

УДК 539.3 + 532.5 : 534.1

С. Н. Бешенков

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА КРУГЛОЙ ПЛАСТИНОЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Предлагается метод расчета вынужденных колебаний и акустического излучения круглой пластины при ее осесимметричных колебаниях в бесконечном жестком экране на границе раздела жидких сред. Исследуются зависимости составляющих прогиба и звукового давления от частоты возбуждения, а также их распределение по поверхности пластины.

Предлагаемый метод проще, чем использование разложений по ортогональным системам функций [1, 2]. Он приводит к конечной разрешающей системе, содержащей в качестве неизвестных значения звукового давления в ряде фиксированных точек на поверхности пластины. По сравнению с методом конечных разностей<sup>1</sup> предлагаемый метод позволяет достигать требуемой точности при меньшем числе узлов и приводит к разрешающим системам с лучшими вычислительными свойствами (по показателю обусловленности). Отметим также метод определения потенциала перемещений жидкости по функции прогиба неосесимметрично колеблющейся пластины [3], и результаты экспериментальных исследований гидроупругих колебаний пластины [4,5].

Рассмотрим вынужденные осесимметричные колебания круглой пластины, закрепленной в бесконечном жестком экране на границе раздела жидких полупространств. Опуская временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ , уравнение изгиба пластины с учетом реакции акустических сред запишем в виде

$$D\nabla^2\nabla^2w - m\omega^2w = q(r) + p(r), \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (1)$$

где  $w$  — прогиб пластины,  $D$ ,  $m$  — ее цилиндрическая жесткость и погонная масса,  $q(r)$  — возбуждающая нагрузка,  $p(r)$  — звуковое давление на пластину (разность давлений по обе ее стороны).

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию равенства нулю прогиба на контуре пластины, будем искать в виде ряда по функциям Бесселя

$$w = \sum_k w_k J_0(x_k r/a) \quad (2)$$

где  $x_k$  — корни уравнения  $J_0(x) = 0$ ,  $a$  — радиус пластины,  $\sum_k$  означает суммирование по  $k$  от 1 до  $\infty$ .

Для удовлетворения оставшемуся краевому условию приложим к контуру пластины изгибающий момент  $M$ . Суммарная нагрузка на пластину, таким образом, будет состоять из возбуждающей нагрузки  $q(r)$ , звукового давления  $p(r)$ , а также нагрузки интенсивностью  $q'$ , действующей по площади кольца шириной  $\varepsilon_1$ , отстоящего от края пластины на расстояние  $\varepsilon$ . Для перехода к изгибающему моменту необходимо принять [6]

$$q'\varepsilon_1 \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} p', \quad p'\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M \quad (3)$$

<sup>1</sup> Голованов В. А., Музыченко В. В., Пекер Ф. Н., Попов А. Л. Рассеяние и излучение звука упругими оболочками в жидкости: Препринт № 261. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1985. 70 с.

Разложим перечисленные составляющие поперечной нагрузки в ряды по функциям Бесселя. При этом неизвестную функцию  $p(r)$  аппроксимируем на отрезке  $[0, a]$  кусочно-линейной функцией. Используя условие ортогональности бesselевых функций, с учетом формул (3) и принятой аппроксимации для  $p(r)$ , находим коэффициенты разложений указанных нагрузок

$$q_k = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_k)} \int_0^a q(r) J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) r dr \quad (4)$$

$$q_k' = -\frac{2M}{a^2} \frac{x_k}{J_1(x_k)}, \quad p_k = \sum_j p_j z_{jk}$$

$$z_{jk} = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_k)} \left[ \int_{(j-1)\Delta r}^{j\Delta r} \frac{j\Delta r - r}{\Delta r} J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) r dr - \int_{(j-2)\Delta r}^{(j-1)\Delta r} \frac{(j-2)\Delta r - r}{\Delta r} J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) r dr \right]$$

$$j = 2, 3, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь  $N$  — число участков, на которые разбита пластина,  $p_j$  — звуковые давления в узлах,  $\sum_j$  означает суммирование по  $j$  от 1 до  $N+1$ . Выражения для  $z_{jk}$  при  $j=1$ ,  $j=N+1$  получаются из общей формулы после отбрасывания соответственно второго и первого интегралов.

