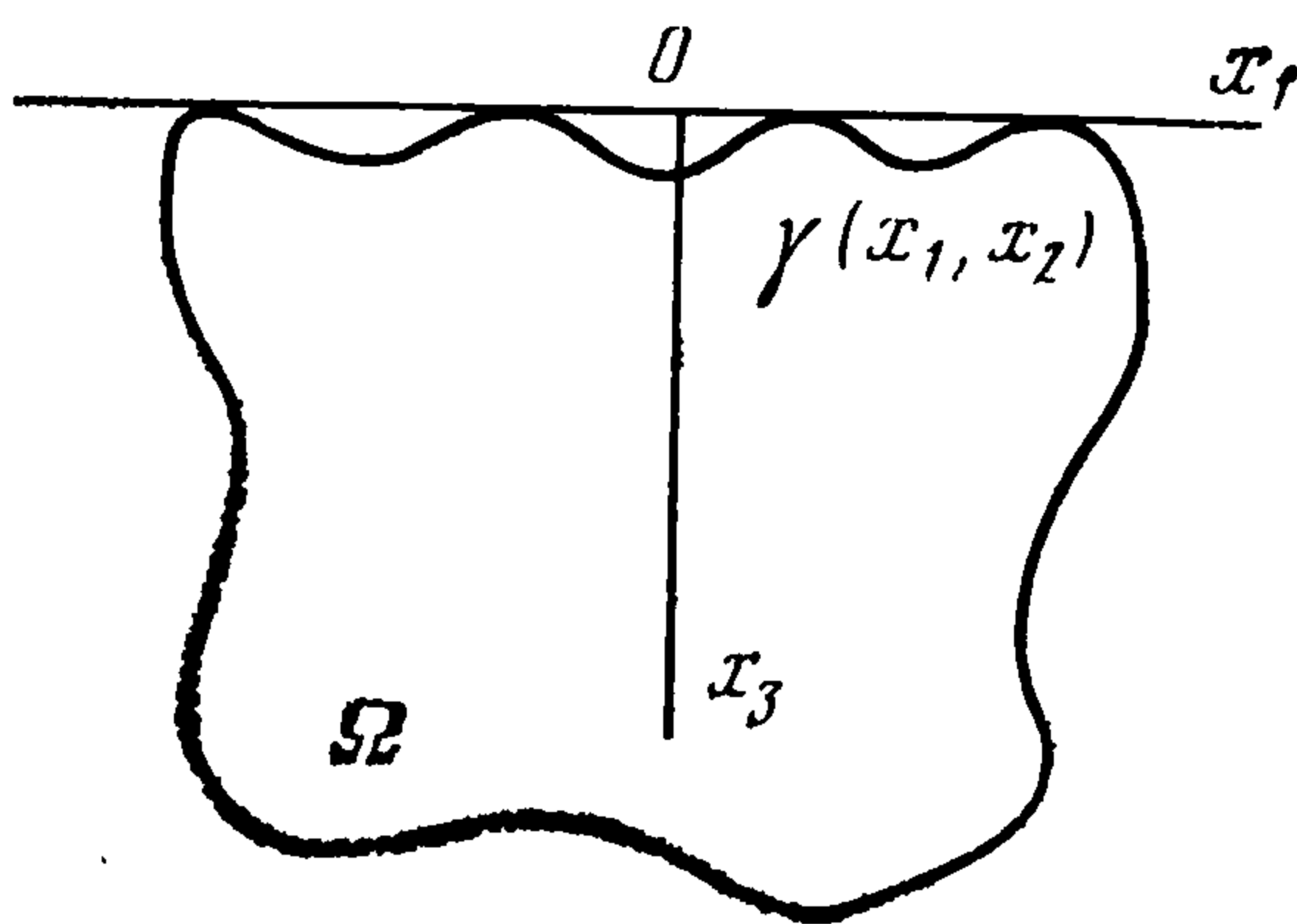
УДК 539.3 : 534

В. А. Ломазов

ЗАДАЧА ДИАГНОСТИКИ УПРУГИХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ

Под проблемой диагностики понимается задача определения характеристик материала по экспериментально полученной информации о физических полях, возникающих в теле под влиянием специальным образом подобранных внешних воздействий [1]. В работе исследуется задача определения плотности и жесткостных характеристик слабо неоднородной и анизотропной линейно упругой среды по измеренным на поверхности тела параметрам протекающих в нем упругих процессов, что соответствует возможностям современной измерительной техники [2]. Ограничимся рассмотрением почти стационарных процессов, т. е. процессов, инициируемых нагружениями, вызывающими в контрольном однородном изотропном теле той же формы стационарные процессы. Таким образом, некоторая нестационарность исследуемых процессов в исследуемом теле полагается связанной исключительно со слабой неоднородностью и анизотропией этого тела. Рассматриваемое полуограниченное тело со слабо криволинейной границей может служить моделью массивного изделия. В математическом плане исследуемая задача относится к типу обратных задач математической физики [3].

