

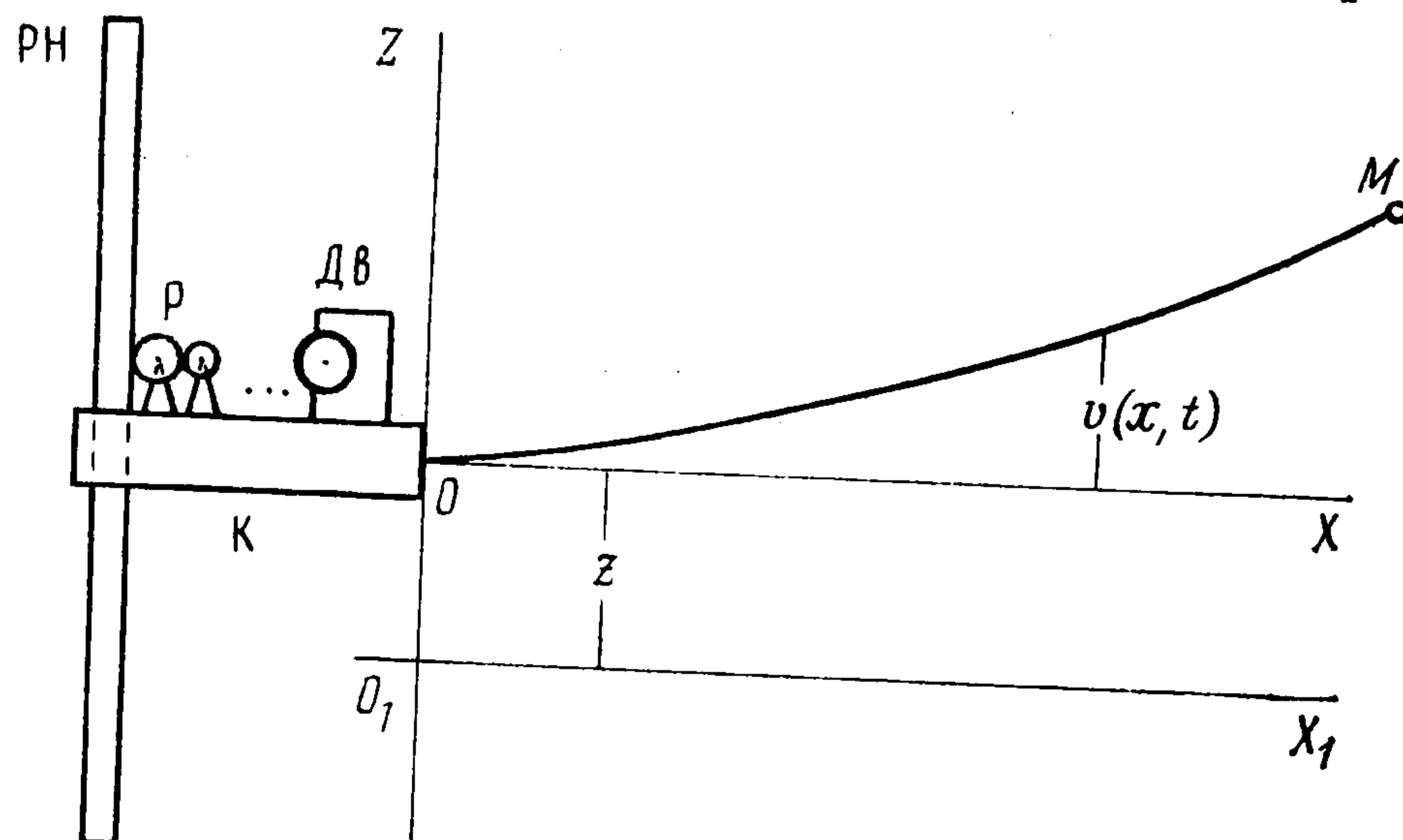
УДК 539.3:62—50

Э. К. Лавровский, А. М. Формальский

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗАДАННОЙ ПОЗИЦИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается упругий стержень, который может перемещаться в плоскости вдоль прямолинейной направляющей. В движение стержень приводится электродвигателем, установленным на одном из его концов. На другом конце крепится груз. Исследуется задача стабилизации положения стержня при помощи линейной обратной связи. Управляющее напряжение, подаваемое на двигатель, является линейной комбинацией сигналов о перемещении стержня, скорости этого перемещения, интеграле от него, о деформациях. Учитывается запаздывание в контуре управления. В пространстве коэффициентов обратной связи построены области асимптотической устойчивости. Изучаемая задача возникает, например, при построении управления упругим манипулятором.

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим упругий однородный стержень длины  $l$  постоянного сечения  $S$ , который может перемещаться в горизонтальной плоскости — плоскости чертежа (фиг. 1). Управление движением стержня осуществляется электроприводом. Двигатель Дв и редуктор Р привода смонтированы в каретке К. Выходная шестерня редуктора



Фиг. 1

зацепляется с зубчатой прямолинейной рейкой-направляющей РН. Благодаря этому каретка может перемещаться вдоль направляющей. Неподвижная ось  $OZ$  параллельна направляющей. Концом  $O$  стержень консольно закреплен в каретке, так что касательная к нейтральной линии стержня в точке  $O$  — прямая  $OX$  перпендикулярна направляющей. На другом конце стержня закреплен груз, который будем считать материальной точкой с массой  $M$ .

