Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 531.01

Р. М. Булатович

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ НЕОБРАТИМОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ НЕВЫРОЖДЕННОГО МАКСИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассматривается вопрос о наличии аналитических решений уравнения Гамильтона — Якоби необратимой системы с двумя степенями свободы в окрестности невырожденного максимума потенциальной энергии. Показано, что эти решения выделяют в фазовом пространстве многообразия, которые заполнены траекториями, асимптотически приближающимися к положению равновесия при $\to \pm\infty$

Рассмотрим механическую систему с функцией Лагранжа

$$L\colon R^2\{x\} \times R^2\{x^\cdot\} \to R, \quad L = T_2 + T_1 - \Pi$$

$$T_2 = {}^1/{}_2\langle K(x)\, x^\cdot, x^\cdot\rangle, \quad T_1 = \langle V(x), x^\cdot\rangle$$

где T_2 — кинетическая энергия системы ($K(x)$ — положительно определенная матрица, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в R^2), T_1 — линейная форма скоростей, порождающая гироскопические силы, $\Pi(x)$ — потенциальная энергия системы.

Предположим, что функция Π, коэффициенты матрицы K и компоненты векторного поля V — аналитические функции обобщенных координат x. Пусть начало координат $x = 0$ — положение равновесия системы ($d\Pi(0) = 0$), в котором потенциальная энергия имеет невырожденный максимум ($\det \partial^2\Pi(0)\, \partial x^2 \neq 0$). Без уменьшения общности можно считать, что в окрестности начала (E — единичная матрица)

$$K(x) = E + K'(x)$$

$$\Pi(x) = -{}^1/{}_2\langle Dx, x\rangle + \Pi'(x), \quad D = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$$

$$V(x) = \Omega x + V'(x), \quad \Omega = \begin{Vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{Vmatrix}$$

где разложения в ряды Маклорена коэффициентов матрицы K', функции Π' и вектора V' начинаются с членов порядка малости соответственно не ниже 1, 3 и 2.

Уравнение Гамильтона — Якоби, соответствующее лагранжиану L, имеет вид

$${}^1/{}_2\langle K^{-1}(x)(\partial S/\partial x - V(x)), \ \partial S/\partial x - V(x)\rangle + \Pi(x) = h \tag{1}$$

где K^{-1} — матрица, обратная K, h — постоянная энергии. Если $S(x)$ — некоторое решение уравнения (1), то функция $-S(x)$ — является решением уравнения Гамильтона — Якоби, отвечающего лагранжиану $L = T_2 - T_1 - \Pi$. Частное решение $S\colon R^2\{x\} \to R$ уравнения (1) определяет в фазовом пространстве $R^2\{x\} \times R^2\{y\}$ (y — обобщенные импульсы) инвариантное многообразие $M = \{(x, y)\colon y = \partial S/\partial x\}$, т. е. интегральная кривая, имеющая общую точку с M, целиком лежит на нем. Анализируя уравнение $y = \partial S/\partial x$, можно получить некоторые классы движений рассматриваемой системы.

С точки зрения локальной теории задачу об аналитическом решении уравнения Гамильтона — Якоби интересно рассматривать в окрестности положения равновесия на уровне энергии, содержащем состояние равновесия. Следовательно, будем считать, что $h = 0$.

Ищем решение уравнения (1) в окрестности точки $x = 0$ в виде ряда

$$S = \sum_{i \geqslant 2} S_i(x), \quad S_i(x) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=i} s_{\alpha_1\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \tag{2}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$\langle \partial S_2/\partial x - \Omega x, \partial S_2/\partial x - \Omega x \rangle = \langle Dx, x \rangle \tag{3}$$

