Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 531/539

С. В. Панько

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ—РИМАНА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Излагается развитие метода интегральных представлений обобщенной системы Коши — Римана через произвольную аналитическую функцию, аналогичное известному представлению Уиттекера — Положего [1]. Из полученного представления следуют известные частные результаты, предельный случай приводит к классическим представлениям теории обобщенного осесимметричного потенциала. На основе найденных представлений смешанные задачи для исследуемой системы сводятся к парным уравнениям, а затем к уравнению Фредгольма второго рода. Одновременно указывается способ регуляризации парных уравнений и устанавливается случай их замкнутого решения.

Дается распространение полученных результатов на системы более общего вида, а также на уравнения второго порядка, тип и размерность которых не существенны. Показано, что построенные интегральные операторы переводят решение параболического или гиперболического уравнения с переменными коэффициентами в решение классических уравнений теплопроводности и распространения волн и позволяют находить решение соответствующих задач Коши в явном виде.

Эффективность подобного подхода демонстрируется на задаче о притоке о трещине в неоднородном пласте конечной мощности. Приводятся простые формулы для напора и дебита трещин.

Частные случаи системы

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -A\,(m \operatorname{cth} m\sigma)^{1-2\mu}\,\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma} = A\,(m \operatorname{cth} m\sigma)^{1-2\mu}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \tag{0.1}$$

где A, μ, m^2 — произвольные действительные параметры, нашли широкое применение в задачах механики сплошной среды и физики.

Так, при $2\mu = -1$ приходим к известной аппроксимации [2] уравнений Чаплыгина, которая была использована для эффективного решения задач дозвуковой ($A > 0$) и сверхзвуковой газовой и волновой динамики ($A < 0$).

Если $2\mu = p$, $mp = 1$, то имеем систему уравнений нелинейной фильтрации на плоскости годографа [3] для закона сопротивления [3—5]

$$\Phi(w) = (w^{2/p} \pm \lambda^{2/p})^{p/2}, \quad w = \lambda \begin{Bmatrix} \operatorname{sh}^p \sigma/p \\ \operatorname{ch}^p \sigma/p \end{Bmatrix} \tag{0.2}$$

описывающего различные типы реологического поведения от тиксотропного до псевдопластического и содержащего практически все наиболее употребительные в настоящее время модели, за исключением степенной. В частности, при $p = 2$ ($\mu = -1, 2m = 1$) получаем систему уравнений задач фильтрации с предельным градиентом, детально исследованную в [3]. Известно также [6—8], что для $2\mu = -1 - 2k$ (k — целое число), решение рассматриваемой системы выражается через решение системы Коши — Римана в виде конечного дифференциального оператора порядка $k + 1$. Это существенно упрощает нахождение точных решений смешанных задач для исходной системы в неканонических областях (случай $k = 0$ отвечает модели закона фильтрации с предельным градиентом [9] и его однопараметрическому обобщению [10]).

Наконец, при $m \to 0$ имеем систему уравнений осесимметричного потенциала, допускающую интегральное представление решения через произвольную аналитическую функцию [1], лежащему в основе универсального метода сведения смешанных задач для указанной системы к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода [1, 11—14].

1. Исключая функцию $\psi(\sigma, \theta)$ из исходной системы (0.1), приходим к одному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^2} + \frac{2m(1-2\mu)}{\operatorname{sh} 2m\sigma} \frac{\partial H}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1.1}$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде

$$H(\sigma, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(t) \exp n\theta, \quad t = -\operatorname{sh}^2 m\sigma \tag{1.2}$$

находим, что $Z_n(t)$ есть гипергеометрическая функция

$$Z_n(t) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t), \quad -\alpha = \beta = n/2m, \quad \gamma = 1 - \mu \tag{1.3}$$

Так как условие сходимости интеграла в формуле Эйлера [15]

$$\mathrm{B}(\gamma, \gamma-\beta)\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t) = \int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\gamma-\beta-1}(1-\tau t)^{-\alpha} d\tau$$