Подстановка разложений (2), (4) в уравнение (1) позволяет найти коэффициенты

$$\omega_k = \frac{1}{m(\omega_k^2 - \omega^2)} \left[ q_k - \frac{2M}{a^2} \frac{x_k}{J_1(x_k)} + \sum_j p_j z_{jk} \right], \quad \omega_k^2 = \frac{x_k^4}{a^4} \frac{D}{m} \quad (5)$$

Изгибающий момент  $M$  находим из второго условия на контуре. Рассматривая для определенности случай заземления  $dw/dr|_{r=a} = 0$ , получаем

$$M = \frac{a^2}{2} \frac{Q_1 + \sum p_j s_j}{Q_2}, \quad Q_1 = \sum_k \frac{q_k x_k J_1(x_k)}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

$$Q_2 = \sum_k \frac{x_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2}, \quad s_j = \sum_k \frac{z_{jk} x_k J_1(x_k)}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и далее в (2), приходим к следующему выражению для прогиба пластины:

$$w = \sum_k \frac{J_0(x_k r/a)}{m(\omega_k^2 - \omega^2)} \left[ q_k - \frac{Q_1}{Q_2} \frac{x_k}{J_1(x_k)} + \left[ \sum_j p_j \left( z_{jk} - \frac{s_j x_k}{Q_2 J_1(x_k)} \right) \right] \right] \quad (7)$$

Звуковое давление  $p_2$  в полупространстве  $z > 0$ , являющееся результатом излучения звука пластиной, определяется интегралом Гюйгенса [7]

$$p_2(x, y, z) = -\frac{\omega^2 \rho_0}{2\pi} \int_{(S)} w(x', y') \frac{\exp(ik_0 R)}{R} ds \quad (8)$$

$$R = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}$$

где  $R$  — расстояние от элемента  $dS$  до точки наблюдения,  $S$  — площадь пластины,  $\rho_0$  — плотность среды,  $k_0$  — волновое число. Аналогично записывается давление  $p_1$  в полупространстве  $z < 0$ . Переходя в (8) к цилиндрическим координатам  $r, \theta, z$  для разности давлений в точке ( $r =$

$= (l - 1)\Delta r, z = 0)$ , получаем выражение

$$p_l = \frac{\omega^2 \rho_0 n}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} w(\rho) \frac{\exp(ik_0 R_l)}{R_l} \rho d\theta d\rho \quad (9)$$

$$R_l^2 = (l - 1)^2 \Delta r^2 + \rho^2 - 2(l - 1)\Delta r \rho \cos \theta$$

Здесь  $n$  — параметр, равный 1 или 2 при контакте пластины со средой одной или двумя сторонами, функция  $w(\rho)$  определяется формулой (7).

Полагая в (9)  $l = 1, 2, \dots, N + 1$  приходим к системе алгебраических уравнений для отыскания узловых значений звукового давления на поверхности пластины

$$\sum_j a_{lj} p_j = b_l, \quad l = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (10)$$

$$a_{lj} = \sum_k \frac{z_{jk} I_{lk}}{\omega_k^2 - \omega^2} - \frac{s_j}{Q_2} \sum_k \frac{x_k I_{lk}}{(\omega_k^2 - \omega^2) J_1(x_k)} - \frac{2\pi m}{\omega^2 \rho_0 n} \delta_{lj} \quad (11)$$

$$b_l = - \sum_k \frac{q_k I_{lk}}{\omega_k^2 - \omega^2} + \frac{Q_1}{Q_2} \sum_k \frac{I_{lk} x_k}{J_1(x_k) (\omega_k^2 - \omega^2)}$$

$$\delta_{lj} = \begin{cases} 1, & l = j \\ 0, & l \neq j \end{cases}$$

$$I_{lk} = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0\left(x_k \frac{\rho}{a}\right) \frac{\exp(ik_0 R_l)}{R_l} \rho d\theta d\rho$$

Отделяя в (10) действительные и мнимые части и решая получающуюся при этом систему  $2(N + 1)$  уравнений, находим действительные и мнимые составляющие звукового давления в узлах. Далее по формуле (7) вычисляем прогиб пластины в нужных точках, а по формуле

