

УДК 531.353

С. Т. Завалицин

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРИИ ЛОУДЕНА

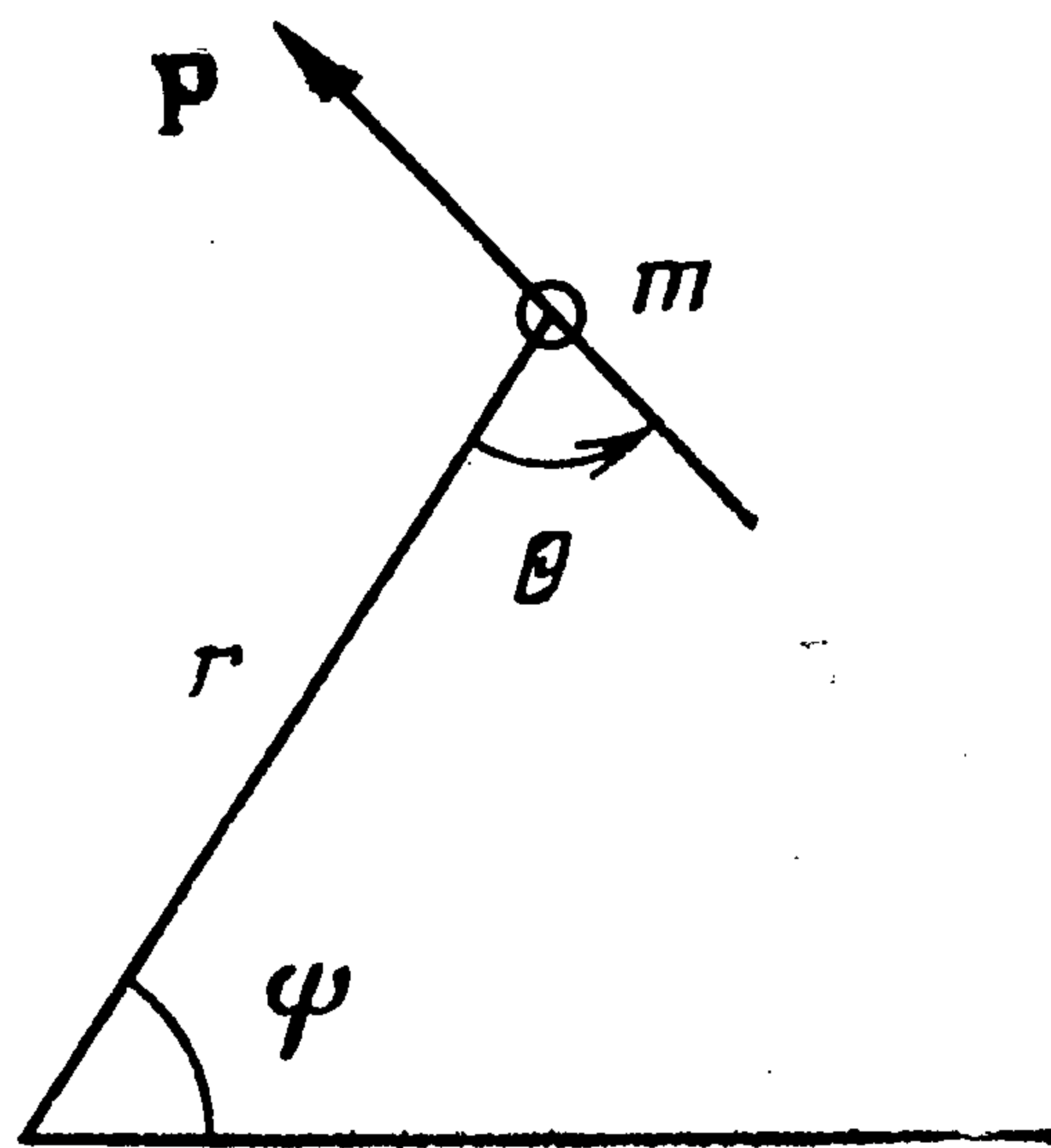
Предлагается расширение математической модели движения материальной точки переменной массы в центральном гравитационном поле, рассчитанное на дискретный расход реактивной массы и скачкообразное изменение направления реактивной силы. Исследуется задача о программировании оптимальных орбитальных переходов в случае, когда в отличие от [1, 2] время перехода фиксировано. В результате дано описание возможных участков оптимальных переходов, отвечающих импульсной, нулевой и промежуточной тяге. Установлено, что промежуточная тяга порождает движение по спирали, не совпадающей со спиралью Лоудена.

1. Обобщение уравнений движения материальной точки переменной массы в центральном гравитационном поле. Как известно, аналог уравнения Мещерского в случае плоского движения материальной точки переменной массы в центральном гравитационном поле имеет вид

$$r'' = f(r, \chi) + m^{-1}P \cos \theta, \quad f = -\nu r^{-2} + \chi^2 r^{-3} \quad (1.1)$$

$$\psi' = r^{-2}\chi, \quad \chi' = r m^{-1}P \sin \theta, \quad m' = -c^{-1}P$$

Здесь r, ψ — полярные координаты точки, χ — секторная скорость, ν — гравитационная постоянная, m — текущая масса точки, c — удельный импульс тяги P , угловая величина θ характеризует направление реактивной силы (фиг. 1).