Можно показать, что квадратичная форма

$$S_2 = {}^1/_2 \langle Ax, x \rangle, \quad A = \frac{1}{a_+} \begin{Vmatrix} |\omega_1| e & \omega a_- \\ \omega a_- & |\omega_2| e \end{Vmatrix}$$
$$e = \sqrt{a_+^2 - \omega^2}, \quad a_\pm = {}^1/_2 (|\omega_1| \pm |\omega_2|) \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению (3), а формы S_m ($m = 3, 4, \ldots$) определяются из соотношений

$$\langle (A - \Omega) x, \partial S_m/\partial x \rangle = G_m \tag{5}$$

где G_m — известная форма m-го порядка. Возможность разрешимости уравнения (5) существенно зависит от спектра матрицы $A - \Omega$. Ее собственные числа таковы: $k_{1,2} = (e \pm \sqrt{a_+^2 - \omega^2})$. Если $a_+ > |\omega|$, то выражение $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$ не обращается в нуль при целых неотрицательных α_j, таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = m$ ($m = 2, 4, \ldots$). Следовательно, по теореме Ляпунова ([1], с. 66) существует одна и только одна форма S_m, удовлетворяющая уравнению (5). Таким образом, существует формальное решение уравнения (1) в виде степенно́го ряда (2) с квадратичной частью (4).

Отметим, что если $a_+ = |\omega|$, то выражение $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$ при четном m может обращаться в нуль и, следовательно, в общем случае не существует решений в виде степенно́го ряда.

Теорема. Если $a_+ > |\omega|$, то в окрестности положения равновесия $x = 0$ уравнение (1) имеет аналитические решения

$$S^\pm = {}^1/_2 \langle A^\pm x, x \rangle + W^\pm (x); \ A^+ = -A\,(-\omega)$$

причем матрица A определена выражением (4), а разложения функций $W^\pm$ в ряды Маклорена начинаются с членов не ниже третьего порядка.

В случае, когда система натуральная ($T_1 \equiv 0$), получаем теорему из [2]. Когда $|\omega_1| > |\omega|$, $|\omega_2| > |\omega|$, существование гладкого решения уравнения (1) доказано в [3].

Следствие. В предположениях теоремы инвариантные многообразия $M^\pm = \{(x, y) \colon y = \partial S^\pm/\partial x\}$ сплошь заполнены фазовыми траекториями, асимптотически приближающимися к состоянию равновесия при $t \to \mp \infty$.

Для доказательства следствия в уравнения $y = \partial S/\partial x$ подставим $y = K\dot{x} + V$. Решение S^+ (S^-) порождает систему уравнений второго порядка с особой точкой $x = 0$ типа неустойчивого (устойчивого) узла или фокуса. Поднимая семейство асимптотических траекторий $x(t)$ в фазовое пространство, получим многообразия $M^\pm$.

Отметим, что если $a_+ < |\omega|$, то равновесие устойчиво и асимптотические движения отсутствуют. Для линейной системы при условии $a_+ = |\omega|$ многообразия $M^\pm$ не содержат асимптотические траектории. В нелинейной системе при этом условии асимптотические траектории могут существовать.

Вот простой пример: $K'(x) = 0$, $D = E$, $\Pi' = {}^1/_2 (x_1^6 + 3x_1^2x_2^4 + 3x_1^4x_2^2 + x_2^6)$, $\omega = 1$, $V' = 0$. Соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби имеет решение $S = {}^1/_4 (x_1^2 + x_2^2)^2$. Оно порождает систему $x_1^{\cdot} = -x_2 + x_1 (x_1^2 + x_2^2)$, $x_2^{\cdot} = x_1 + x_2 (x_1^2 + x_2^2)$, особая точка которой, как можно убедиться,— фокус.

Для доказательства теоремы достаточно установить существование аналитического решения уравнения

$$
{}^1/_2\langle K^{-1}(\varepsilon x)(\partial S/\partial x - \varepsilon^{-1}V(\varepsilon x)), \partial S/\partial x - \varepsilon^{-1}V(\varepsilon x)\rangle + \varepsilon^{-2}\Pi(\varepsilon x) = 0 \qquad (6)
$$

в области $G = \{x\colon |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, 2\}$ при достаточно малом ε. Для этого используем известную методику [2]. Введем банаховы пространства $A = (f, \|\cdot\|_1)$ и $B = (f, \|\cdot\|_2)$ функций $f\colon R^2 \to R$, которые представляются в G абсолютно сходящимся степенным рядом

$$
f(x) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2}^{\infty} a_{\alpha_1\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad a_{\alpha_1\alpha_2} \in R
$$

$$
\|f\|_1 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2}^{\infty} (\alpha_1 + \alpha_2) |a_{\alpha_1\alpha_2}|, \quad \|f\|_2 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2}^{\infty} |a_{\alpha_1\alpha_2}|
$$