$(\gamma > \beta)$ в данном случае, вообще говоря, не выполняется, то воспользуемся тождествами [15]

$$\begin{gathered} 2\, {}_2F_1(-\alpha, \alpha; {}^1/_2; t) = (\sqrt{1-t} + i\sqrt{t})^{2\alpha} + (\sqrt{1-t} - i\sqrt{t})^{2\alpha} \\ \mathrm{B}(\gamma, \varepsilon)\, {}_2F_1(-\alpha, \alpha; \gamma+\varepsilon; t) = \int_0^1 y^{\gamma-1}(1-y)^{\varepsilon-1}\, {}_2F_1(-\alpha, \alpha; \gamma; ty)\, dy \end{gathered} \tag{1.4}$$

($B(\gamma, \varepsilon)$ — бэта-функция), в последнем из которых положим $2\gamma = 1$, $2\varepsilon = 1 - 2\mu$. Получим

$$\mathrm{B}({}^1/_2, {}^1/_2 - \mu)\, {}_2F_1(-\alpha, \alpha; 1-\mu; t) = \int_0^1 {}_2F_1(-\alpha, \alpha; {}^1/_2; ty) \frac{(1-y)^{-1/2-\mu}}{\sqrt{y}} dy \tag{1.5}$$

Внесем равенства (1.5) в (1.2) и переставим знаки суммирования и интегрирования, предполагая это возможным. В результате имеем

$$H(\sigma, \theta) = {}^1/_2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, ty) \frac{(1-y)^{-1/2-\mu}}{\sqrt{y}} dy$$

$$S_n(\theta, ty) = 2B_n\, {}_2F_1(-\alpha, \alpha; {}^1/_2; ty), \quad A_n = \mathrm{B}({}^1/_2, {}^1/_2 - \mu) B_n$$

Принимая во внимание равенства (1.3) и (1.4), преобразуем сумму в подынтегральном выражении

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n(\theta, ty) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z_+^n + z_-^n)$$

$$z_\pm = \exp s_\pm, \quad s_\pm = \theta \pm i m^{-1} \operatorname{Arsh} \sqrt{-ty}$$

В качестве B_n возьмем коэффициенты ряда Тейлора некоторой аналитической функции $q(z)$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n z_\pm^n = q(z_\pm) = g(s_\pm)$$

Переходя к переменным $u = \sqrt{y}$ и σ ($t = -\operatorname{sh}^2 m\sigma$), заключаем, что

$$H(\sigma, \theta) = \int_0^1 (1-u^2)^{-\nu} [g(s_+) + g(s_-)] du \tag{1.6}$$

$$s_\pm = \theta \pm i\xi, \quad \xi = m^{-1} \operatorname{Arsh} u \operatorname{sh} m\sigma$$

Аналогичным способом можно найти и $\psi(\sigma, \theta)$. Однако проще воспользоваться следующим свойством системы (0.1).

Положим

$$\psi = \left(\frac{\operatorname{th} m\sigma}{m}\right)^{1-2\mu} \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad H = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

и внесем данные соотношения в исходную систему. Тогда найдем, что $V(\sigma, \theta)$ удовлетворяет точно такому же уравнению, что и $H(\sigma, \theta)$. Таким образом

$$H(\rho, \theta) = \int_0^1 [G(\theta + i\xi) + G(\theta - i\xi)] (1 - u^2)^{-\nu} du$$

$$\psi = i\left(\frac{\operatorname{th} m\sigma}{m}\right)^{1-2\mu} \int_0^1 [G(\theta + i\xi) - G(\theta - i\xi)] \frac{(1 - u^2)^{-\nu} u \operatorname{ch} m\sigma}{\sqrt{1 + u^2 \operatorname{sh}^2 m\sigma}} du \quad (1.7)$$

$$G(s) = g'(s)$$

В результате установили искомое интегральное представление решения системы (0.1) через произвольную аналитическую функцию.