Фиг. 1

При классическом понимании операции дифференцирования уравнения (1.1) имеют смысл только для обычных [3] (например, кусочно-непрерывных) программ $P(\cdot), \theta(\cdot)$. Однако ряд задач об оптимальных межорбитальных переходах в классе обычных программ $P(\cdot)$ решений не имеет. Аппроксимация таких задач разрешимыми устанавливает [1] у приближенных оптимальных программ $P(\cdot)$ тенденцию воспроизвести δ -импульс Дирака.

Допущение импульсной тяги возможно лишь при толковании операции дифференцирования в последнем из уравнений (1.1) в смысле теории обобщенных функций [3]. При этом, как следствие, получается, что импульсной тяге соответствует скачкообразное изменение текущей массы. Последнее сразу приводит к проблеме перемножения разрывной функции m^{-1} на импульсную тягу и затем на, возможно, разрывную программу $\theta(\cdot)$. Исследование такой проблемы показало, что независимая гладкая аппроксимация тягового импульса и скачка по его направлению может приводить к различным траекториям. Причиной этой неопределенности является тот факт, что система (1.1) не обладает свойством Фробениуса [4, 5]. Таким образом, при независимом выборе программ изменения импульсной тяги и ее направления нельзя надеяться на единственность порождаемой ими траектории. Следующий прием согласования программ $P(\cdot), \theta(\cdot)$ приводит к единственной и устойчивой траектории.

Пара $\{P(\cdot), \theta(\cdot)\}$ считается согласованной, если тяга $P = -c Dm$, текущая масса изменяется кусочно-непрерывно и для некоторой кусочно-непрерывной функции $\sigma(\cdot)$ угол $\theta(t) = \sigma(s(t))$, где $s = c \ln m$. Симво-

лом D обозначена операция обобщенного дифференцирования.

Следует отметить, что пара $\{P(\cdot), \theta(\cdot)\}$ с кусочно-непрерывными компонентами эквивалентна некоторой согласованной паре. Она отличается от исходной только тем, что направление тяги на участках, где тяга равна нулю, постоянно.

Согласованная пара однозначно определяется парой программ $\{s(\cdot), \sigma(\cdot)\}$:

$$P = -cDm, \quad m = \exp(c^{-1}s), \quad \theta = \sigma(s) \quad (1.2)$$

Можно показать, что уравнения движения материальной точки переменной массы в центральном гравитационном поле, порождаемые согласованной парой, имеют вид

$$\begin{aligned} r^{\cdot} &= y_2 + w_2(s); \quad y_2^{\cdot} = f(r, \chi), \quad \chi = y_4 + rw_4(s) \\ \psi^{\cdot} &= r^{-2}\chi; \quad y_4^{\cdot} = -r^{\cdot}w_4(s) \\ w_2(s) &= \int_s^{s(0)} \cos \sigma(\xi) d\xi, \quad w_4(s) = \int_s^{s(0)} \sin \sigma(\xi) d\xi \\ y_2(0) &= r^{\cdot}(0), \quad y_4(0) = \chi(0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Величины y_i играют вспомогательную роль.

Располагая решением системы (1.3), можно указать параметры движения материальной точки

$$r, r^{\cdot} = y_2 + w_2(s), \quad \psi, \chi = y_4 + rw_4(s) \quad (1.4)$$

соответствующие программам (1.2) изменения тяги и ее направления.

Имеют место следующие факты.

Если тяга изменяется кусочно-непрерывно, то система (1.1), (1.2) эквивалентна системе (1.3).

Если последовательности гладких программ $\{s_k(\cdot)\}, \{\sigma_k(\cdot)\}$ сходятся соответственно к программам $s(\cdot), \sigma(\cdot)$ в точках их непрерывности, то последовательность траекторий системы (1.1), (1.2) ($s = s_k, \sigma = \sigma_k$) сходится к траектории (1.4) в точках ее непрерывности.

Система (1.3) эквивалентна системе (1.1), (1.2), если только в последней дифференцирование обобщенное и принято следующее правило умножения разрывных функций на импульсные:

$$cm^{-1}P \cos \sigma(s) = -Dw_2(s), \quad cm^{-1}P \sin \sigma(s) = -Dw_4(s)$$

Эти формулы для кусочно-непрерывной тяги верны в обычном смысле. Их правые части имеют смысл для импульсной тяги и служат определением для теряющих в этом случае смысл левых частей.