На фиг. 1 вместо стержня показана его нейтральная (изогнутая) линия  $OM$ . Предполагается, что линия  $OM$  всегда лежит в горизонтальной плоскости. Отклонение точки нейтральной линии  $OM$  с координатой  $x$  в момент времени  $t$  от подвижной оси  $OX$  обозначим  $v(x, t)$ . В отсутствие деформаций стержня  $v(x, t) \equiv 0$ , а линии  $OM$  и  $OX$  совпадают.

Обозначим через  $z$  отклонение (перемещение) конца стержня  $O$  от желаемой неподвижной точки  $O_1$ . В желаемом положении также нейтральная

ось стержня совпадает с неподвижной осью  $O_1X_1$ , перпендикулярной оси  $O_1Z$ .

Уравнения движения рассматриваемой механической системы в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [1, 2] могут быть записаны в виде

$$EIv''''(x, t) + \rho S [v''(x, t) + z''(t)] = 0 \quad (1.1)$$

$$M_k z''(t) = F - EIv''''(0, t) \quad (1.2)$$

$$v(0, t) = v'(0, t) = v''(l, t) = 0$$

$$EIv''''(l, t) - M [v''(l, t) + z''(t)] = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала стержня,  $E$  — модуль Юнга,  $I$  — постоянный момент инерции поперечного сечения стержня относительно вертикальной оси,  $M_k$  — сумма, слагаемыми которой являются масса каретки с электроприводом и приведенные с учетом коэффициентов редукции моменты инерции якоря двигателя и шестерен редуктора (имеющие, естественно, размерность массы),  $F$  — сила, действующая со стороны рейки на выходную шестерню редуктора, она вызвана моментом электромагнитных сил относительно оси якоря.

Уравнение (1.1) описывает плоские поперечные колебания стержня [1—3] при заданном ускорении  $z''(t)$  его конца  $O$ . В уравнении не учтена диссипация энергии, происходящая при колебаниях. Уравнение (1.2) описывает движение каретки привода, второе слагаемое в его правой части — перерезывающую силу, действующую на каретку со стороны упругого стержня.

Если правый конец стержня крепится в центре масс груза и момент инерции груза относительно центра масс  $J \neq 0$ , то граничное условие  $v''(l, t) = 0$  нужно заменить условием  $Jv''''(l, t) = -EIv''(l, t)$ .

Вращательное движение упругого стержня вокруг одного из его концов изучалось в [4—6]<sup>1</sup>. Линеаризованные уравнения движения, содержащиеся в этих работах, хотя и отличаются от уравнений (1.1) — (1.3), но имеют ту же структуру.

Пренебрегая индуктивностью обмотки двигателя, силу  $F$  выразим в виде [7]

$$F = d_1 u - d_2 z' \quad (1.4)$$

Здесь  $u$  — управляющее напряжение, подаваемое на двигатель,  $d_1$ ,  $d_2$  — постоянные положительные коэффициенты, значения которых определяются характеристиками двигателя и коэффициентом редукции.

Введем в рассмотрение новую переменную

$$w(x, t) = v(x, t) + z(t) \quad (1.5)$$

которая характеризует полное отклонение деформированного стержня от прямой  $O_1X_1$ . Введем, кроме того, безразмерные переменные  $w^*$ ,  $x^*$ ,  $z^*$ ,  $t^*$ ,  $u^*$  по формулам

$$w = lw^*, \quad x = lx^*, \quad z = lz^*, \quad t = \tau t^*, \quad u = Uu^* \quad (1.6)$$

$$\tau^2 = \rho S l^4 / (EI), \quad U = EI / (l^2 d_1)$$

<sup>1</sup> См. также: Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Сатовская О. Л. Динамические модели упругих манипуляционных роботов. Препринт № 349. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1988. 46 с.

Подставляя соотношения (1.4)—(1.6) в уравнения (1.1)—(1.3) и опуская звездочки, получаем

$$\begin{aligned} w''''(x, t) + w''(x, t) &= 0 \\ (\mu w''(0, t) + dw'(0, t) + w''''(0, t) &= u \\ w'(0, t) = w''(1, t) = 0, \quad w''''(1, t) &= mw''(1, t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\left( \mu = \frac{M_r}{\rho S l}, \quad m = \frac{M}{\rho S l}, \quad d = \frac{d_2^i}{\sqrt{EI\rho S}} \right)$$

В этих соотношениях  $\mu$  и  $m$  — безразмерные массы каретки с приводом и груза,  $d$  — безразмерный коэффициент противоэлектродвижущей силы. Второе соотношение (1.7), получаемое из уравнений (1.2), (1.4) при помощи равенства

$$w(0, t) = z(t) \quad (1.8)$$

в новой краевой задаче играет роль граничного условия. Апостериорное равенство (1.8) получается из граничного условия (1.3)  $v(0, t) = 0$ . Если управление  $u$  не зависит от переменной  $z$ , то последняя может рассматриваться как циклическая.