Применительно к задачам фильтрации с предельным градиентом [3] из (1.7) сразу следует асимптотическое поведение $\psi(\sigma, \theta)$ вблизи границы застойной зоны, где $\sigma = 0$

$$\psi(0, \theta) \approx a(\theta) \sigma^{2-2\mu} \approx a_1(\theta) w^{1-\frac{1}{\mu}}$$

Сами же представления удобны в случаях, когда известно распределение напора $H(\sigma, \theta)$ вдоль границы застойной зоны $H(0, \theta) = f(\theta)$. Полагая в выражении для $H(\sigma, \theta)$ $\sigma = 0$, сразу определяем произвольную функцию $G(s)$

$$H(0, \theta) = f(\theta) = 2G(\theta) \int_0^1 (1 - u^2)^{-\nu} du$$

Данное обстоятельство позволяет рассмотреть также обратные задачи продольного сдвига жестко-пластических тел в силу аналогии [16] с задачами фильтрации с предельным градиентом. Действительно, если считать, что граница между пластической и жесткой зонами (жесткая зона отвечает застойной зоне в задачах фильтрации) имеет заданную кривизну $\varkappa(\theta)$, то из формул перехода на физическую плоскость [3] и (1.7) вытекает, что

$$\varkappa(\theta) = 2G'(\theta) \int_0^0 (1 - u^2)^{-\nu} du$$

Перейдем в (1.7) к новой переменной ξ (она определена последним равенством (1.6)) и положим

$$2G(\theta + i\xi) = U(\xi, \theta) - iV(\xi, \theta)$$

В результате получим следующее представление решения системы (0 1)

$$H(\sigma, \theta) = \operatorname{sh}^{2\mu} m\sigma \int_0^\sigma U(\xi, \theta) \frac{m \operatorname{ch} m\xi}{\Delta^\nu} d\xi$$

$$\psi(\sigma, \theta) = (m \operatorname{ch} m\sigma)^{2\mu} \int_0^\sigma V(\xi, \theta) \frac{\operatorname{sh} m\xi}{\Delta^\nu} d\xi \quad (1.8)$$

$$\Delta = \operatorname{sh}^2 m\sigma - \operatorname{sh}^2 m\xi$$

где $U(\xi, \theta)$ и $V(\xi, \theta)$ и $(V(0, \theta) = 0)$ — произвольные гармонические функции, обобщающему известные представления решения системы обобщенного осесимметричного потенциала [1] и переходящему в эти представления при $m \to 0$. Тот факт, что $H(\sigma, \theta)$ и $\psi(\sigma, \theta)$ из (1.8) действительно удовлетворяют исходной системе, проверяется непосредственно.

Получим также решение системы (0.1), отличающееся от (1.8) тем, что интегрирование ведется от σ до ∞, а $U(\xi, \theta)$ и $V(\xi, \theta)$ заменены на $U_1(\xi, \theta)$ и $V_1(\xi, \theta)$ — другие гармонические функции. Относительно последних потребуем, чтобы

$$F(\zeta) = U_1 - iV_1 \sim \exp(2\mu - \xi)\zeta, \quad \zeta = \xi + i\theta, \ \varepsilon > 0$$

при $\zeta \to \infty$ равномерно относительно θ (это обеспечит сходимость соответствующих интегралов), и установим их связь с $U(\xi, \theta)$ и $V(\xi, \theta)$.

Использование для этой цели формул аналитического продолжения гипергеометрической функции в (1.5) [15] требует проведения последующих громоздких преобразований. Другой способ, более предпочтительный, основан на обобщении тождества ([17], с. 574), связывающего интеграл типа Коши с интегралами дробного порядка, которое запишем в виде

$$\int_0^x \left[\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(\tau, \theta)}{\tau - t}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\nu} d\tau - \cos \nu\pi\varphi(t, \theta)\right] \frac{dt}{(x-t)^\nu} = \int_x^\infty \frac{\varphi(t, \theta)}{(t-x)^\nu} dt \quad (1.9)$$