1. Распространение упругих волн в неоднородной анизотропной среде, заполняющей полуограниченную область $\Omega = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty,$



Фиг. 1

$\gamma(x_1, x_2) \leq x_3 < \infty, 0 \leq \gamma \leq M - \text{const}, \gamma \in C^1(R^2)$ (фиг. 1) описывается уравнениями [4]

$$\rho u_i'' - (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} = f_i; \quad u_i \in C^4(\Omega \times R_+), \quad \rho, C_{ijkl} \in C^1(\Omega) \quad (1.1)$$

которые замыкаются начальными и граничными условиями

$$u_i|_{t=0} = \varphi_i(\mathbf{x}), \quad u_i'|_{t=0} = \psi_i(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

$$(C_{ijkl} u_{k,l} n_j)|_{x_3=\gamma} = p_i(x_1, x_2, t) \quad (1.3)$$

$$n_r = \gamma_{,r} (1 + \gamma_{,1} + \gamma_{,2})^{-1/2}, \quad n_3 = (1 + \gamma_{,1} + \gamma_{,2})^{-1/2}$$

Плотность ρ и компоненты тензора жесткости C_{ijkl} зависят от пространственных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, а компоненты вектора перемещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ являются функциями \mathbf{x} и времени t . Точки означают производные по времени, индекс после запятой — производную по соответствующей координате. По повторяющемуся индексу (если противное не оговорено) производится суммирование; всюду $[i, j, k, l = 1, 2, 3; r = 1, 2; n = 1, 2, \dots, N$.

Рассматриваемая задача диагностики будет заключаться в определении $\rho(\mathbf{x}), C_{ijkl}(\mathbf{x})$ из нескольких задач вида (1.1)—(1.3) при N различных

типах нагружений (после подстановки в (1.1)—(1.3): $u_i^n \rightarrow u_i$, $\{\varphi, \psi, p, f\}_i^n \rightarrow \{\varphi, \psi, p, f\}_i$) по дополнительной информации

$$u_i^n|_{x_3=\gamma} = \chi_i^n(x_1, x_2, t), \quad C_{ijkl}|_{x_3=\gamma} = C_{ijkl}^{(0)} \quad (1.4)$$

которая предполагается полученной в результате непосредственных измерений. Число N , соответствующее количеству испытаний с различными типами нагружений, зависит от типа анизотропии исследуемой среды (числа искомых функций).

В дальнейшем будем считать, что исследуемая среда слабо неоднородна и анизотропна, т. е. величины $|\rho - \rho^{(0)}|/\rho^{(0)}$, $\|C_{ijkl} - C_{ijkl}^{(0)}\|_{C(\Omega)}/\min(\lambda^{(0)}, \mu^{(0)})$ имеют порядок малости ε ($0 < \varepsilon \ll 1$), где $\rho^{(0)}$, $C_{ijkl}^{(0)} = \text{const}$ — характеристики, соответствующие некоторой контрольной однородной изотропной среде, а значит, $C_{ijkl}^{(0)} = \lambda^{(0)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(0)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ [4], $0 < \lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$ — коэффициенты Ламе, δ_{ij} — функция Кронекера.

Отметим, что слабая неоднородность и анизотропия жесткостных свойств материала вовсе не означает, что он будет таковым и в прочностном плане. Так, например, α -облучение металлов меняет модуль Юнга на 10—15% (коэффициент Пуассона меняется еще меньше), в то время как предел текучести увеличивается в несколько раз [5]. Отсюда следует, что неравномерное облучение вызывает слабую неоднородность жесткостных и сильную неоднородность прочностных свойств металлов. Таким образом, определив в рамках задачи диагностики жесткостную неоднородность материала и выделив зоны с различным уровнем радиационных повреждений, можно оценить резервы прочности изделия.

Сравним упругий процесс $u_i^n(x, t)$ с аналогичным образом инициированным процессом $u_i^{(0)n}(x, t)$, протекающим в области Ω , заполненной контрольной однородной изотропной средой. $u_i^{(0)n}$ описывается соотношениями (1.1)—(1.3) после замены $\{\rho, C_{ijkl}\}^{(0)} \rightarrow \{\rho, C_{ijkl}\}(x)$. Будем предполагать, что влияние анизотропии и неоднородности исследуемой среды на количественные характеристики возбужденных в ней процессов достаточно мало и на поверхности тела

$$u_i^n|_{x_3=\gamma} = u_i^{(0)n}|_{x_3=\gamma} + \varepsilon u_i^{(1)n}|_{x_3=\gamma}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