**2. Постановка задачи, управление.** При  $u \equiv 0$  краевая задача (1.7) имеет решение

$$w(x, t) = C \quad (v(x, t) = 0, z = C) \quad (2.1)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Решение (2.1) отвечает недеформированному стержню, отклоненному на величину  $z = C$  от прямой  $O_1X_1$ . При  $C = 0$  из (2.1) получаем

$$w(x, t) = 0 \quad (v(x, t) = 0, z = 0) \quad (2.2)$$

Рассмотрим вопрос о синтезе управления  $u$ , обеспечивающего асимптотическую устойчивость решения (2.2).

Стабилизирующее управление будем строить в виде линейной обратной связи

$$Tu'(t) + u(t) = -\gamma_0 w(0, t) - \gamma_1 w'(0, t) - \gamma_2 \int_0^t w(0, \zeta) d\zeta - \sum \sigma_n w''(x_n, t) \quad (2.3)$$

В формуле (2.3)  $T > 0$  — безразмерная постоянная времени,  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  — постоянные коэффициенты обратной связи по перемещению  $z$ , его производной и интегралу,  $\sigma_n$  — постоянный коэффициент обратной связи по изгибной деформации стержня в точке  $x_n$ . Здесь и всюду далее  $n = 1, \dots, N$ , суммирование ведется от  $n = 1$  до  $n = N$ . Началом процесса управления считается момент  $t = 0$ . Обратная связь (2.3) предполагает наличие датчиков положения, скорости изменения положения и деформации (тензодатчиков).

Линейной краевой задаче (1.7), (2.3) отвечает некоторый спектр собственных чисел. Конкретизируя сформулированный выше вопрос об асимптотической устойчивости решения (2.2), поставим следующую задачу. В пространстве коэффициентов обратной связи (2.3) построить область значений, при которых все собственные числа  $\lambda$  таковы, что  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

Задачи синтеза управления некоторыми системами с распределенными параметрами, при котором собственные числа  $\lambda$  таковы, что  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ , изучались в [8, 9]. Различные определения понятия асимптотической устойчивости движения систем с распределенными параметрами обсуждались, например, в монографиях [10, 11].

Наряду с (1.7) для сравнения естественно рассматривать уравнения движения абсолютно твердого стержня с грузом на конце при обратной связи (2.3). В безразмерных переменных, определяемых формулами (1.6), они имеют вид

$$(\mu + m + 1)z'' + dz' = u \quad (2.4)$$

$$Tu' + u = -\gamma_0 z - \gamma_1 z' - \gamma_2 \int_0^t z(\xi) d\xi$$

**3. Характеристическое уравнение.** Решение краевой задачи (1.7), (2.3) будем искать в виде

$$w(x, t) = Le^{\lambda t} X(x)$$

где  $L$  — постоянная,  $\lambda$  — собственное число,  $X(x)$  — собственная функция.

Для функций  $X(x)$  получаем краевую задачу

$$X''''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & [\mu\lambda^2 X(0) + d\lambda X(0) + X'''(0)](T\lambda + 1)\lambda = \\ & -(\gamma_0\lambda + \gamma_1\lambda^2 + \gamma_2)X(0) - \lambda \sum \sigma_n X''(x_n) \\ & X'(0) = X''(1) = 0, \quad X'''(1) = m\lambda^2 X(1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

При  $\gamma_2 = 0$  обе части первого из равенств (3.2) следует сократить на величину  $\lambda$ .

Решение краевой задачи (3.1), (3.2) строим в виде суммы

$$X(x) = C_1 e^{\nu x} + C_2 e^{i\nu x} + C_3 e^{-\nu x} + C_4 e^{-i\nu x} \quad (3.3)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  — неизвестные постоянные,  $i$  — мнимая единица и

$$\lambda^2 = -\nu^4 \quad (3.4)$$

Подставив выражение (3.3) в граничные условия (3.2), получим систему линейных однородных уравнений относительно постоянных  $C_1, \dots, C_4$ . Ненулевые собственные числа  $\lambda$  удовлетворяют уравнению

$$\det \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ e^{\nu} & -e^{i\nu} & e^{-\nu} & -e^{-i\nu} \\ (1 + m\nu)e^{\nu} & (-i + m\nu)e^{i\nu} & (-1 + m\nu)e^{-\nu} & (i + m\nu)e^{-i\nu} \\ a_+ & b_- & a_- & b_+ \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

$$a_{\pm} = R(\lambda) \pm \nu^3 (T\lambda + 1)\lambda + \nu^2 \lambda \sum \sigma_n e^{\pm \nu x_n}$$

$$b_{\pm} = R(\lambda) \pm i\nu^3 (T\lambda + 1)\lambda - \nu^2 \lambda \sum \sigma_n e^{\mp i\nu x_n}$$

$$R(\lambda) = \lambda^2 (\mu\lambda + d)(T\lambda + 1) + \gamma_0\lambda + \gamma_1\lambda^2 + \gamma_2$$