В представлении для $H(\sigma, \theta)$ перейдем к переменным $x = \operatorname{sh}^2 m\sigma$, $t = \operatorname{sh}^2 m\xi$, тогда получим

$$U(x, \theta) = x^{\nu - 1/2} \int_0^x \frac{U(t, \theta)}{2\sqrt{t}(x-t)^\nu} dt \quad (1.10)$$

Если теперь в (1.10) положить

$$U(t, \theta) = 2\sqrt{t}\left[\lambda \int_0^\infty \frac{\varphi(\tau, \theta)}{\tau - t}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\nu} d\tau - \varphi(t, \theta)\right], \quad \lambda = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \nu\pi \quad (1.11)$$

то согласно (1.9) найдем искомое представление

$$H(x, \theta) = x^{\nu - 1/2} \int_x^\infty \frac{\varphi(t, \theta)}{(t-x)^\nu} dt \quad (1.12)$$

в котором еще необходимо выразить $\varphi(t, \theta)$ через $U(t, \theta)$. Но уравнение (1.11) представляет собой сингулярное интегральное уравнение для $\varphi(t, \theta)$, сводящееся к уравнению с постоянными коэффициентами

$$-\varphi_1(t, \theta) \cos \nu\pi + \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_1(\tau, \theta)}{\tau - t} d\tau = \varphi_2(t, \theta) \quad (1.13)$$

$$\varphi_1(t, \theta) = \varphi(t, \theta) t^{1+\nu}, \quad \varphi_2(t, \theta) = {}^1/_2 t^{1/2 - \nu} U(t, \theta)$$

Применяя к данному уравнению преобразование Меллина [18] и производя упрощения, находим

$$\varphi_1(s, \theta) = -\varphi_2(s, \theta) \cos \nu\pi - \varphi_2(s, \theta) \sin \nu\pi \operatorname{ctg}(s + 1 - \nu)\pi$$

$$\varphi_i(s, \theta) = \int_0^\infty \varphi_i(t, \theta) t^{s-1} dt$$

Используя теорему о свертке и возвращаясь к оригиналам, принимая во внимание (1.13), получим

$$\varphi(t, \theta) = \frac{U(t, \theta)}{2\sqrt{t}} \cos \nu\pi - \frac{\sin \nu\pi}{2\pi} \int_0^\infty \frac{U(\tau, \theta)}{\sqrt{\tau}(\tau - t)} d\tau \quad (1.14)$$

Внесем (1.14) в (1.10) и перейдем к переменным σ, ξ; в результате, учитывая четность $U(\sigma, \theta)$ по σ, придем к требуемому представлению

$$H(\sigma, \theta) = \operatorname{Re} \operatorname{sh}^{2\mu} m\sigma \int\limits_{\sigma}^{\infty} M(W) \frac{m \operatorname{ch} m\xi}{\Delta_1^{\nu}} d\xi$$

$$\psi(\sigma, \theta) = \operatorname{Im} (m \operatorname{ch} m\sigma)^{2\mu} \int\limits_{\sigma}^{\infty} M(W) \frac{\operatorname{sh} m\xi}{\Delta_1^{\nu}} d\xi$$

$$M(W) = \sin \nu\pi W(\xi, \theta) - \frac{\cos \nu\pi}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{W(t, \theta) m}{\operatorname{sh} m(t-\xi)} dt \tag{1.15}$$

$$W = U(\xi, \theta) + iV(\xi, \theta), \quad \Delta_1 = (\operatorname{sh}^2 m\xi - \operatorname{sh}^2 m\sigma)$$

(Чтобы найти представление для $\psi(\sigma, \theta)$ достаточно в предыдущих рассуждениях за $V(t, \theta)$ принять $U(t, \theta)\sqrt{1+t^2}$ и повторить проделанные выкладки.)

2. Прежде чем находить формулы обращения интегральных операторов (1.8) и (1.15), сделаем предварительные замечания. Если $2\mu = 1 - 2k$, где k — целое число, решение получающихся из (1.8) интегральных уравнений для определения $U(\xi, \theta)$ и $V(\xi, \theta)$ отыскивается $(k+1)$-кратным дифференцированием, и тем самым приходим к известным результатам [6—8].