причем

$$\|u_i^{(1)n}|_{x_3=\gamma}\|_{C^2} = O(\|u_i^{(0)n}|_{x_3=\gamma}\|_{C^2})$$

Полагаем также, что искомые характеристики исследуемой среды и протекающих в ней упругих процессов аналитичны по введенному малому параметру ε , т. е.

$$\{\rho, C_{ijkl}, u_i^n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \{\rho, C_{ijkl}, u_i^n\}^{(m)}$$

Отметим, что, ограничившись рассмотрением тел со слабо криволинейной границей, т. е. полагая $\gamma(x_1, x_2) = \varepsilon \alpha(x_1, x_2)$, можно при помощи разложения в ряд Тейлора перейти от значений на поверхности $x_3 = \gamma(x_1, x_2)$ к соответствующим величинам на гиперплоскости $x_3 = 0$. Принятые предположения позволяют в соответствии с процедурой метода возмущений перейти от соотношений (1.1)—(1.4) к цепочке уравнений

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} u_i^{(0)n} - C_{ijkl}^{(0)} u_{k,l}^{(0)n} &= f_i, \dots, \rho^{(0)} u_i^{(m)n} - C_{ijkl}^{(0)} u_{k,l}^{(m)n} = \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} ((C_{ijkl}^{(m-s)} u_{k,l}^{(s)n}),_j - \rho^{(m-s)} u_i^{(s)n}), \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

замыкаемых начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
 u_i^{(m)n} |_{t=0} &= \delta_{0m} \varphi_i, & u_i^{(m)n*} |_{t=0} &= \delta_{0m} \psi_i^n \\
 \left\{ \sum_{s=0}^m \left[\frac{\alpha^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x_3^s} \left(\sum_{q=0}^{m-s} (C_{3ikl}^{(m-s-q)} + \alpha_{,r} C_{rikl}^{(m-s-q-1)} (1 - \delta_{m0})) u_{k,l}^{(q)n} \right) \right] \right\} \Big|_{x_3=0} &= \delta_{0m} p_i^n \\
 \sum_{s=0}^m \left(\frac{\alpha^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x_3^s} u_i^{(m-s)n} \right) \Big|_{x_3=0} &= \delta_{0m} \chi_i^{(0)n} + \delta_{1m} \chi_i^{(1)n} \\
 \sum_{s=0}^m \left(\frac{\alpha^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x_3^s} C_{ijkl}^{(m-s)} \right) \Big|_{x_3=0} &= \delta_{0m} C_{ijkl}^{(0)}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

В дальнейшем характеристики контрольной среды $\{\rho, \lambda, \mu\}^{(0)}$ будем считать известными, т. е. задача диагностики будет заключаться в уточнении характеристик исследуемой среды. Структура соотношений (1.5), (1.6) позволяет искать последовательно по $m = 1, 2, \dots$ $\{u_i^n, \rho, C_{ijkl}\}^{(m)}$. Отметим, что исходная задача определения ρ, C_{ijkl}, u_i^n из N соотношений вида (1.1)—(1.4) нелинейна (так как эти соотношения содержат произведения искомых функций). В этом смысле переход к соотношениям (1.5), (1.6) можно рассматривать как основанную на методе возмущения процедуру, широко используемую при решении нелинейных задач распространения упругих волн [6—8].

Приведем алгоритм нахождения $u_k^{(m)n}(x, t)$ $\{C_{ijkl}, \rho\}^{(m)}(x)$.

Заметим, что первое матричное уравнение из (1.5) (при $m = 0$) не содержит неизвестных $\{\rho, C_{ijkl}, u_i^n\}^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots$) и вместе с первыми тремя условиями (1.6), рассматриваемыми при $m = 0$, представляют собой относительно $u_i^{(0)n}(x, t)$ серию обычных начально-краевых задач, описывающих распространение упругих волн в области Ω , заполненной однородной изотропной средой. В дальнейшем для простоты будем полагать решения этих задач известными и имеющими вид $u_i^{(0)n}(x, t) = \sin(a_n t) g_i^n(x)$ (по n не суммировать), что, естественно, накладывает ограничения на $\{\varphi, \psi, p, f\}_i^n$, т. е. на условия иницирования упругих процессов в исследуемой среде. Отметим, что конкретный вид $\{\varphi, \psi, p, f\}_i^n$ может быть получен путем непосредственной подстановки $u_i^{(0)n}(x, t)$ в (1.1)—(1.3) после замены $\{\rho, C_{ijkl}\}^{(0)} \rightarrow \{\rho, C_{ijkl}\}$.