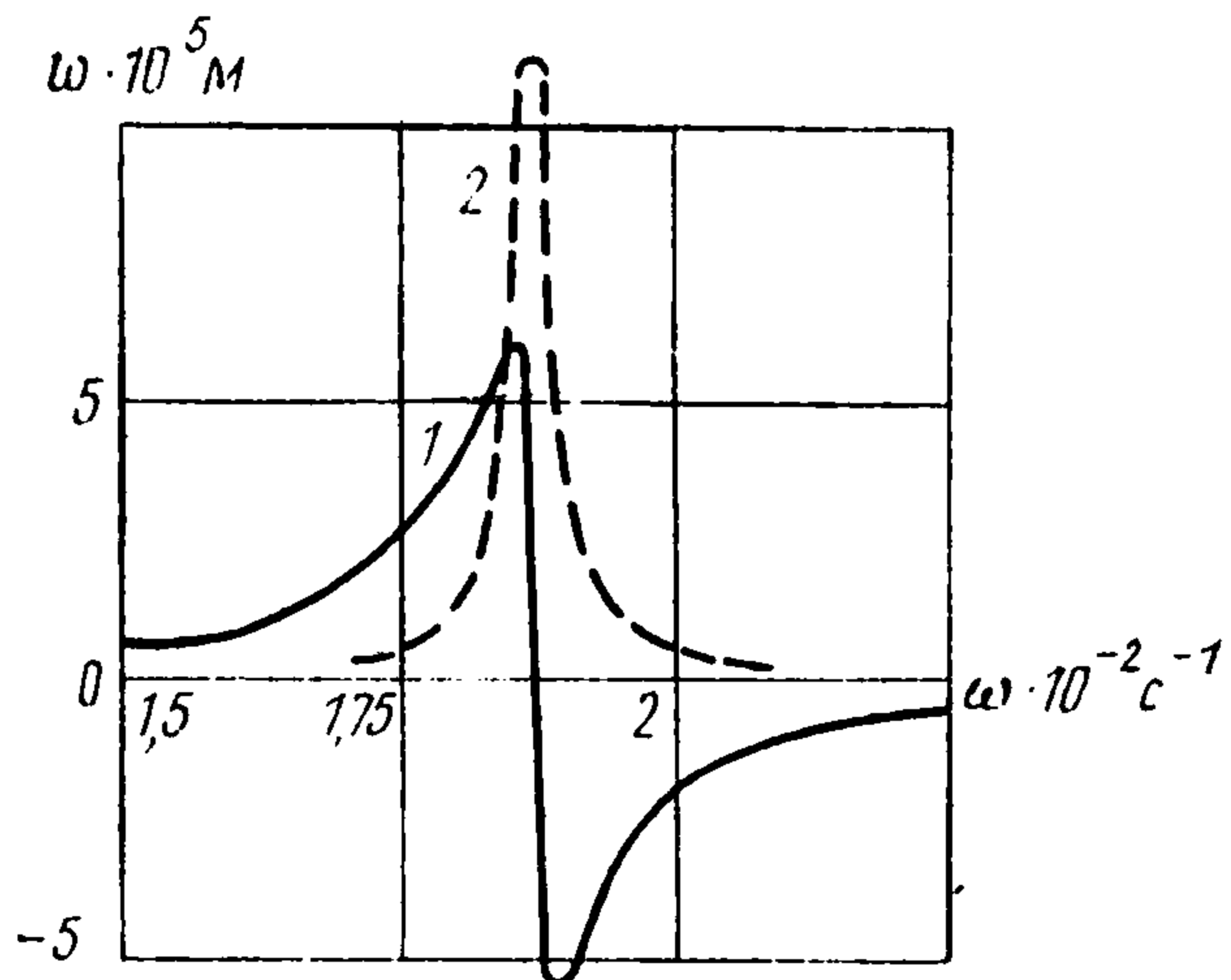
$$N = \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \int_0^a p v^* r dr \quad (12)$$

( $v^*$  — величина, комплексно сопряженная с колебательной скоростью) — акустическую мощность излучения.