Согласно [7, 8] решение системы (0.1) и системы, получающейся из нее заменой μ на $\mu + 1$, связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \psi_{\mu} &= \psi_{\mu+1} - \frac{\operatorname{th} m\sigma}{2\mu m} \frac{\partial \psi_{\mu+1}}{\partial \sigma} \\ H_{\mu} &= m^2 H_{\mu+1} - \frac{m \operatorname{cth} m\sigma}{2\mu} \frac{\partial H_{\mu+1}}{\partial \sigma} \end{aligned} \tag{2.1}$$

В силу данного свойства достаточно рассмотреть случай $|2\mu| < 1$ (при $2\mu = \pm 1$ указанные системы вырождаются в системы Коши — Римана), но в этом случае представления (1.8) и (1.15) — обобщенные уравнения типа Абеля [1, 11—14], решение которых отыскивается по известным формулам (например, [14], с. 71). Таким образом приходим к паре формул обращения представления (1.8)

$$U(\sigma, \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos \mu\pi}{\operatorname{ch} m\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int\limits_{0}^{\sigma} \frac{(\operatorname{sh} m\xi)^{1-2\mu} \operatorname{ch} m\xi}{\Delta^{1-\nu}} H(\xi, \theta) d\xi \tag{2.2}$$

$$V(\sigma, \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos \mu\pi}{\operatorname{ch} m\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int\limits_{0}^{\sigma} \frac{(m \operatorname{ch} m\xi)^{1-2\mu} \operatorname{sh} m\zeta}{\Delta^{1-\nu}} \psi(\xi, \theta) d\xi$$

Чтобы получить формулы обращения представления (1.15) достаточно в (2.2) верхний и нижний пределы интегрирования соответственно заменить на ∞ и σ, а Δ на Δ_1.

Наличие представлений (1.8) и (1.15), а также формул их обращения (2.2) дает возможность сводить смешанные краевые задачи для системы (0.1) в областях типа полуполосы к задачам теории аналитических функций аналогично тому, как это делается в задачах теории осесимметричного потенциала [1, 11—14]

Не нарушая общности, будем считать, что на границе $\theta = \theta_0$ задано однородное условие типа Дирихле или Неймана; при $\theta = 0$ однородное условие Неймана задано на части границы $\sigma > \sigma_0 = a$ — типичный случай смешанной задачи (если на границах полуполосы условия несмешанные, то на основании (2.2) сразу приходим к задаче Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа и замкнутое решение строится последовательными квадратурами).

Смешанная же задача

$$H(\sigma, \theta_0) = 0, \quad 0 < \sigma < \infty$$
$$H(\sigma, 0) = F(\sigma), \ 0 < \sigma < a, \ H(\sigma, 0) = 0, \ \sigma > a$$

согласно (1.18), (1.15) и (2.2) приводится к следующей краевой задаче для аналитической функции $F(\zeta) = U + iV$

$$U(\sigma, \theta_0) = 0, \ |\sigma| < \infty, \ U(\sigma, 0) = F_1(\sigma), \ |\sigma| < a \tag{2.3}$$
$$\sin\mu\pi \frac{\partial U}{\partial\theta}(\sigma, 0) - \frac{\cos\mu\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U}{\partial\theta}(t, 0)\frac{m\,dt}{\operatorname{sh} m(t-\sigma)} = 0, \quad |\sigma| > a$$

где краевые условия для $U(\sigma, \theta)$ четным образом продолжены на отрицательные значения σ, а $F_1(\sigma)$ определяется правой частью первой формулы (2.2).