Раскрывая определитель в (3.5), получаем

$$R(\lambda) R_1(\nu, m) - \nu^3 \lambda (T\lambda + 1) R_2(\nu, m) + \frac{1}{2} \nu^2 \lambda \sum R_3(\nu, x_n, m) = 0 \quad (3.6)$$

$$R_1(\nu, m) = Q_1(\nu) + m\nu Q_-(\nu), \quad R_2(\nu, m) = Q_+(\nu) + 2m\nu Q_2(\nu)$$

$$Q_1(\nu) = 1 + \cos \nu \operatorname{ch} \nu, \quad Q_2(\nu) = \cos \nu \operatorname{ch} \nu$$

$$Q_{\pm}(\nu) = \operatorname{sh} \nu \cos \nu \pm \operatorname{ch} \nu \sin \nu$$

$$\begin{aligned} R_3(\nu, x, m) = & \operatorname{sh} \nu \sin [\nu(1-x)] - \operatorname{ch} \nu \cos [\nu(1-x)] + \\ & + \cos \nu \operatorname{ch} [\nu(1-x)] + \sin \nu \operatorname{sh} [\nu(1-x)] + \operatorname{ch} \nu x - \cos \nu x + \\ & + 2m\nu \{ \operatorname{sh} [\nu(1-x)] \cos \nu + \operatorname{ch} \nu \sin [\nu(1-x)] \} \end{aligned}$$

Полином  $R(\lambda)$  является характеристическим для электродвигателя с обратной связью (2.3) при  $\sigma_n = 0$ ,  $R_1(\nu, m)$  — характеристический

квазиполином упругого стержня с консольным закреплением,  $R_2(v, m)$  — характеристический квазиполином стержня, левый конец  $O$  которого может свободно перемещаться по прямолинейной направляющей и касательная к нейтральной линии которого в точке  $O$  перпендикулярна этой направляющей.

Из уравнения (3.4) находим два выражения для величины  $\lambda$ :  $\lambda = iv^2$  и  $\lambda = -iv^2$ . Подставляя каждое из них в (3.6), получаем два уравнения относительно величины  $v$ . Однако значения  $\lambda$ , определяемые в результате решения этих уравнений, совпадают, поскольку если  $v$  — корень одного из уравнений, то  $iv$  — корень другого. Тем самым достаточно анализировать только одно из уравнений, получающееся при подстановке в (3.6), например, выражения

$$\lambda = iv^2 \quad (3.7)$$

Наряду с  $v$  уравнение (3.6), (3.7) имеет корни  $-v$ ,  $i\bar{v}$  и  $-i\bar{v}$ , т. е. его корни группируются «четверками». Корням  $\pm v$  и  $\pm i\bar{v}$  отвечают собственные числа  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$ .

**4. Области устойчивости.** Для построения в пространстве параметров области асимптотической устойчивости воспользуемся методом  $D$ -разбиений [12]. Если величина  $\lambda$  принимает мнимые значения, то величина  $v$  принимает мнимые или действительные значения.

Пусть

$$\sigma_n = 0 \quad (4.1)$$

Подставим в уравнение (3.6), (3.7) значение  $v = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — действительное число, и приравняем нулю вещественную и мнимую части

$$\begin{aligned} (\mu T\varepsilon^8 - d\varepsilon^4 - \gamma_1\varepsilon^4 + \gamma_2)R_1(\varepsilon, m) + T\varepsilon^7 R_2(\varepsilon, m) &= 0 \\ (-\mu\varepsilon^6 - dT\varepsilon^6 + \gamma_0\varepsilon^2)R_1(\varepsilon, m) - \varepsilon^5 R_2(\varepsilon, m) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Соотношения (4.2) определяют в пространстве параметров системы образ действительной оси  $v = \varepsilon$ ,  $-\infty < \varepsilon < +\infty$ . Они не меняются при замене  $\varepsilon$  на  $-\varepsilon$  или на  $\pm i\varepsilon$ . Это объясняется тем, что корни уравнения (3.6), (3.7), как указано выше, группируются четверками. Из сказанного следует, что граница области асимптотической устойчивости в пространстве параметров принадлежит поверхности (4.2), построенной при  $0 \leq \varepsilon < \infty$ . Будем строить области устойчивости аналитически, переходя от частных случаев к общему.

Пусть сначала

$$\gamma_2 = 0, \quad T = 0 \quad (4.3)$$

При  $\gamma_2 = 0$  обе части равенств (4.2) следует сократить на  $\varepsilon^2$ . Положив затем  $\varepsilon = 0$ , получим уравнение  $\gamma_0 = 0$ . При  $\varepsilon > 0$  из первого уравнения (4.2) получаем  $\gamma_1 = -d$ , а из второго

$$\gamma_0 = \mu\varepsilon^4 + \varepsilon^3 R_2(\varepsilon, m)/R_1(\varepsilon, m) \quad (4.4)$$

Можно убедиться в том, что на полуоси  $\varepsilon > 0$  нули функций  $Q_1(\varepsilon)$  и  $Q_-(\varepsilon)$  чередуются, так же как нули функций  $Q_+(\varepsilon)$  и  $Q_2(\varepsilon)$ . При любом значении  $m$  между нулями функций  $Q_1(\varepsilon)$  и  $Q_-(\varepsilon)$  ( $Q_+(\varepsilon)$  и  $Q_2(\varepsilon)$ ) на каждом интервале, где они имеют разные знаки, располагается ровно один нуль функции  $R_1(\varepsilon, m)$  ( $R_2(\varepsilon, m)$ ). Нули функций  $R_1(\varepsilon, 0)$  и  $R_2(\varepsilon, 0)$ , равных  $Q_1(\varepsilon)$  и  $Q_+(\varepsilon)$ , чередуются. Нули функций  $R_1(\varepsilon, m)$ ,  $R_2(\varepsilon, m)$  изменяются непрерывно при изменении величины  $m$ . Можно показать, что ни при каком значении  $m$  эти функции не имеют общих нулей.