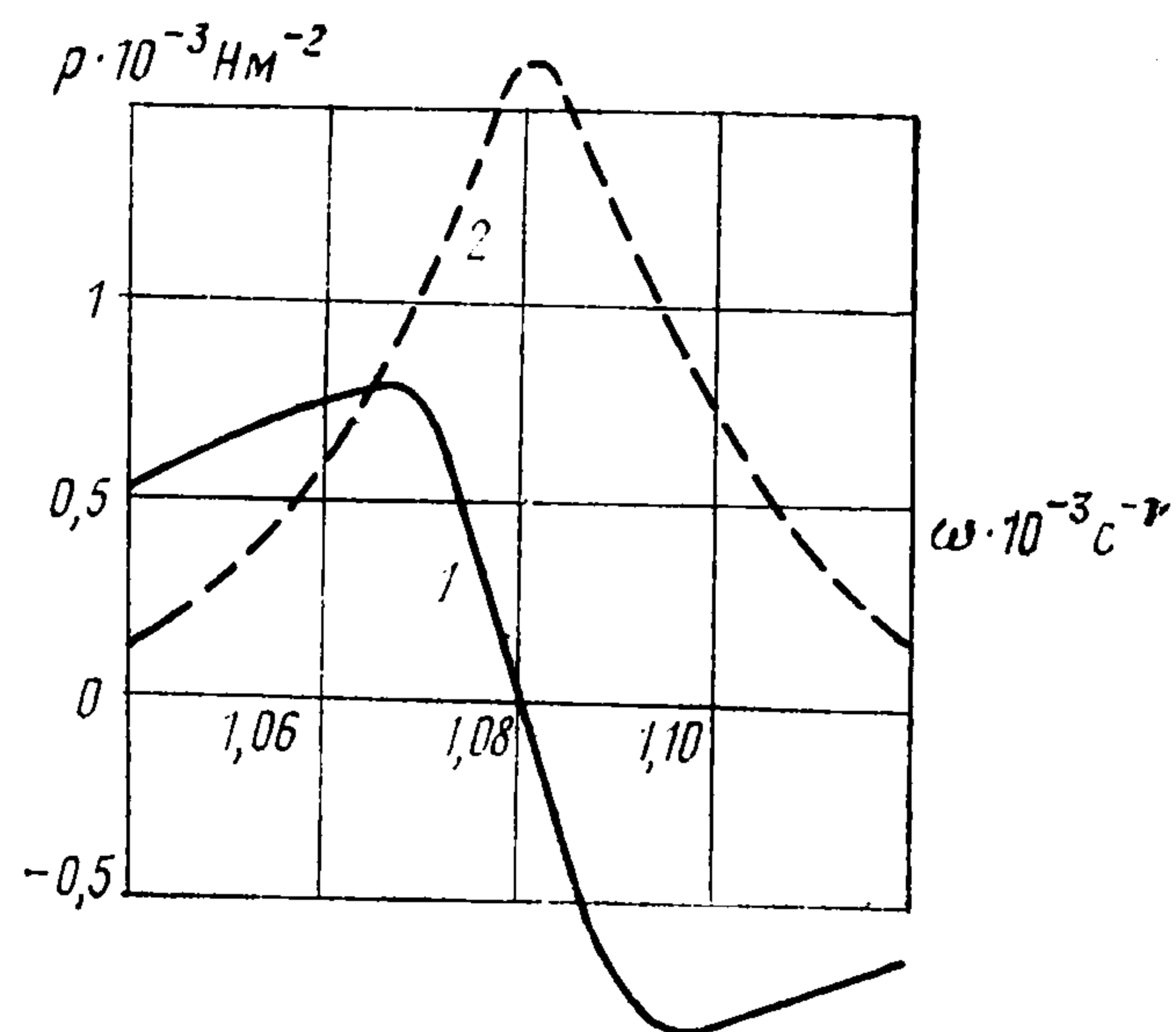
Заметим, что при  $\omega \rightarrow \omega_k$  решение системы (10) остается конечным, поскольку слагаемые, содержащиеся в знаменателе разность  $\omega_k^2 - \omega^2$ , присутствуют как в коэффициентах системы, так и в ее правых частях. Конечным остается и определяемый формулой (7) прогиб пластины, так как в соответствующем слагаемом одновременно стремятся к нулю и числитель и знаменатель.

При расчете на частотах  $\omega = \omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в суммах (11) необходимо опустить обращающиеся в бесконечность слагаемые, а в систему (10) ввести дополнительную неизвестную величину  $w_k$ , коэффициентами при которой будут интегралы  $I_{lk}$ . Соответствующее дополнительное уравнение получается приравниванием к нулю выражения в квадратных скобках формулы (5). Значительно проще, однако, провести (исходя из непрерывности и ограниченности функций  $p(r)$  и  $w(r)$ ) интерполяцию результатов, полученных вблизи частоты  $\omega_k$ .