Выпишем формулы приращения для радиальной и секторной скоростей в результате скачкообразного изменения массы

$$\begin{aligned} \Delta r^{\cdot} &= - \int_{s(t-0)}^{s(t+0)} \cos \sigma(\xi) d\xi, \quad \Delta \chi = -r(t) \int_{s(t-0)}^{s(t+0)} \sin \sigma(\xi) d\xi \\ \Delta s &= s(t+0) - s(t-0) = c \ln(m(t+0)(m(t-0))^{-1}) \end{aligned}$$

Пусть на интервале $[s(t-0), s(t+0)]$ функция $\sigma(s)$ постоянна. Тогда справедлив аналог формулы Циолковского, именно

$$\Delta r^{\cdot} = -\Delta s(t) \cos \sigma(s(t)), \quad \Delta \chi = -\Delta s(t) r(t) \sin \sigma(s(t)) \quad (1.5)$$

Следовательно, изложенный подход соответствует трактовке ([6],

с. 86) «мгновенного выброса конечной массы как идеализации непрерывного выброса ее за исчезающее малое время».

2. Постановка задачи оптимизации межорбитального перелета за фиксированное время, ее формализация и редукция. Обратимся к задаче динамической оптимизации (17), с. 86) (t_p — фиксированный момент времени)

$$r(t_p) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

при динамических связях (1.1). Предполагается, что в начале маневра $r(0) = r_0$, $r'(0) = r_0'$, $\chi(0) = \chi_0$, $m(0) = m_0$. В конечный момент должны выполняться требования

$$r'(t_p) = r_p', \quad \chi(t_p) = \sqrt{vr(t_p)} + \Delta\chi_p, \quad m(t_p) = m_p \quad (2.2)$$

Если $r_p' = 0$, $\Delta\chi_p = 0$, то речь идет о перелете на круговую орбиту наибольшего радиуса.

Формализуем такую задачу. Именно оптимальные программы изменения тяги и ее направления будем искать среди согласованных пар. В связи с этим дифференциальные связи (1.1), (1.2) расширяем до связей (1.3).

Теперь задача формулируется следующим образом. Надлежит обеспечить требование (2.1) в классе кусочно-непрерывных невозрастающих функций $s(\cdot)$, таких, что $s(0) = c \ln m_0$, $s(t_p) = c \ln m_p$, и определенных на отрезке $[s(t_p), s(0)]$ кусочно-непрерывных функций $\sigma(\cdot)$.

3. Вывод необходимых условий оптимальности. Для решения задачи применим принцип Лагранжа. Заметим, что третье из уравнений (1.3) можно не учитывать, поскольку угловое положение точки не входит в другие уравнения, минимизируемый функционал и граничные условия (2.2). Итак, составим функционал Лагранжа

$$L = -r(t_p) + \mu_2 r'(t_p) + \mu_4 (\chi(t_p) - \sqrt{vr(t_p)}) + \int_0^{t_p} (\lambda_1 (y_2 + w_2 - r') + \lambda_2 (f - y_2') - \lambda_4 (r'w_4 + y_4')) dt \quad (3.1)$$

Далее применяем формулу интегрирования по частям, вводим гамильтониан

$$H = (\lambda_1 - \lambda_4 w_4) r' + \lambda_2 f \quad (3.2)$$

вычисляем при учете последних двух формул и (1.3) вариацию δL и, как обычно, полагаем, что множители Лагранжа λ_i — решение задачи Коши для сопряженной системы

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= -\partial H / \partial r, \quad \lambda_1(t_p) = -1 + \mu_4 (w_4(s(t_p)) - 1/2 \sqrt{v(r(t_p))^{-1}}) \\ \lambda_2' &= -\partial H / \partial r', \quad \lambda_2(t_p) = \mu_2, \quad \lambda_4' = -\partial H / \partial \chi, \quad \lambda_4(t_p) = \mu_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда вытекают формулы

$$\partial H / \partial w_2 = -\lambda_2', \quad \partial H / \partial w_4 = -(\lambda_4 r)' \quad (3.4)$$

В результате для вариации δL получается выражение

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{s(t_p)}^{s(0)} ((\lambda_4 r)(t_p) \cos \sigma(\xi) - \lambda_2(t_p) \sin \sigma(\xi)) \delta \sigma(\xi) d\xi + \int_0^{t_p} \int_{s(t_p)}^{s(0)} (\lambda_2' \sin \sigma(\xi) - \\ &- (\lambda_4 r)' \cos \sigma(\xi)) \delta \sigma(\xi) d\xi dt + \int_0^{t_p} (\lambda_2' \cos \sigma(s) + (\lambda_4 r)' \sin \sigma(s)) \delta s(t) dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

Напомним, что допустимая программа $s(\cdot)$ является невозрастающей. Пусть $0 = t_0, t_1, \dots, t_k = t_p$ — неубывающая последовательность моментов, в которых функция $s(\cdot)$ претерпевает разрывы. На интервалах (t_i, t_{i+1}) функция $s(\cdot)$ непрерывна и не возрастает. Обратная к ней функция $s^{-1}(\cdot)$ также не возрастает, но может допускать разрывы, соответствующие участкам нулевой тяги. Доопределим ее в точках разрыва по непрерывности слева. В этих обстоятельствах можно сменить порядок интегрирования во втором из участвующих в выражении (3.5) интегралах. В результате получаем