Из сказанного выше вытекает, что при любом значении массы  $m$  нули функций  $R_1(\varepsilon, m)$  и  $R_2(\varepsilon, m)$  чередуются. Отсюда следует, в частности,

что при изменении  $\varepsilon$  от 0 до  $\infty$  величина (4.4) изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Таким образом, границы области устойчивости принадлежат прямой  $\gamma_0 = 0$  и  $\gamma_1 = -d$ . Для отыскания области устойчивости выпишем приближенное характеристическое уравнение (3.6), (3.7) в окрестности точки  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_1 = -d$ ,  $\nu = \lambda = 0$ . Для этого положим  $\gamma_0 = -\Delta_0$ ,  $\gamma_1 = -d - \Delta_1$ ,  $\lambda = \Delta\lambda$ . Разлагая левую часть уравнения (3.6), (3.7) в ряд и ограничиваясь старшими членами, получаем

$$-\Delta\lambda^2 (\mu + m + 1) + \Delta\lambda\Delta_1 + \Delta_0 = 0 \quad (4.5)$$

При  $\Delta_0 = 0$ ,  $\Delta_1 > 0$ , а также при  $\Delta_0 > 0$ ,  $\Delta_1 = 0$  это уравнение имеет действительный корень  $\Delta\lambda > 0$ .

Из сказанного выше заключаем, что область асимптотической устойчивости, если таковая существует, описывается неравенствами

$$\gamma_0 > 0, \quad \gamma_1 > -d \quad (4.6)$$

В области (4.6), которую обозначим  $D$ , действительно имеет место асимптотическая устойчивость.

Для доказательства используем прием, подобный изложенным в работах [3, 13]. При помощи двух предпоследних краевых условий (3.2) получаем

$$\int_0^1 X'''(x) \bar{X}(x) dx = X'''(1) \bar{X}(1) - X'''(0) \bar{X}(0) + \int_0^1 X''(x) \bar{X}''(x) dx$$

Подставим в это равенство производную  $X'''(x)$  из уравнения (3.1) и производные  $X'''(1)$ ,  $X'''(0)$  из первого и последнего условий (3.2). Тогда

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \left[ \int_0^1 X(x) \bar{X}(x) dx + \mu X(0) \bar{X}(0) + m X(1) \bar{X}(1) \right] + \\ & + \lambda (\gamma_1 + d) X(0) \bar{X}(0) + \gamma_0 X(0) \bar{X}(0) + \int_0^1 X''(x) \bar{X}''(x) dx = 0 \end{aligned}$$

В области  $D$  коэффициенты полученного квадратного относительно  $\lambda$  уравнения неотрицательны. Поэтому все собственные числа  $\lambda$  таковы, что  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Но, с другой стороны, при условиях (4.6) нет таких собственных чисел  $\lambda$ , что  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Тем самым утверждение доказано.

В задаче стабилизации положения  $z = 0$  абсолютно твердого стержня в соответствии с уравнениями (2.4) при условии (4.3) область асимптотической устойчивости также описывается неравенствами (4.6). Следовательно, при обратной связи по положению и скорости «податливость» стержня не приводит к потере устойчивости.