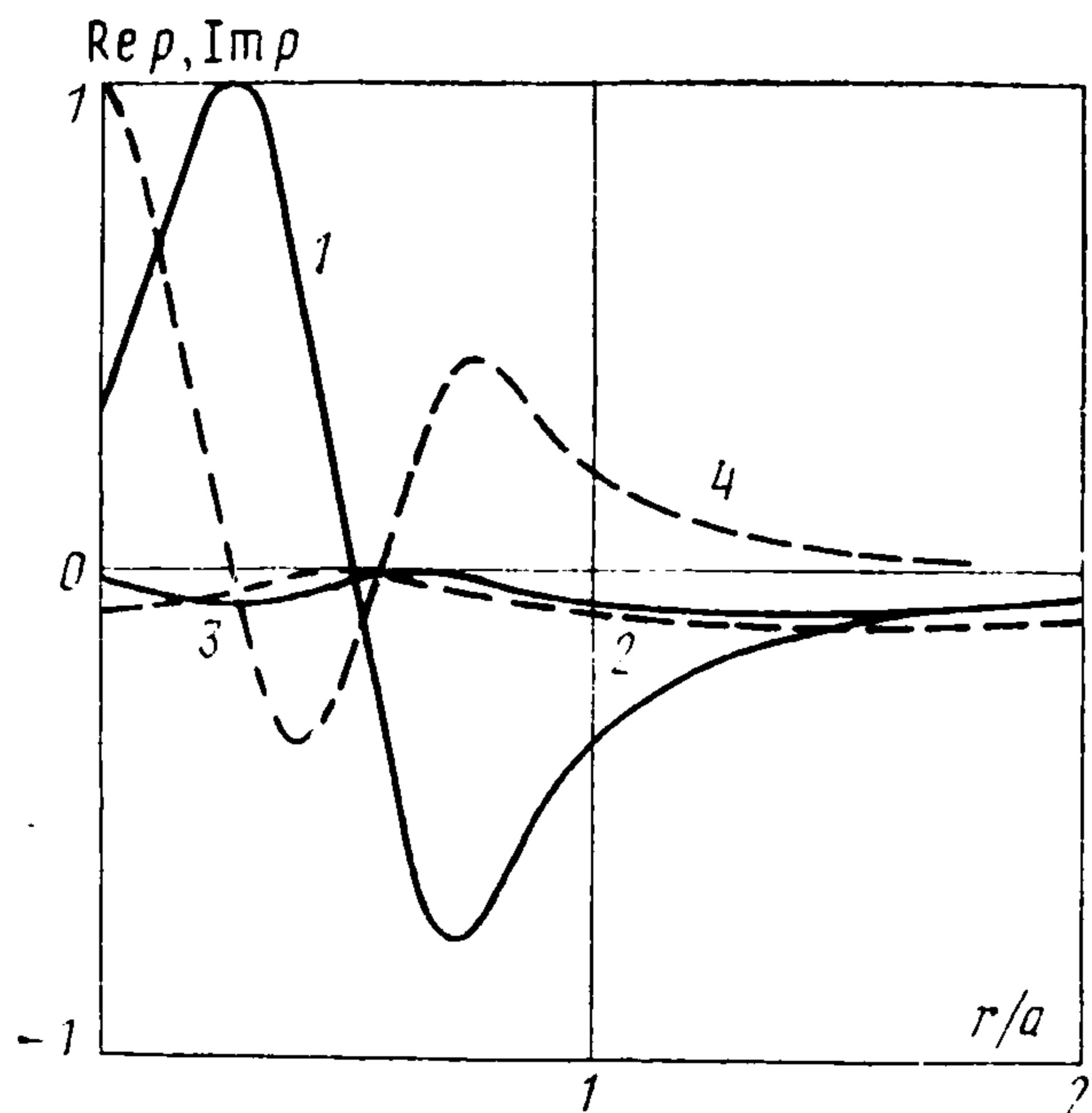
Приведем результаты расчета вынужденных колебаний и излучения звука круглой стальной пластиной радиуса  $a = 0,6$  м и толщиной  $h = 10^{-2}$  м, возбуждаемой в центре сосредоточенной силой  $F = 10$  Н. Интегралы  $I_{lk}$  в (11) вычислялись по квадратурным формулам Гаусса, число участков разбиения варьировалось от 15 до 20, число членов в рядах от 10 до 15. Дальнейшее увеличение этих параметров в рассмотренном диапазоне изменения частоты возбуждения практически не сказывалось на результатах.