Используя аппарат интегралов Фурье [17, 18], можно показать, что парные уравнения краевой задачи (2.3) сводятся к полному особому интегральному уравнению [17]

$$\varphi(\sigma) + \int_a^{\infty}\varphi(t)K(\sigma, t)\,dt = \delta R(\sigma) \tag{2.4}$$
$$K(\sigma, t) = \lambda\frac{\operatorname{sh}\varepsilon t\operatorname{ch}\varepsilon\sigma}{\operatorname{sh}^2\varepsilon t - \operatorname{sh}^2\varepsilon\sigma} + \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}k(\varepsilon - \theta_0)\cos kt\cos k\sigma}{\operatorname{sh}k\theta_0\operatorname{ch}k\varepsilon}\,dk$$
$$R(\sigma) = \int_0^a F_1(t)\cos t\sigma\,dt, \quad \lambda = \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\mu\pi, \quad \lambda\delta = \sin\mu\pi, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2m}$$

регуляризация которого осуществляется известными методами [17].

Особо рассмотрим случай, когда $2m\theta_0 = \pi$. Предварительно укажем формулу, определяющую решение следующей краевой задачи для аналитической функции

$$U(\xi, \theta_0) = 0, \ V(\xi, 0) = V(\xi), \ |\xi| < \infty$$

Она находится аналогично формуле Шварца для полосы [18] и имеет вид

$$\frac{d}{d\zeta}U + iV = \frac{1}{2\theta_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V'(t)}{\operatorname{sh}\alpha(t-\zeta)}\,dt, \quad \alpha = \frac{\pi}{2\theta_0} \tag{2.5}$$

Принимая во внимание условия Коши — Римана, перепишем последнее краевое условие (2.3) иначе

$$\sin\mu\pi\frac{\partial V}{\partial\xi}(\xi, 0) - \frac{\cos\mu\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial V}{\partial t}(t, 0)\frac{m}{\operatorname{sh}m(t-\zeta)}\,d\xi$$

и заменим на основании (2.5) интеграл, входящий в данное равенство. Получим

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}(\xi, 0)\sin\mu\pi - \frac{\partial U}{\partial\xi}(\xi, 0)\cos\mu\pi = \operatorname{Re}\frac{dW}{d\zeta}e^{-i\pi\mu} = 0$$

Таким образом, смешанные задачи для системы (0.1) в случае полосы шириной $\theta_0 = \pi/2m$ (в интегральном уравнении (2.4) регулярная часть ядра обращается в нуль) допускают решение в замкнутом виде, как и соответствующие задачи для уравнений обобщенного осесимметричного потенциала в случае полупространства [1, 11—14]. Они, очевидно, сводятся к задаче Римана с разрывными коэффициентами [17] в полосе

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} W = 0, \quad |\sigma| < \infty, \ \theta = \theta_0 \\ &\operatorname{Re} W = F_1(\sigma), \ |\sigma| < a, \ \theta = 0 \\ &\operatorname{Re} We^{-i\pi\mu} = 0, \quad |\sigma| > a, \quad \theta = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

На основе решения данной задачи, как известно, производится регуляризация полного особого уравнения (третий способ) [17]. Само же решение можно использовать для нахождения асимптотических решений интегрального уравнения (2.4).

Укажем следствия из полученных результатов. В силу четности U (σ, θ) по σ заменим ее разложением Фу ье

$$U(\sigma, \theta) = \int_0^\infty C(k) \operatorname{sh} k(\theta - \theta_0) \cos k\sigma \, dk$$

и внесем его в (1.8). Переставляя порядок интегрирования и используя интегральное представление для функций Лежандра первого рода [15], имеем

$$H(\sigma, \theta) = \operatorname{Re} (\operatorname{sh} m\sigma)^{2\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(1/2 - \mu) \int_0^\infty C(k) \operatorname{sh} k(\theta - \theta_0) P_{is}^{\mu} (\operatorname{ch} 2m\sigma) \, dk \tag{2.7}$$

На основании (2.7) заключаем, что рассматриваемые смешанные задачи для системы (0.1) сводятся к парным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int_0^\infty C(k) \operatorname{sh} k\theta_0 P_{is}^{\mu} (\operatorname{ch} 2m\sigma) \, dk = g(\sigma), \quad \sigma < a \\ &\operatorname{Re} \int_0^\infty C(k) \operatorname{ch} k\theta_0 P_{is}^{\mu} (\operatorname{ch} 2m\sigma) \, k \, dk = 0, \quad \sigma > a, \quad s = k/2m \end{aligned} \tag{2.8}$$

допускающим при $2m\theta_0 = \pi$ в соответствии с изложенным точное решение.