Рассмотрим более общий, нежели (4.3), случай, когда только

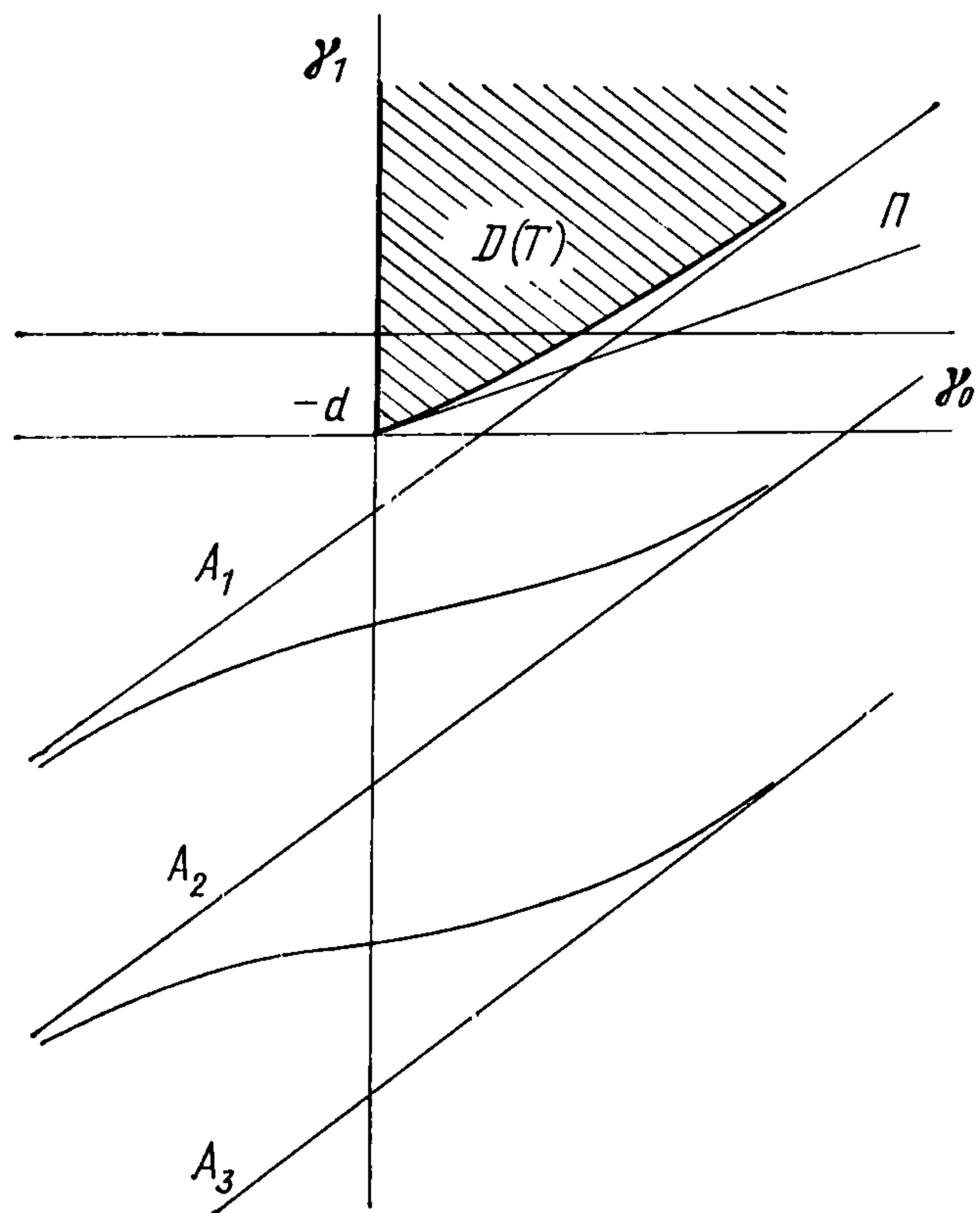
$$\gamma_2 = 0 \quad (4.7)$$

Полагая в уравнениях (4.2)  $\varepsilon = 0$ , а затем  $\varepsilon > 0$ , заключаем, что граница области устойчивости состоит из участков прямой  $\gamma_0 = 0$  и кривой

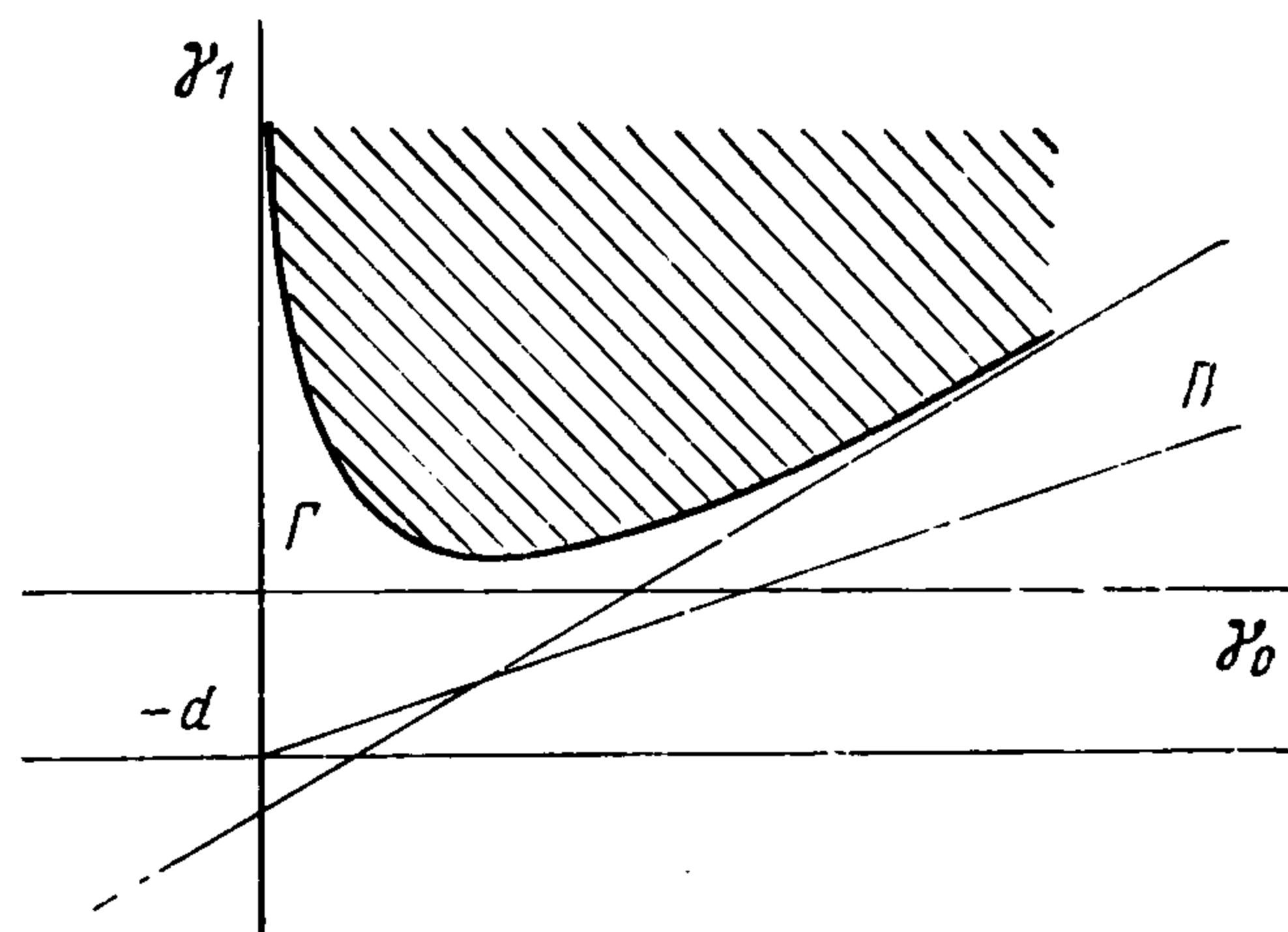
$$\begin{aligned} \gamma_0 &= dT\varepsilon^4 + \mu\varepsilon^4 + \varepsilon^3 R_2(\varepsilon, m) / R_1(\varepsilon, m) \\ \gamma_1 &= -d + \mu T\varepsilon^4 + T\varepsilon^3 R_2(\varepsilon, m) / R_1(\varepsilon, m) \end{aligned} \quad (4.8)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  из уравнений (4.8) получаем, что  $\gamma_0 \rightarrow 0$ ,  $\gamma_1 \rightarrow -d$ . Пусть  $\varepsilon_s = \varepsilon_s(m)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) —  $s$ -й нуль функции  $R_1(\varepsilon, m)$ . При  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  имеем  $R_1(\varepsilon, m) > 0$ ,  $R_2(\varepsilon, m) > 0$ , и значит,  $\gamma_0 > 0$ ,  $\gamma_1 > -d$ . При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 - 0$  имеем  $\gamma_0, \gamma_1 \rightarrow \infty$ . Из уравнений (4.8) следует, что