$$\begin{aligned} \delta L = & \sum_{i=0}^k \int_{s(t_i-0)}^{s(t_i+0)} (\lambda_2(t_i) \sin \sigma(\xi) - (\lambda_4 r)(t_i) \cos \sigma(\xi)) \delta \sigma(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{s(t_i-0)}^{s(t_i+0)} (-\lambda_2(s^{-1}(\xi)) \sin \sigma(\xi) + (\lambda_4 r)(s^{-1}(\xi)) \cos \sigma(\xi)) \delta \sigma(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^{t_p} (\lambda_2 \dot{\cos} \sigma(s(t)) + (\lambda_4 r) \dot{\sin} \sigma(s(t))) \delta s(t) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Приступим к анализу вариации (3.6), которая для допустимых вариаций $\delta s(\cdot)$, $\delta \sigma(\cdot)$ обязана быть неотрицательной. Естественно рассмотреть случаи импульсной, промежуточной и нулевой тяги.

Импульсная тяга. В этом случае должны выполняться равенства

$$\lambda_2(t_i) \sin \sigma(\xi) + (\lambda_4 r)(t_i) \cos \sigma(\xi) = 0, \quad s(t_i + 0) < \xi < s(t_i - 0) \quad (3.7)$$

Отсюда можно сделать следующий принципиальный вывод: в моменты дискретного расхода реактивной массы при условии, что величина $\lambda_2(t_i) \lambda_4(t_i) \neq 0$, линия действия тяги не меняется. Само же направление тяги может менять свое направление на противоположное любое конечное число раз. При отсутствии явления самокомпенсации для приращений радиальной и секторной скорости согласно (1.5) имеем

$$\Delta r^*(t_i) = -\Delta s(t_i) \cos \theta(t_i), \quad \Delta \chi(t_i) = -\Delta s(t_i) r(t_i) \sin \theta(t_i) \quad (3.8)$$

При этом считается, что $\theta(t_i) = \sigma(s(t_i + 0) + 0)$.

Промежуточная тяга. Этот случай соответствует участкам строгого убывания функции $s(\cdot)$. Анализ второго слагаемого из выражения (3.6) приводит к необходимому условию:

$$\lambda_2(t) \sin \sigma(s(t)) - (\lambda_4 r)(t) \cos \sigma(s(t)) = 0 \quad (3.9)$$

Обратимся к третьему интегральному члену вариации (3.6). Применение вариаций типа игольчатых, изображенных на фиг. 2, позволяет сделать вывод

$$\lambda_2 \dot{\cos} \sigma(s) + (\lambda_4 r) \dot{\sin} \sigma(s) = 0. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.9), (3.10) образуют линейную систему относительно $\cos \sigma(s)$, $\sin \sigma(s)$. Следовательно, ее определитель равен нулю. Последующее интегрирование дает интеграл системы (1.3), (3.3)

$$\lambda_2^2 + (\lambda_4 r)^2 = \text{const} \quad (3.11)$$

Дифференцирование соотношения (3.11) приводит к тождеству

$$Q(s, t) = \lambda_2 \alpha - \lambda_4 r \beta = 0 \quad (3.12)$$

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_4 r^{-1} y_4, \quad \beta = \lambda_4 r' - \lambda_2 r^{-2} \chi \quad (3.13)$$

Из (3.12) при помощи (3.9) получаем тождества

$$\partial Q / \partial t = 2\nu r^{-3} \lambda_2^2 - \nu r^{-1} \lambda_4^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad (3.14)$$

$$\partial^2 Q / \partial t^2 = -9\nu r^{-3} \lambda_2 \alpha - 6\nu r^{-4} r' \lambda_2^2 + 9\nu r^{-4} \chi \lambda_2 \lambda_4 = 0 \quad (3.15)$$

Последнее соотношение равносильно следующему:

$$\lambda_2 (3r\alpha + 2r'\lambda_2 - 3\lambda_4\chi) = 0 \quad (3.16)$$

Если второй множитель произведения в левой части равенства (3.16) равен нулю на некотором интервале времени, то при учете определения (3.13) второе из уравнений (3.3) можно представить в виде

$$\lambda_2' = {}^{2/3}r^{-1}r'\lambda_2 \quad (3.17)$$

Решая это уравнение, имеем

$$\lambda_2 = \lambda_2(t_*) r^{-2/3}(t_*) r^{2/3}, \quad 0 < t_* < t_p \quad (3.18)$$

Теперь можно утверждать, что в случае промежуточной тяги множитель λ_2 не имеет нулей.

Действительно, наличие такого нуля означало бы согласно (3.18), что множитель λ_2 тождественно равен нулю. Отсюда на основании (3.9) имело бы место тождество $\lambda_4 \cos \theta(t) = 0$, а в соотношении с (3.12) — еще одно $\lambda_4 \beta = 0$, т. е. $\lambda_4 r' = 0$. В силу (3.14) верно равенство $\nu r^{-1} \lambda_4^2 = \alpha^2$. Значит, если $\lambda_4 = 0$, то и $\lambda_1 = 0$, что противоречило бы граничному условию: $\lambda_1(t_p) = -1$. Поэтому $\lambda_4 \neq 0$ и, следовательно, $\cos \theta(t) = 0$, $r' = 0$. Последнее, очевидно, не может соответствовать участку с ненулевой тягой.