2. В соответствии с (1.5), (1.6) относительно функций $\{\rho, C_{ijkl}, u_i^{(n)}\}^{(1)}$ имеем

$$\rho^{(0)} u_i^{(1)n**} - C_{ijkl}^{(0)} u_{k,l}^{(1)n} = -\rho^{(1)} u_i^{(0)n**} + (C_{ijkl}^{(1)} u_{k,l}^{(0)n}),_j \tag{2.1}$$

$$u_i^{(1)n} |_{t=0} = 0, \quad u_i^{(1)n*} |_{t=0} = 0 \tag{2.2}$$

$$(C_{3jkl}^{(0)} u_{k,l}^{(1)n} + C_{3jkl}^{(1)} u_{k,l}^{(0)n} + \alpha C_{3jkl}^{(0)} u_{k,l}^{(0)n} - \alpha_{,r} C_{rjkl}^{(0)} u_{k,l}^{(0)n}) |_{x_3=0} = 0$$

$$(u_i^{(1)n} + \alpha u_{i,3}^{(0)n}) |_{x_3=0} = \chi_i^{(1)n}, \quad C_{ijkl}^{(1)} |_{x_3=0} = 0$$

Задача определения этих функций во многом аналогична линеаризованной задаче диагностики [1, 9, 10], поэтому ограничимся приведением схемы ее решения. Задача разбивается на два этапа: этап 1 — определение $u_i^{(1)n}(x, t)$, этап 2 — восстановление $\{\rho, C_{ijkl}\}^{(1)}(x)$ из правой части матричного уравнения (2.1).

Этап 1. Применим к уравнению (2.1) оператор $L = (\partial_t + a_n^2 I)$ (I — единичный оператор), после чего при каждом фиксированном n получим

$$\rho^{(0)} v_i^{**} - C_{ijkl}^{(0)} v_{k,l} = 0 \tag{2.3}$$

Относительно введенной неизвестной вектор-функции $v_i = u^{(1)n..} + a_n^2 u_i^{(1)n}$ (по n не суммировать) из первых трех условий (2.2) имеем

$$\begin{aligned} v_i|_{t=0} = 0, \quad v_i|_{x_3=0} = L\chi_i^{(1)n}, \quad v_{r,3}|_{x_3=0} = -L\chi_{3,r}^{(1)n}/\mu^{(0)}, \\ v_{3,3}|_{x_3=0} = -\lambda^{(0)}L\chi_{r,r}^{(1)''}/(\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Краевые условия (2.4) с учетом (2.3) позволяют найти $\{U, U_{,3}, W, W_{,3}\}$ при $x_3 = 0$, где $U = \text{div } v$, $W = (W_1, W_2, W_3) = \text{rot } v$.

Из первого условия (2.4) следует, что начальные условия для этих функций будут однородными: $U|_{t=0} = 0$, $W|_{t=0} = 0$. Применение операторов div и rot к уравнениям (2.3) позволяет получить

$$\rho^{(0)}U'' - (\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)})\Delta U = 0, \quad \rho^{(0)}W'' - \mu^{(0)}\Delta W = 0$$

Таким образом, относительно U и каждой из трех компонент (из которых независимы только две) вектор-функции W имеем волновое уравнение, однородное начальное условие и два краевых условия при $x_3 = 0$: граничное значение искомой функции и ее нормальной производной, что составляет негиперболическую задачу Коши (задачу Коши с данными на непространственном многообразии) для волнового уравнения [11, 12].

Задача классически некорректна в классе функций $C^n(R_+^3 \times R_+)$: ее решение существует не для любых значений данных Коши (из этого класса) при $x_3 = 0$. Это делает некорректной задачу диагностики в целом. Но решение негиперболической задачи Коши единственно, и его явные представления (наряду с исследованием устойчивости) приведены в [13, 14]. Отметим, что в классе аналитических функций негиперболическая задача Коши для волнового уравнения классически (по Адамару) корректна и может быть сведена к обычной задаче Коши при помощи замены Вольтерры [11]: $it^* \rightarrow x_3$, $ix_3^* \rightarrow t$ (здесь i — мнимая единица), после чего для получения решения можно воспользоваться формулой Кирхгофа. Найдя U, W_1, W_2 можно при помощи (2.4) восстановить $v = (v_1, v_2, v_3)$, а затем из уравнений $u_i^{(1)n..} + a_n^2 u_i^{(1)n} = v_i$ и начальных условий (2.2) при $t = 0$ определить $u_i^{(1)n}(x, t)$, что и составляет первый этап задачи. Процедура первого этапа должна быть проделана N раз.