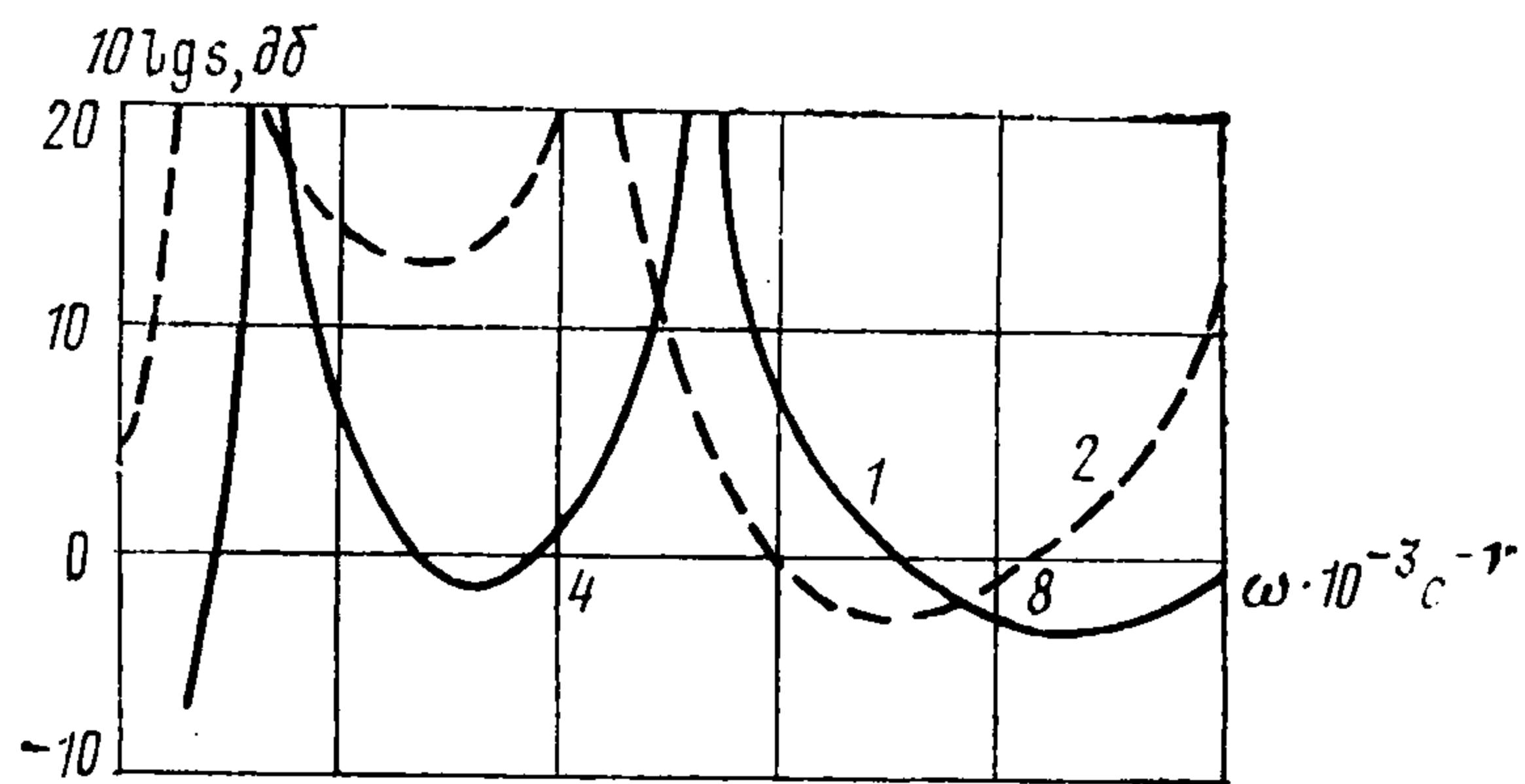
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1 для случая одностороннего контакта пластины с водой кривыми 1 и 2 показаны зависимости действительной и мнимой составляющих прогиба в центре пластины от частоты возбуждения. Аналогичные зависимости на фиг. 2 приведены для составляющих звукового давления в центре. Видно, что на определенных частотах возбуждения модуль прогиба и звукового давления, а также их мнимые части достигают максимума, в то время как действительные части меняют знак. Это соответствует первым двум резонансам пластины, которые при колебаниях в вакууме наблюдаются на частотах  $\omega_1 = 434 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 1700 \text{ с}^{-1}$ .