Отметим, что в рассматриваемом случае $\sin \theta(t) \neq 0$. В противном случае согласно (3.9) $\lambda_4 = 0$, а в силу (3.12) и $\alpha = \lambda_1 = 0$. Но тогда на основании (3.14) $(2\nu r^{-3} + r^{-4} \chi^2) \lambda_2^2 = 0$, т. е. $\lambda_2 = 0$, что противоречит сделанному выше выводу.

Примем обозначение $\kappa = \operatorname{ctg} \theta$. В силу (3.9) $\kappa = \lambda_2 (\lambda_4 r)^{-1}$. Отсюда производная $\kappa' = \lambda_2^{-1} \lambda_2' \kappa - (\lambda_4 r)' \lambda_2^{-1} \kappa^2$. Учитывая в правой части этого равенства формулу (3.10) и уравнение (3.17), получаем уравнение

$$\kappa' = {}^{2/3}r^{-1}r'\kappa (1 + \kappa^2) \quad (3.19)$$

Как и уравнение (3.17), оно разрешимо в квадратурах

$$\kappa^{-2} + 1 = c_1 r^{-4/3}, \quad c_1 = (\kappa^{-2}(t_*) + 1) r^{4/3}(t_*) \quad (3.20)$$

Тем самым вычислен оптимальный наклон линии промежуточной тяги. После этого приступим к определению величины тяги. Она будет найдена из условия движения материальной точки по так называемой особой поверхности, задаваемой тождествами (3.14), (3.15). Но сначала выпишем ее уравнения в терминах величины κ . Отметим, что величина (см. (3.13))

$$\beta = r^{-1} \lambda_2 (\kappa^{-1} r' - r^{-1} \chi) \quad (3.21)$$

При помощи равенств (3.12), (3.21) тождество (3.14) преобразуется к виду

$$r (1 + \kappa^2) (r' - \kappa r^{-1} \chi)^2 = \nu \kappa^2 (1 - 2\kappa^2) \quad (3.22)$$

Отсюда, кстати, сразу вытекает ограничение на величину κ

$$|\kappa| \leq 1/\sqrt{2} \quad (3.23)$$

Далее на основании (3.13), (3.12), (3.21) можно получить

$$\alpha = \kappa^{-1}\beta = r^{-1} (\kappa^{-1}r^* - r^{-1}\chi) \kappa^{-1}\lambda_2$$

Учитывая это выражение в тождестве (3.16), приходим к соотношению

$$r^* = 6\kappa (3 + 2\kappa^2)^{-1}\chi r^{-1} \quad (3.24)$$

Это равенство дает возможность исключить радиальную скорость из соотношения (3.22), в результате чего получится формула для секторной скорости на особой поверхности

$$\chi = \sqrt{vr} g(\kappa), \quad g(\kappa) = \frac{3 + 2\kappa^2}{3 - 2\kappa^2} \sqrt{\frac{1 - 2\kappa^2}{1 + \kappa^2}} \quad (3.25)$$

Можно показать, что движение по особой поверхности осуществляется под действием промежуточной тяги

$$P = 3mvr^{-2}\kappa \frac{9 - 22\kappa^2 - 36\kappa^4 - 40\kappa^6}{(3 - 2\kappa^2)^3 (1 + \kappa^2)^{1/2}} \text{sign}(\sin \theta(t)) \quad (3.26)$$

Выведем уравнения аналога спирали Лоудена. Система, составленная из третьего уравнения системы (1.3) и уравнения (3.24), допускает интеграл (учитываем формулы (3.25))

$$\text{arctg } \kappa^{-1} - 3\kappa^{-1} = 4c_1\psi + c_2 \quad (3.27)$$

в котором постоянная c_2 произвольная, а постоянная c_1 указана в (3.20).

В итоге имеем систему уравнений (3.20), (3.27), которые в параметрической форме определяют некоторую спираль, отличную от описанной Лоуденом [1]. Поскольку параметр κ не выходит за пределы ограничения (3.23), то найденная спираль не может, как это делает спираль Лоудена, разворачиваться вокруг центра гравитационного поля до бесконечности (см. фиг. 3, где светлой точке соответствует $\kappa = 1 / \sqrt{2}$).