3. Изложенный способ нахождения интегрального представления решения систем вида

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -K(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma} = K(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

через произвольную аналитическую функцию, очевидно, применим в тех случаях, когда решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$H_n''(\sigma) - \frac{K'(\sigma)}{K(\sigma)} H_n'(\sigma) + n^2 H_n(\sigma) = 0$$

после соответствующих преобразований представляется интегралом

$$H_n(\sigma) = A_1(\xi) \int_0^1 \tau^\alpha (1 - \tau)^\beta R(\tau \cdot \xi) \, d\tau, \quad \xi = \xi(\sigma) \tag{3.1}$$

где постоянные α, $\beta > -1$ не зависят от параметра разделения n. Частными случаями представления (3.1) являются известные представления специальных функций [15], за исключением функций Лаггера и Чебышева — Эрмита, гипергеометрическая функция ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t)$ и ее обобщение ${}_3F_2(\alpha, \beta; c; \gamma; d; t)$.

Из представления (1.18) непосредственно следует, что интегральный оператор (1.8) также переводит решение классического уравнения теплопроводности

$$\partial^2 U/\partial\sigma^2 = a^2 \partial U/\partial\theta$$

в решение уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\sigma^2} + \frac{2m(1-2\mu)}{\operatorname{sh} 2m\sigma}\frac{\partial H}{\partial\sigma} = a^2 \frac{\partial H}{\partial\theta}$$

соответственно оператор (2.2) сводит решение задачи Коши для указанного уравнения к решению аналогичной задачи для уравнения теплопроводности.

В гиперболическом случае ($A = -1$) представление (1.8) переводит решение волнового уравнения в решение системы (0.1). Тогда, проделав соответствующие выкладки, находим, что решение уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2} + \frac{2m(1-2\mu)}{\operatorname{sh} 2m\sigma}\frac{\partial H}{\partial\sigma} = 0$$

можно записать в виде

$$H(\sigma,\theta) = (1-\nu)\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{-\nu}F(p)\,du + \frac{\operatorname{sh} 2m\sigma}{2m}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{(1-u^2)^{-\nu-1}f'(p)}{1+u^2\operatorname{sh}^2 m\sigma}\,du + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1}\frac{(1-u^2)^{\nu-1}u\operatorname{sh} m\sigma}{(1+u^2\operatorname{sh}^2 m\sigma)^{3/2}}f(p)\,du\right\}\left(\frac{\operatorname{th} m\sigma}{m}\right)^{2\nu-2} \tag{3.2}$$

$$p = \theta + m^{-1}\operatorname{Arsh} u \operatorname{sh} m\sigma, \qquad \nu = {}^1/_2 + \mu$$

где $F(p)$ и $f(p)$ — произвольные функции. При $m \to 0$ (3.2) переходит в известное решение уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу [19]. Наличие представления (3.2) позволяет сразу построить решение обобщенной задачи Коши ([19] с. 276) для рассматриваемого уравнения

$$H(0,\theta) = (1-\nu)F(\theta)\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{-\nu}\,du$$

$$\lim_{\sigma\to 0}(m\operatorname{cth} m\sigma)^{1-2\mu}\frac{\partial H}{\partial\sigma}(\sigma,\theta) = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)f'(\theta)\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\nu-1}\,du$$

Распространение на случай уравнений второго порядка, если число независимых переменных больше двух, очевидно ([19], с. 194). Укажем лишь, что решение уравнения

$$\operatorname{div}[(m\operatorname{cth} m\sigma)^{1-2\mu}\nabla H] = 0, \quad H = H(\sigma, \theta, \eta)$$

представление (1.8) переводит в решение трехмерного уравнения Лапласа, четное по σ.