$$\gamma_1 = T\gamma_0 - d(1 + T^2\varepsilon^4) \quad (4.9)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Поэтому при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$  кривая (4.8) стремится к асимптоте  $A_1$ :

$$\gamma_1 = T\gamma_0 - d(1 + T^2\varepsilon_1^4) \quad (4.10)$$

Поскольку нули функций  $R_1(\varepsilon, m)$ ,  $R_2(\varepsilon, m)$  чередуются, кривая (4.8) при  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$  лежит в полосе между своими асимптотами  $A_1$  и  $A_2$ . Асимптота  $A_2$  описывается уравнением (4.9) при  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 + 0$  имеем  $\gamma_0 \rightarrow -\infty$  и кривая (4.8) стремится к асимптоте  $A_1$  (4.10). При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2 - 0$  имеем  $\gamma_0 \rightarrow \infty$  и кривая (4.8) стремится к асимптоте  $A_2$ . Ветвь кривой (4.8), получающаяся при  $\varepsilon_s < \varepsilon < \varepsilon_{s+1}$  ( $s = 2, 3, \dots$ ), располагается между асимптотами  $A_s$  и  $A_{s+1}$  (фиг. 2). Таким образом, кривая (4.8) состоит из бесконечного числа ветвей, каждая из которых пересекает ось  $\gamma_1$ .

Рассмотрим первую ветвь кривой (4.8), получающуюся при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(m)$ . Открытую область, ограниченную этой ветвью и полуосью  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_1 \geq -d$ , обозначим  $D(T)$  (фиг. 2). При  $\gamma_0, \gamma_1 \in D(T)$  среди собственных чисел  $\lambda$  нет ни одного такого, что  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . При  $T \rightarrow 0$  имеем  $D(T) \rightarrow D$ , причем если  $\gamma_0, \gamma_1 \in D$ , то все собственные значения  $\lambda$  таковы, что  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Рассматривая далее множество  $D(T)$  при  $0 \leq T < \infty$  в пространстве трех параметров  $\gamma_0, \gamma_1, T$ , можно убедиться, что при  $\gamma_0, \gamma_1 \in D(T)$  имеет место асимптотическая устойчивость. Путем некоторых рассуждений можно доказать, что при  $\gamma_0, \gamma_1 \notin D(T)$  система неустойчива. Итак, в случае (4.7) область асимптотической устойчивости построена.