Этап 2. Зная $u_i^{(1)n}(x, t)$, можно найти правые части уравнений (2.1), которые в соответствии с принятым предположением будут иметь вид $\sin(a_n t) F_i^{(1)n}(x)$ (по n не суммировать). Таким образом, задача второго этапа будет заключаться в определении $\{\rho, C_{ijkl}\}^{(1)}(x)$ из уравнений

$$a_n^2 \rho^{(1)} g_i^n + (C_{ijkl}^{(1)} g_k^n)_{,j} = F_i^{(1)n} \quad (2.5)$$

(по n не суммировать) и краевых условий (2.2). Число N (количество различных режимов тестовых испытаний) выбирается так, чтобы количество независимых скалярных уравнений вида (2.5) соответствовало числу независимых неизвестных.

В случае анизотропии общего вида искомый тензор $C_{ijkl}^{(1)}(x)$ содержит 21 независимую компоненту. Если же заранее известно, что исследуемая среда изотропна, то для определения независимых характеристик среды $\{\rho, \lambda, \mu\}^{(1)}(x)$ достаточно взять $N = 1$, т. е. в этом случае достаточно провести одно динамическое тестовое испытание с измерением трех компонент вектора перемещений на поверхности тела. Конечно, должны быть выполнены ряд требований на функции $g_i^n(x)$, т. е. на условия инициирования упругих волн. В общем случае решение системы уравнений (2.5) связано со значительными трудностями. Задача несколько упрощается при специальном подборе $g_i^n(x)$ [9], что позволяет в ряде случаев однозначно найти $\{\rho, C_{ijkl}\}^{(1)}(x)$ без привлече-

ния граничных значений этих характеристик, т. е. без задания условий вида последних соотношений из (2.2). Этот вопрос будет освещен подробнее при рассмотрении конкретного примера.

3. Для определения $\{\rho, C_{ijkl}, u_i^n\}^{(2)}$ из соотношений (1.5) и (1.6), кроме последнего, будем иметь

$$\rho^{(0)} u_i^{(2)n} - C_{ijkl}^{(0)} u_{k,l}^{(2)n} = -\rho^{(2)} u_i^{(0)n} + (C_{ijkl}^{(2)} u_{k,l}^{(0)n})_{,j} + [(C_{ijkl}^{(1)} u_{k,l}^{(1)n})_{,j} - \rho^{(1)} u_i^{(1)n}] \quad (3.1)$$

$$u_i^{(2)n} |_{t=0} = 0, \quad u_i^{(2)n} |_{t=0} = 0$$

$$C_{3jkl}^{(0)} u_{k,l}^{(2)n} |_{x_3=0} = -\{C_{3jkl}^{(2)} u_{k,l}^{(0)n} + [C_{3jkl}^{(1)} u_{k,l}^{(1)n} + \alpha C_{3jkl}^{(0)} u_{k,l}^{(1)n} + \alpha (C_{3jkl}^{(1)} u_{k,l}^{(0)n})_{,3} + 1/2 \alpha^2 C_{3jkl}^{(0)} u_{k,l}^{(0)n} + \alpha_{,r} (C_{rjkl}^{(0)} u_{k,l}^{(1)n} + C_{rjkl}^{(1)} u_{k,l}^{(0)n}) + C_{rjkl}^{(0)} \alpha (\alpha_{,r} u_{k,l}^{(0)n})_{,3}]\} |_{x_3=0} \\ \{u_i^{(2)n} + [\alpha u_i^{(1)n} + 1/2 \alpha^2 u_i^{(0)n}]\} |_{x_3=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$\{C_{ijkl}^{(2)} + [\alpha C_{ijkl}^{(1)}]_{,3}\} |_{x_3=0} = 0$$

В соотношениях (3.1), (3.2) квадратными скобками выделены выражения, состоящие из уже найденных функций. Представим искомое решение $u_i^{(2)n}(x, t)$ в виде $u_i^{(2)n} = U_i^n + V_i^n$, где матричная функция $V_i^n(x, t)$ удовлетворяет соотношениям (3.1), (3.2), в которых в качестве правых частей стоят только выражения в квадратных скобках. Задача определения V_i^n в математическом плане представляет собой несколько обычных начально-краевых задач для уравнений динамической теории упругости, описывающих распространение упругих волн в полупространстве под действием массовых сил и силовых воздействий на границе. После нахождения $V_i^n(x, t)$ задача определения $U_i^n, C_{ijkl}^{(2)}, \rho^{(2)}$ из (3.1), (3.2) полностью аналогична задаче определения $u_i^{(1)n}, C_{ijkl}^{(1)}, \rho^{(1)}$ из (2.1), (2.2), рассмотренной в п. 2.

Видно, что таким образом можно последовательно получить все члены разложений характеристик упругих процессов $u_i^n(x, t)$, используемых для диагностики, и, что более важно в рамках данной задачи, характеристики исследуемой среды $\{\rho, C_{ijkl}\}(x)$.