Нулевая тяга на промежутке (t_, t_{**}) .* По определению допустимой программы изменения линии тяги на таком участке $\sigma(s(t)) = \theta_* = \text{const}$. Вариация (см. формулу (3.6))

$$\delta L = \int_{t_*}^{t_{**}} (\lambda_2^* \cos \theta_* + (\lambda_4 r)^* \sin \theta_*) \delta s(t) dt$$

должна быть неотрицательной при любой допустимой вариации δs и, в частности, для вариаций, изображенных на фиг. 4. Для левой из них, если пользоваться формулой интегрирования по частям, имеем

$$\delta L = \varepsilon ((\lambda_2(\tau) - \lambda_2(t_*)) \cos \theta_* + ((\lambda_4 r)(\tau) - (\lambda_4 r)(t_*)) \sin \theta_*) \geq 0$$

Аналогично при помощи правой вариации устанавливается неравенство, которое получается из последнего заменой момента t_* на t_{**} . В итоге получены необходимые условия

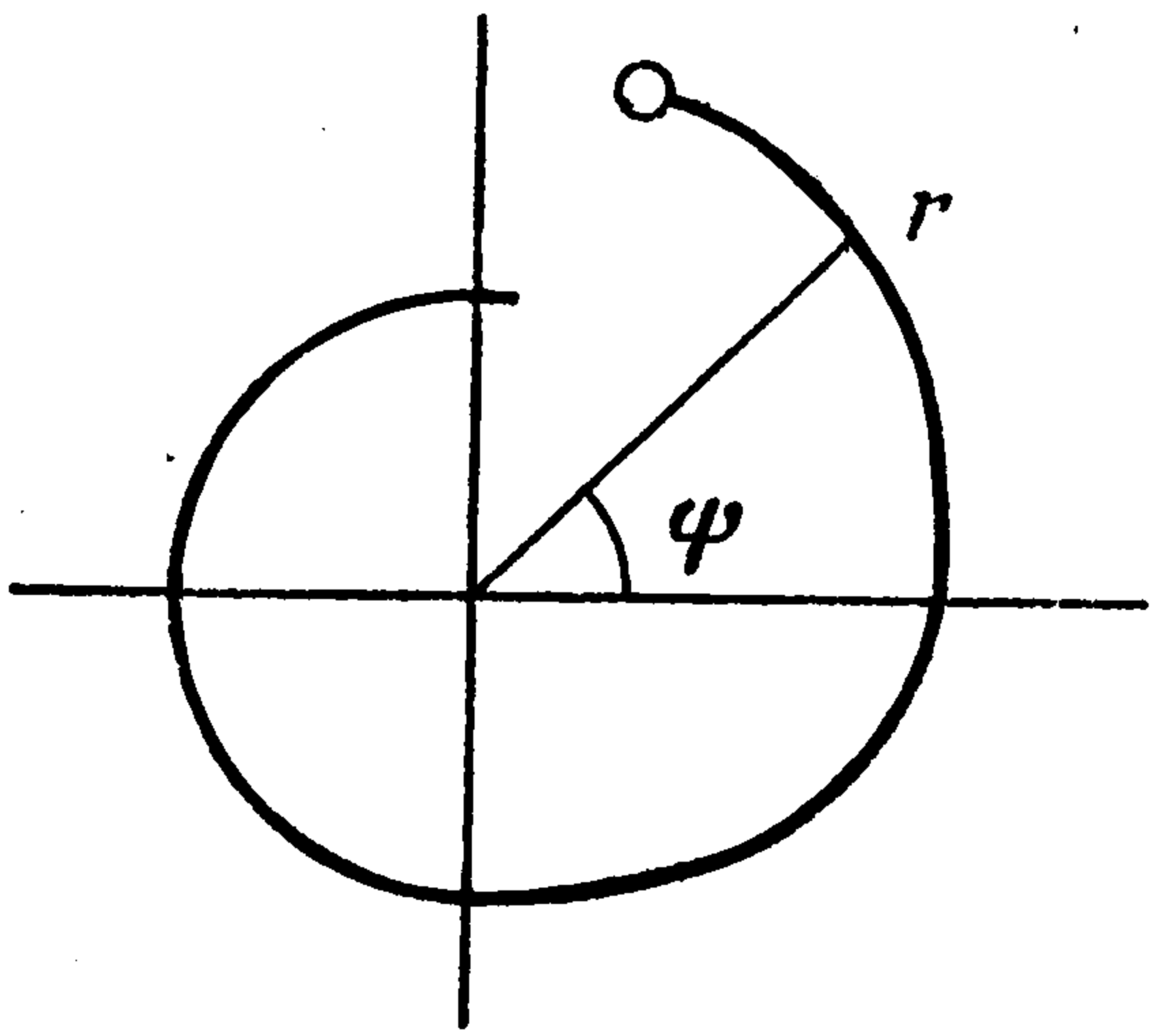
$$\begin{aligned} \lambda_2(t) \cos \theta_* + (\lambda_4 r)(t) \sin \theta_* &\geq \lambda_2(t_*) \cos \theta_* + (\lambda_4 r)(t_*) \sin \theta_* = \\ &= \lambda_2(t_{**}) \cos \theta_* + (\lambda_4 r)(t_{**}) \sin \theta_{**}, \quad t_* \leq t \leq t_{**} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из условия независимости длительности участка нулевой тяги на основании соотношений (3.28) можно вывести равенства