Область устойчивости равновесия  $z = 0$  системы (2.4) при  $\gamma_2 = 0$  заключена между полуосью  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_1 \geq -d$  и полупрямой  $\Pi$ :

$$\gamma_1 = -d + \frac{T(\mu + m + 1)}{Td + \mu + m + 1} \gamma_0, \quad \gamma_0 > 0 \quad (4.11)$$

Кривая (4.8) в точке  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_1 = -d$  касается прямой (4.11) и располагается выше нее при  $\gamma_0 > 0$ . Асимптота (4.10) пересекает прямую (4.11) снизу вверх (фиг. 2). Таким образом, область устойчивости, построенная для упругого стержня, принадлежит области устойчивости, построенной для твердого стержня, и меньше ее. При  $\mu = d = 0$ , т. е. когда ди-

намика электропривода не учитывается и управляющей является сила  $F$ , кривые (4.8), (4.10), (4.11) совпадают, а вместе с ними и соответствующие области устойчивости.

Рассмотрим теперь наиболее общий при условии (4.1) случай, когда  $\gamma_2 \neq 0$ ,  $T \neq 0$ .

Из уравнений (4.2) видно, что в пространстве переменных  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  граница области устойчивости принадлежит плоскости  $\gamma_2 = 0$ . При  $\gamma_2 = 0$  уравнение (3.6), (3.7) имеет корень  $\lambda = 0$ , а при  $\gamma_2 < 0$  — действительный корень  $\lambda > 0$ . Выберем некоторую величину  $\gamma_2 > 0$  и построим область устойчивости в плоскости переменных  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ .

При помощи рассуждений, аналогичных проведенным в случае (4.7), можно показать, что граница  $\Gamma$  области асимптотической устойчивости описывается параметрическими уравнениями, отличающимися от (4.8) наличием слагаемого  $\gamma_2/\varepsilon^4$  в правой части второго уравнения ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(m)$ ). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  кривая  $\Gamma$  асимптотически приближается к оси  $\gamma_1$ , при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$  — к прямой, сдвинутой вверх относительно прямой (4.10) на величину указанного слагаемого. Область асимптотической устойчивости, ограниченная кривой  $\Gamma$ , заштрихована на фиг. 3.

Область устойчивости равновесия  $z = 0$  системы (2.4) ограничена ветвью гиперболы

$$\begin{aligned} \gamma_0 [(Td + \mu + m + 1)(\gamma_1 + d) - T(\mu + m + 1)\gamma_0] = \\ = (Td + \mu + m + 1)^2 \gamma_2 \\ (\gamma_0 > 0, \gamma_1 > -d, \gamma_2 > 0) \end{aligned}$$

Ее асимптотами являются ось  $\gamma_1$  и прямая  $\Pi$  (4.11). Эта область больше области, ограниченной кривой  $\Gamma$ .

**5. Устойчивость при наличии сигналов о деформации.** Откажемся от условия (4.1) и допустим, что

$$\sigma_1 \neq 0, x_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_N = 0 \quad (5.1)$$

Уравнения границы области устойчивости при условии (5.1) получаются, если в левую часть второго уравнения (4.2) добавить слагаемое

$$1/2 \sigma_1 \varepsilon^4 R_3(\varepsilon, 0, m) = \sigma_1 \varepsilon^4 [\operatorname{sh} \varepsilon \sin \varepsilon + m \varepsilon Q_+(\varepsilon)]$$

Вместо первого уравнения в системе (4.8) при этом получаем уравнение

$$\gamma_0 = dT\varepsilon^4 + \mu\varepsilon^4 + \varepsilon^2 [\varepsilon R_2(\varepsilon, m) - 1/2 \sigma_1 R_3(\varepsilon, 0, m)] / R_1(\varepsilon, m) \quad (5.2)$$

При  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(m)$  функция  $R_3(\varepsilon, 0, m) > 0$ . Поэтому, как следует из рассмотрения уравнения (5.2), при  $\sigma_1 < 0$  область устойчивости в плоскости коэффициентов  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  больше области, построенной при условиях (4.1), (4.7) с помощью уравнений (4.8). При  $\sigma_1 < -\infty$  область устойчивости, построенная при условиях (4.7), (5.1), несмотря на наличие запаздывания  $T$ , стремится к области  $D$  (4.6), которая является областью устойчивости для абсолютно твердого стержня при  $\gamma_2 = 0$ ,  $T = 0$ . Таким образом, вводя в обратную связь сигналы о деформации, можно увеличить область устойчивости. При введении в обратную связь также производных от этих сигналов область устойчивости, по-видимому, еще увеличивается.

При помощи полученных уравнений для конкретных значений безразмерных параметров  $\mu$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $T$  системы области асимптотической устойчивости могут быть построены численно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961, 824 с.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.: Наука, 1967. 444 с.
4. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управляемом вращении упругого стержня // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 587—595.
5. *Бербюк В. Е.* Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 238—246.
6. *Бербюк В. Е., Демидюк М. В.* Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 59—67.
7. *Чиликин М. Г., Сандлер А. С.* Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.
8. *Бучин В. А.* Решение задачи о существенном увеличении критической нагрузки сжатого упругого стержня при использовании граничных условий, приводящих к многоточечной краевой задаче // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1331—1335.
9. *Бучин В. А.* Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора с рециклом как объекта с распределенными параметрами посредством сосредоточенных систем управления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 11—24.
10. *Ладиков Ю. П.* Стабилизация процессов в сплошных средах. М.: Наука, 1978. 432 с.
11. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: 1987. 231 с.
12. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
13. *Неймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию  
9.II.1989