Запишем уравнения (6) в виде функционального уравнения $F(S, \varepsilon) = 0$ и рассмотрим F как отображение некоторой окрестности H точки $(S_2, 0) \in A \times R$, где S_2 определяется выражением (4), в B. Справедливы следующие утверждения:

1) $S(S_2, 0) = 0$ и F непрерывно в точке $(S_2, 0)$;

2) производная $F_s'(S, \varepsilon)$ отображения F существует в H и непрерывна в точке $(S_2, 0)$;

3) $F_s'(S_2, 0) = \langle (A - \Omega) x, \partial/\partial x\rangle$.

Покажем, что оператор $F_s'(S_2, 0)$ имеет ограниченный обратный. Можно считать, что этот линейный оператор приведен к «каноническому» виду

$$
F_S'(S_2, 0) = \begin{cases} k_1 x_1 \partial/\partial x_1 + k_2 x_2 \partial/\partial x_2, & a_- > |\omega| \\ (e x_1 - g x_2)\partial/\partial x_1 + (g x_1 + e x_2)\partial/\partial x_2, & a_- < |\omega| \\ e x_1 \partial/\partial x_1 + (e x_2 + \nu x_1)\partial/\partial x_2, & a_- = |\omega| \end{cases}
$$

$$
g = \sqrt{|a_-^2 - \omega^2|}, \quad k_1 = e + g, \quad k_2 = e - g
$$

Рассмотрим, например, случай $|a_-| < |\omega|$. Пусть $v(x) \in B$. Уравнение $F_s'(S_2, 0)\, u = v$ имеет решение вида

$$
u = \sum_{k=2}^{\infty} u_k, \quad u_k = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} u_{\alpha_1\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}
$$

в котором коэффициенты формы u_k определяются из уравнения

$$
(E_{(k)} + g(ek)^{-1} C_{(k)})\, U_{(k)} = V_{(k)} \qquad (7)
$$

где $E_{(k)}$ — $[(k+1) \times (k+1)]$-мерная единичная матрица, $C_{(k)}$ — $[(k+1) \times (k+1)]$-матрица, составленная из элементов $c_{ii-1} = i - k - 1$ $(i = 1, \ldots, k)$, $c_{ii+1} = i + 1$, остальные элементы равны нулю, $U_{(k)}$ и $V_{(k)}$ — $[(k+1) \times 1]$-матрицы коэффициентов формы u_k и v_k. Из (7) следует неравенство

$$
\gamma(U_{(k)}) \leqslant (ek)^{-1} \| (E_{(k)} + g(ek)^{-1} C_{(k)})^{-1} \| \, \gamma(V_{(k)})
$$

где $\|\cdot\|$ — матричная норма, индуцированная векторной нормой $\gamma(X) = \sum_i |x_i|$. Так как $\|E_{(k)}\| = 1$, $\|C_{(k)}\| = k$ и $g/e < 1$, то справедлива оценка

$$k \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} |u_{\alpha_1\alpha_2}| \leqslant \frac{1}{e-g} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} |v_{\alpha_1\alpha_2}|$$

откуда имеем $\|u\|_1 \leqslant c\|v\|_2$, $c = 1/(e+g)$.

В других случаях доказательство проще.

Следовательно, оператор $F_s'(S_2, 0)$ имеет ограниченный обратный.

В силу теоремы о неявной функции [4] при малых ε существует единственное решение $S(x, \varepsilon)$ уравнения (6), мало отличающееся от функции $S_2(x)$. Существование аналитического решения S^+ уравнения (1) доказано. Так как условия теоремы инвариантны относительно замены T_1 на $-T_1$ в выражении функции Лагранжа, то отсюда вытекает существование второго решения S.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. *Булатович Р. М.* Существование решений уравнения Гамильтона — Якоби в окрестности невырожденных положений равновесия // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 330—333.
3. *Болотин С. В.*, *Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1980. № 4. С. 84—89.
4. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1988