Рассмотрим следующую задачу для системы (0.1), где положим $\mu = 0$:

$$H(\sigma, \theta_0) = 0, \quad 0 < \delta < \infty$$

$$H(\sigma, 0) = P = \mathrm{const}, \quad 0 < \sigma < a, \quad \frac{\partial H}{\partial\theta}(\sigma, 0) = 0, \quad \sigma > a$$

и примем $2m\theta_0 = \pi$. Данную задачу можно трактовать как задачу о притоке к трещине длиной $2a$ в неоднородном пласте с проницаемостью $K = m\operatorname{th} m\sigma$ и мощностью $h = 2\theta_0$, на внешних границах которого поддерживается нулевой напор, а на трещине, расположенной в зоне повышенной проницаемости,— постоянный напор, равный P.

Согласно (1.8), (2.2) и (2.6) данная краевая задача сводится к следующей задаче для гармонической функции $U(\sigma, \theta)$

$$U(\sigma, \theta_0) = 0 \quad |\sigma| < \infty$$

$$U(\sigma, 0) = \begin{cases} 2P/\pi & |\sigma| < a \\ 0 & |\sigma| > a \end{cases}$$

Применяя формулу Шварца для полосы [18], на основании (1.8) находим решение исходной задачи

$$H(\sigma, \theta) = \operatorname{Re} \frac{2P}{\pi^2 i} \int_0^\sigma \frac{m \operatorname{ch} m\xi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 m\sigma - \operatorname{sh}^2 m\xi}} \ln \frac{\operatorname{sh} m(\zeta - a)}{\operatorname{sh} m(\zeta + a)} d\xi \tag{3.3}$$

$$\zeta = \xi + i\theta$$

и формулу для расхода через трещину

$$Q = \psi(a, 0) = \frac{P}{\pi m} \ln \frac{1 + \operatorname{th} ma}{1 - \operatorname{th} ma} \tag{3.4}$$

(Для вычисления интеграла использована замена $\operatorname{th} m\xi = \operatorname{th} ma \sin \varphi$.)

При $m \to 0$ $(\theta_0 \to \infty)$ из (3.3) и (3.4), получаем

$$H(\sigma, \theta) = \operatorname{Re} \frac{2P}{\pi^2 i} \int_0^\sigma \ln \frac{\zeta - a}{\zeta + a} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma^2 - \xi^2}}, \quad Q = \frac{2Pa}{\pi} \tag{3.5}$$

что соответствует классической задаче о круговой трещине в полупространстве.

Автор благодарит В. М. Ентова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и p, q-аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 422 с.
2. *Домбровский Г. А.* Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа. М.: Наука, 1964. 160 с.
3. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 200 с.
4. *Мифтахутдинов Б. А., Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Некоторые вопросы плоской стационарной нелинейной фильтрации // Проблемы гидродинамики и рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. С. 51—70.
5. *Ентов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* К расчету целиков остаточной вязкопластической нефти. // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 843—856.
6. *Панков В. Н., Панько С. В., Подгайный В. П.* О построении точных решений краевых задач фильтрации с предельным градиентом // Краевые задачи теории фильтрации. Тез. докл. Всесоюз. совещ.-семинара. Ужгород, 1976. С. 34—35.
7. *Домбровский Г. А.* О некоторых системах уравнений первого порядка и соответствующих обобщенных уравнениях Эйлера — Пуассона — Дарбу. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 174—176.
8. *Панько С. В.* О точных решениях краевых задач нелинейной фильтрации. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 107—112.
9. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 177—181.
10. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* О решении задач фильтрации с предельным градиентом. // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 940—946.
11. *Уфлянд А. С.* Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
12. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
13. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
14. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
16. *Ентов В. М.* Об аналогии уравнений плоской фильтрации и продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 162—171.
17. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
18. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
19. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

Томск

Поступила в редакцию
9.III.1988