4. В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда полуограниченное тело представляет собой полупространство $x_3 \geq 0$ ($\gamma \equiv 0$) и заранее известно, что исследуемая среда изотропна, а ее характеристики зависят только от расстояния до поверхности. Тогда (при не зависящих от x_1, x_2 условиях возбуждения упругих волн) задача диагностики становится одномерной: характеристики среды являются функциями x_3 , а характеристики процессов — функциями x_3 и времени t .

Отметим, что одномерная задача определения характеристик изотропной неоднородной среды или среды с неоднородными начальными деформациями исследовалась и ранее [15, 16]. При этом можно было бы обойтись без ряда упрощающих предположений, необходимых для решения трехмерной задачи. Таким образом, данный пример не претендует на новое исследование одномерной задачи, а лишь иллюстрирует предлагаемый в работе подход в применении его к более простому случаю.

Число искомых характеристик среды сокращается до трех: $\{\rho, \lambda, \mu\}(x_3)$. Поэтому в (1.5), (1.6) и далее положим $N = 1$. Соотношения (2.1), (2.2) при этом примут вид (по i не суммировать)

$$\rho^{(0)} u_i^{(1)1} - G_i^{(0)} u_{i,33}^{(1)1} = (G_i^{(1)} u_{i,3}^{(0)1})_{,3} - \rho^{(1)} u_i^{(0)1} \\ G_i^{(m)} = \mu^{(m)} + \delta_{i3} (\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}) \quad (4.1)$$

$$u_i^{(1)1} |_{t=0} = u_i^{(1)1} |_{t=0} = 0; \quad u_i^{(1)1} |_{x_3=0} = \chi_i^{(1)1}(t), \quad u_{i,3}^{(1)1} |_{x_3=0} = S_i^{(1)1}(t)$$

Применяя к этим соотношениям оператор $L = (\partial_t^2 + a_i^2 I)$ и учитывая, что $u_i^{(0)} \mathbf{1} = \sin(a_i t) g_i(x_3)$ (по i не суммировать), получим относительно $v_i = Lu_i^{(1)} \mathbf{1}$

$$\rho^{(0)} v_i = G_i^{(0)} v_{i,33} = 0 \quad (4.2)$$

$$v_i|_{t=0} = 0; \quad v_i|_{x_3=0} = L\chi_i^{(1)} \mathbf{1}, \quad v_{i,3}|_{x_3=0} = LS_i^{(1)} \mathbf{1}$$

Задача определения $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ соответствует задаче первого этапа диагностики (2.3), (2.4), но в силу принятых предположений, она одномерна, а значит, в отличие от общего трехмерного случая классически корректна. Действительно, функция $\mathbf{v}(x_3, t)$ может быть продолжена на область $t < 0$ антисимметрическим образом: $\mathbf{v}(x_3, -t) = -\mathbf{v}(x_3, t)$ и получаем для каждой компоненты v_i обычную задачу Коши для одномерного волнового уравнения (с точностью до переобозначения $x_3 \leftrightarrow t$). Итак, $v_i(x_3, t)$ можно найти при помощи формулы Даламбера. Далее для определения правой части первого соотношения из (4.1) применим к нему оператор ∂_t и воспользуемся тем, что $u_i^{(1)} \mathbf{1}(x_3, 0) = 0$. Получим

$$\rho^{(1)} g_i a_i^2 + (G_i^{(1)} g_{i,3})_{,3} = a_i^{-1} v_i|_{t=0} = \Phi_i(x_3) \quad (4.3)$$

(по i не суммировать). Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений легко решается. В первые два уравнения (4.3) (при $i = 1, 2$) входят неизвестные $\rho^{(1)}$ и $G^{(1)}_1 = G^{(1)}_2 = \mu^{(1)}$, причем $\rho^{(1)}$ входит линейным алгебраическим образом. Выражая $\rho^{(1)}$ из первого уравнения и подставляя во второе, получим относительно $\mu^{(1)}$ уравнение

$$A\mu^{(1)}_3 + B\mu^{(1)} + C = 0; \quad A(x_3) = a_1 g_1 g_{2,33} - a_2 g_2 g_{1,33}, \quad B(x_3) = a_1 g_1 g_{2,3} - a_2 g_2 g_{1,3}, \quad C(x_3) = a_2 g_2 \Phi_1 - a_1 g_1 \Phi_2$$

Отметим, что A и B зависят от типа нагружения, а C — еще и от результатов измерений.