Как и следовало ожидать, наличие жидкости привело к смещению резонансов пластины в область более низких частот. Распределение прогибов по радиусу пластины на

Вариант	$r/a = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
а	813	280	-198	-401	-262	52	270	286	110
б	780	282	-205	-396	-254	60	267	252	67
в	780	284	-216	-435	-322	-12	220	238	67

первом и втором резонансах практически не отличается от соответствующих форм колебаний в вакууме. На более высоких резонансных формах колебаний это отличие становится более заметным и для третьего резонанса иллюстрируется таблицей отношений  $(w(r)/w(0)) \cdot 10^3$  для следующих вариантов: а) при колебаниях в вакууме, б) при одностороннем контакте с водой и  $h/a = 1/30$ , в) то же при  $h/a = 1/120$ .

Из представленных результатов видно, что несовпадение форм резонансных колебаний с собственными формами колебаний в вакууме выражено ярче при малых отно-

сительных толщинах пластины. Вместе с тем оно не столь заметно, как отмеченное в [8] для пластины-полосы, что объясняется локализацией высших резонансных колебаний вблизи центра пластины. Для сравнения укажем, что на третьем резонансе свободно опертой полосы с отношением  $h/l = 1/50$  амплитуда полуволны при  $x = l/6$  составляет примерно 0,8 амплитуды при  $x = l/2$ .

Распределение звукового давления на поверхности пластины в целом повторяет распределение прогиба, но на контуре его значение отлично от нуля и далее убывает по мере удаления от края пластины. Сказанное иллюстрирует фиг. 3, где показаны зависимости  $\operatorname{Re} p$  и  $\operatorname{Im} p$  от отношения  $r/a$  на нерезонансной  $\omega = 2000 \text{ с}^{-1}$  (кривые 1 и 2) и третьей резонансной  $\omega = 2846 \text{ с}^{-1}$  (кривые 3 и 4) частотах. Значения составляющих давления отнесены к максимальному значению одной из них (действительной на нерезонансной частоте и мнимой — на резонансной).

На фиг. 4 приведена частотная зависимость (кривая 1) коэффициента излучения:

$$s = N/N_0, N_0 = F^2 \rho_0 / (4\pi m^2 c_0)$$

круглой стальной пластины толщиной  $h = 0,03 \text{ м}$  и радиусом  $a = 0,6 \text{ м}$  при ее колебаниях в воздухе под действием сосредоточенной силы в центре. Величина  $N_0$  представляет собой акустическую мощность излучения бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой на низкой частоте ( $\omega \ll \omega_*$ , где  $\omega_*$  — граничная частота пластины [7]). Аналогичная кривая 2 получена для случая одностороннего контакта водой ( $N_0 = F^2 \omega^2 / (12\pi \rho_0 c_0^3)$ ).

Результаты расчетов показывают, что конечность размеров пластины и условия ее закрепления сказываются на появлении и положении резонансных максимумов излучения. Вне резонансных зон с ростом частоты акустические мощности излучения ограниченной и бесконечной пластин приближаются друг к другу, причем быстрее это происходит для пластины, излучающей в воздухе. Отметим также, что, за исключением резонансных частот, влияние воздушного акустического поля на колебания пластины пренебрежимо мало.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Alper S., Magrab E. B.* Radiation from the forced harmonic vibrations of a clamped circular plate in an acoustic fluid // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1970. V. 48. № 3. Pt 2. P. 681—691.
2. *Suzuki H., Tichy J.* Sound radiation from an elastically supported circular plate // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1979. V. 65. № 1. P. 106—111.
3. *Ционский А. Я.* Колебания круглой пластины в сжимаемой жидкости // *Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. шк. Естеств. науки.* 1978. № 2. С. 23—28.
4. *Пономарев И. И.* Экспериментальное исследование резонансных колебаний круглой пластинки, взаимодействующей с акустическим полупространством // *Тр. 12-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.* Ереван: Ереван. ун-т, 1980. Т. 3. С. 144—149.
5. *Голованов В. А., Пономарев И. И., Чернышев Г. Н.* Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний пластин, контактирующих с жидкостью // *Взаимодействие оболочек с жидкостью.* Казань.: Изд-во Казанск. физ.-техн. ин-та, 1981. С. 5—13.
6. *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. Киев: Наук. думка, 1977. 339 с.
7. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
8. *Голованов В. А., Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* О колебаниях ограниченной пластины в жидкости // *ПММ,* 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 436—442.