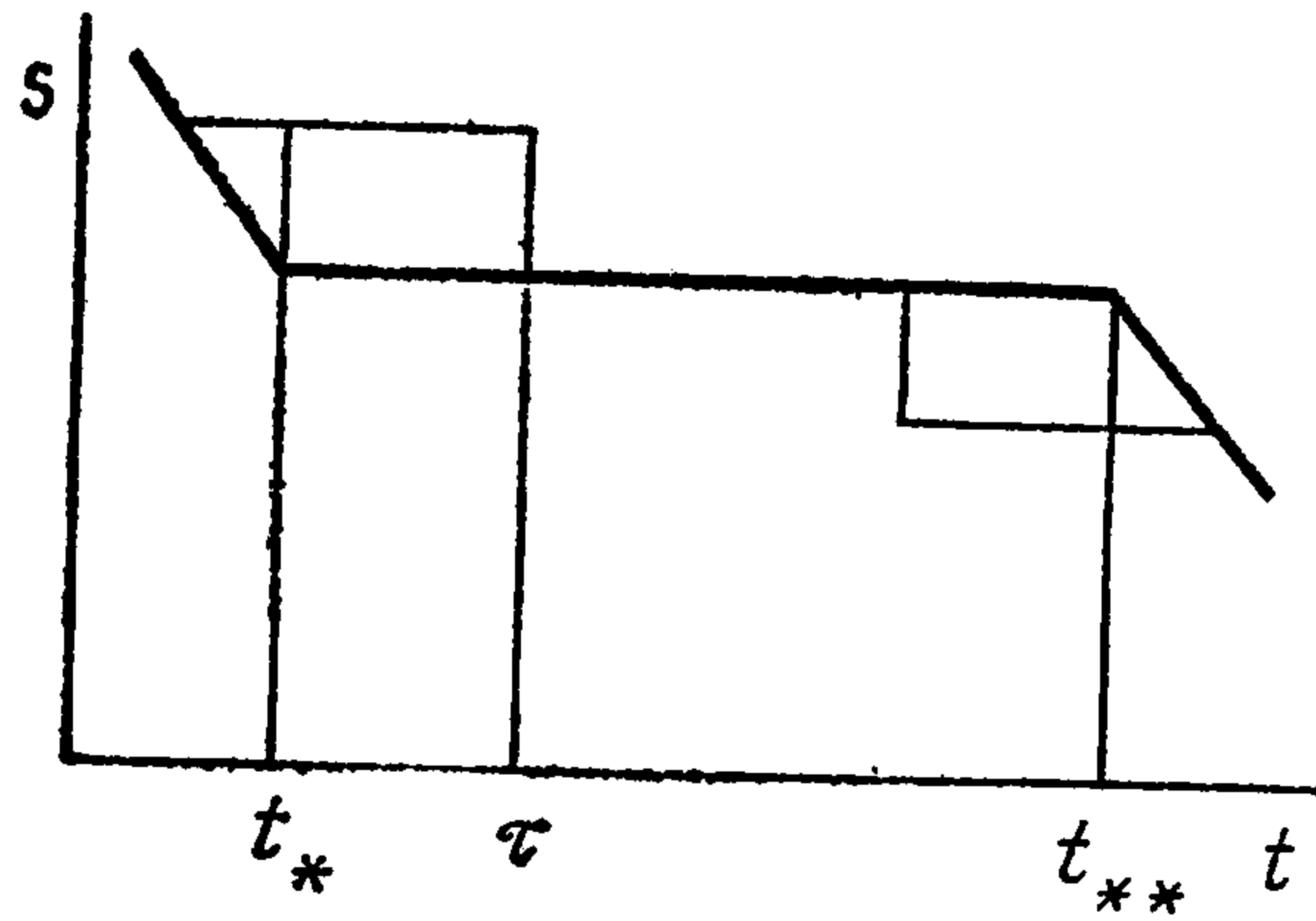
$$\lambda_2(t_*) = \lambda_2(t_{**}), \quad (r\lambda_4)(t_*) = (r\lambda_4)(t_{**}) \quad (3.29)$$

Соотношения (3.29), в частности, означают, что оптимальное направление тяги в начале и в конце рассматриваемого участка одинаково. Допустимо считать, что оно сохраняется на промежутке (t_*, t_{**}) .