Пусть $\{A, B, C\}(x_3)$ — аналитические функции. Если $A \neq 0$, то

$$\mu^{(1)}(x_3) = -\exp\left(-\int_0^{x_3} \frac{B(\eta)}{A(\eta)} d\eta\right) \left[\int_0^{x_3} \frac{C(\eta)}{A(\eta)} \exp\left(\int_0^\eta \frac{B(\xi)}{A(\xi)} d\xi\right) d\eta + \mu(0) \right]$$

т. е. для однозначного определения $\mu^{(1)}$ потребовалось задание граничного значения этой функции. Если в некоторой точке x_3^* имеем $A(x_3^*) = 0$ и $B(x_3^*) = 0$, то это позволяет найти $\mu^{(1)}(x_3^*) = -C(x_3^*)/B(x_3^*)$, а значит, однозначность нахождения достигается без использования граничного значения $\mu^{(1)}(0)$. Если $A \equiv 0$, $B \neq 0$, то имеем относительно $\mu^{(1)}$ алгебраическое уравнение и $\mu^{(1)} = -C/B$. Если $A \equiv B \equiv 0$, то это означает, что при данных нагружениях, возбуждающих нестационарные упругие процессы в исследуемой среде, определить $\mu^{(1)}$ невозможно.

После определения $\mu^{(1)}$ из первого уравнения (4.3) найдем

$$\rho^{(1)}(x_3) = [\Phi_1 - (\mu^{(1)} g_{1,3})_{,3}] / (a_1 g_1), \quad a_1 g_1 \neq 0$$

Для определения $G_3^{(1)} = \lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}$ подставим полученное значение $\rho^{(1)}$ в третье уравнение (4.3). Получим уравнение

$$(G_3^{(1)} D)_{,3} = \Phi_3 - \rho^{(1)} a_3^2 g_3, \quad D = g_{3,3}$$

которое легко интегрируется. Заметим, что если $D = 0$ хотя бы в одной точке x_3^* , то в силу ограниченности $G_3^{(1)}$ имеем

$$(G_3^{(1)} D)|_{x_3=x_3^*} = 0$$

и

$$G_3^{(1)}(x_3) = \frac{1}{D(x_3)} \int_{x_3^*}^{x_3} [\Phi_3(\eta) - \rho^{(1)}(\eta) g_3(\eta) a_3^2] d\eta$$

т. е. граничное значение $G_3^{(1)}(0)$ задавать не нужно.

Отметим, что далее при определении $\mu^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$ ($m = 2, 3, \dots$) коэффициенты A , B , D не зависят от m и на втором этапе задачи $\rho^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$ ищутся по аналогичным формулам.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. В соотношениях (4.1) проводилась обезразмеривающая замена переменных и искомых функций по формулам

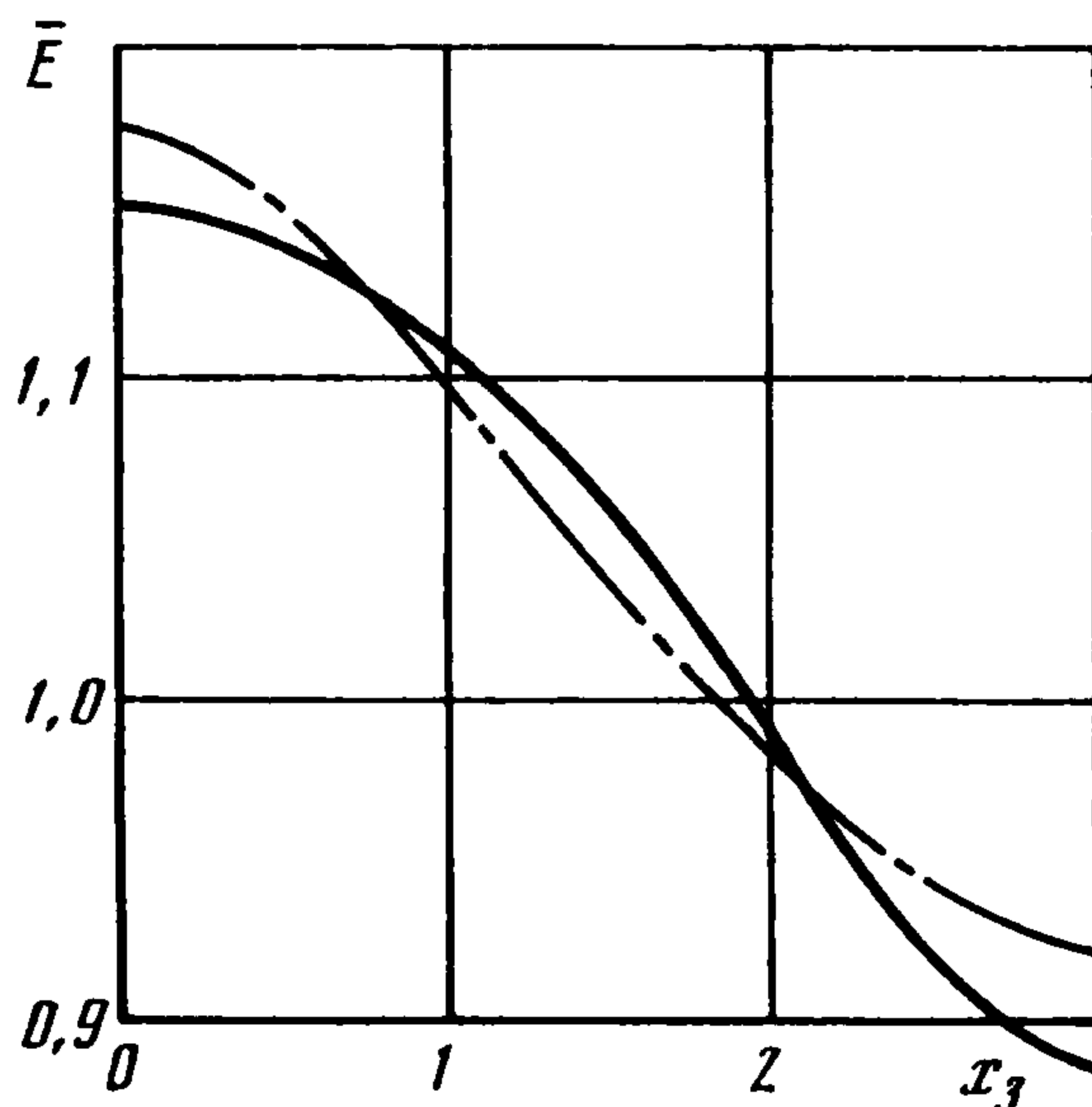
$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho^{(0)}}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{E^{(0)}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{E^{(0)}}, \quad \bar{t} = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{E^{(0)}}{\rho^{(0)}}},$$

$$\bar{x}_3 = \frac{x_3}{a}, \quad \bar{u}_i^{(m)} = \frac{u_i^{(m)}}{\|g_3\|_{C_1}}, \quad E^{(0)} = \lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}$$

Для расчетов использовалось

$$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1, \bar{g}_1 = \cos 3\bar{x}_3, \bar{g}_2 = \cos 2\bar{x}_3, \bar{g}_3 = \cos \bar{x}_3, \bar{\chi}_1^{(1)1} = \chi_2^{(1)1} = 0, \\ \bar{\chi}_3^{(1)1} = 0, 05 (\sin \bar{t} - 0,5 \sin 2\bar{t})$$

В результате: $\bar{\rho} = 1, \bar{\mu} = 0,5$ (т. е. $\bar{\rho}^{(m)}, \bar{\mu}^{(m)} = 0$ при $m \geq 1$). Отношение $E = \lambda + 2\mu$ к $E^{(0)}$ приведено на фиг. 2. Штриховая линия соответствует контрольной



Фиг. 2

однородной среде (учитывается лишь первый член разложения), штрихпунктирная — учету первого и второго, сплошная — первых трех членов разложения. Учет четвертого члена в разложении E по степеням малого параметра не вносит заметного вклада при вычислении этой характеристики, что свидетельствует о сходимости ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломазов В. А., Немировский Ю. В. Математическая модель проблемы диагностики термоупругой среды // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 284—292.
2. Измерения в промышленности. Справочник / Под ред. П. Профоса. М.: Металлургия, 1980. 648 с.
3. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 263 с.
4. Новацкий В. Тензор упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Консбеевский С. Т. Действие облучения на материалы. М.: Атомиздат, 1967. 401 с.
6. Нигул У. К. Асимптотическое описание процесса слабого искажения формы продольной волны в нелинейной наследственно упругой среде // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 60—63.
7. Нигул У. К. Нелинейная акустодиагностика. Л.: Судостроение, 1981. 251 с.
8. Равасо А. А. Распространение одномерных волн в неоднородной наследственно упругой среде с E -памятью // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 147—152.
9. Ломазов В. А., Немировский Ю. В. Диагностика структуры материала термоупругими волнами // Динамика неоднородных сред и взаимодействие волн с элементами конструкций. Новосибирск: Ин-т горн. дела СО АН СССР, 1987. С. 37—40.
10. Ломазов В. А., Немировский Ю. В. Задача диагностики упругой слоистой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 82—87.
11. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
12. Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 207 с.
13. Гарипов Р. М., Кардаков В. Б. Задача Коши для волнового уравнения с непространственным начальным многообразием // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 5. С. 1047—1050.
14. Гарипов Р. М. Негиперболическая граничная задача для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 777—780.
15. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
16. Равасо А. А. Распространение волн в среде с неоднородной начальной статической деформацией // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика, математика. 1982. Т. 31. № 3. С. 277—283.

Белгород

Поступила в редакцию
24.V.1988