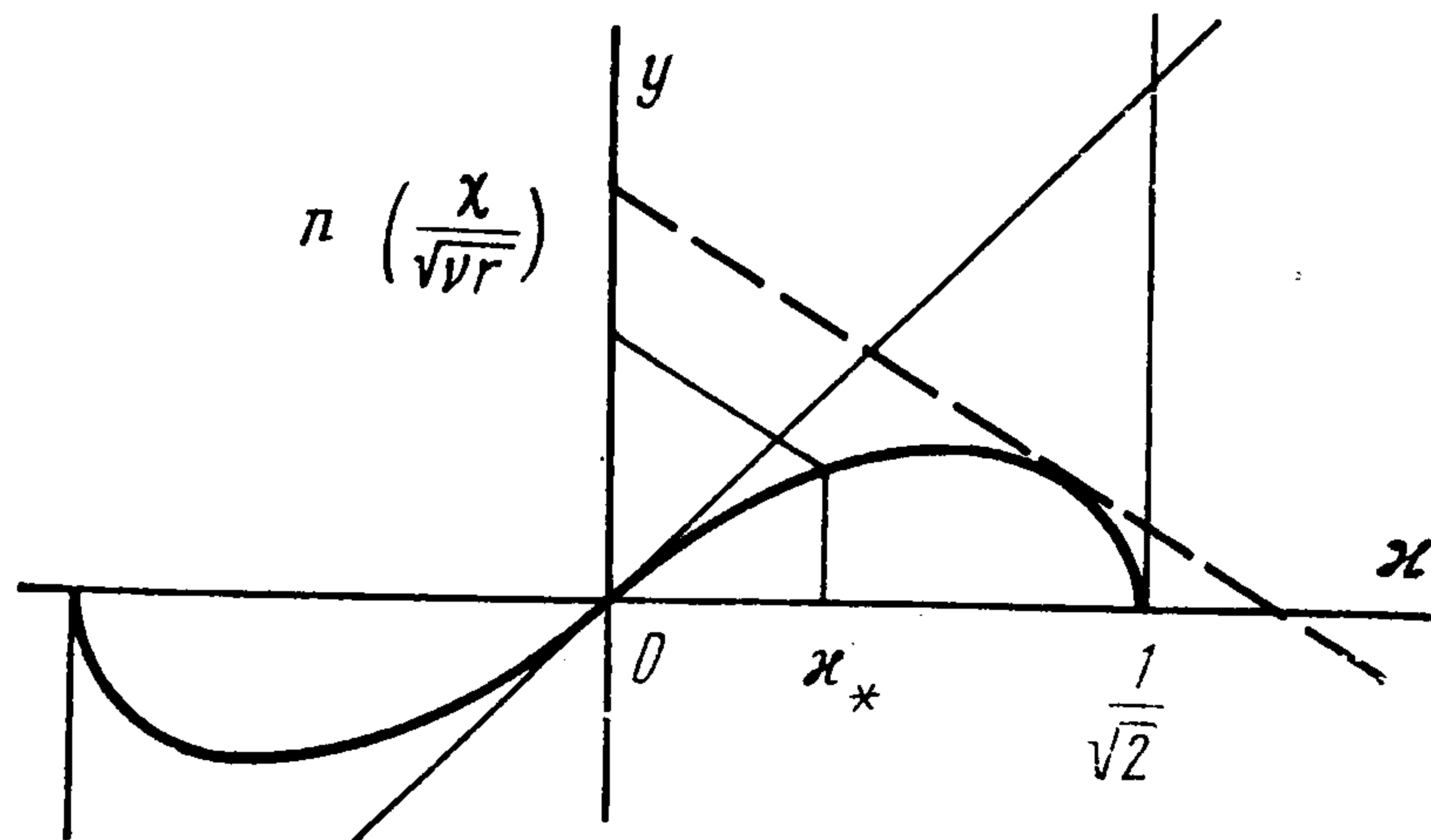
Пусть t_i — момент импульсной тяги. Приращение гамильтониана мож-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

но подсчитать при помощи формулы

$$H(t_i + 0) - H(t_i - 0) = \Delta s(t_i) (\lambda_2'(t_i \pm 0) \cos \theta(t_i) + (\lambda_4 r)'(t_i \pm 0) \sin \theta(t_i))$$

Теперь необходимые условия (3.28) позволяют сделать вывод, что на оптимальной траектории гамильтониан сохраняет постоянное значение и может допускать разрыв только лишь в первый и последний момент процесса управления.

Сопряженная система (3.3) интегрируется в квадратурах (c_i — произвольные постоянные)

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= c_1 r' + c_2 a^{-1} (3tr' - 2r + \omega r^2 f) \\ r\lambda_4 &= \chi (rr')^{-1} \lambda_2 + c_2 \chi^{-1} (rr')^{-1} \omega r^4 f + c_3 r \\ \lambda_1 &= \lambda_4 \omega_4 + (c_2 - \lambda_2 f) (r')^{-1}, \quad \omega = \chi^2 (a\chi^2 + v^2)^{-1} \\ (rr')^2 &= ar^2 + 2vr - \chi^2 \end{aligned}$$

Зона импульсного сброса на особую поверхность. Пусть дан набор (r, r', χ) параметров движения управляемого объекта. Требуется найти направление $\kappa = \text{ctg } \theta$ и дискретный расход массы Δm , для которого набор $(r, r' - \Delta s \cos \theta, \chi - \Delta s r \sin \theta)$ удовлетворяет уравнениям (3.24), (3.25). Из этих соображений получается формула

$$\Delta s = (r \sin \theta_*)^{-1} (\chi - g(\kappa_*) \sqrt{vr})$$

где κ_* — корень уравнения (см. фиг. 5)

$$r' \sqrt{v^{-1}r} - \chi \sqrt{(vr)^{-1}} \kappa = \kappa \sqrt{\frac{1 - 2\kappa^2}{1 + \kappa^2}} = \rho(\kappa)$$

Сброс возможен, если $|r' \sqrt{v^{-1}r}| \leq n (\chi \sqrt{(vr)^{-1}})$, где n выбирается из условия касания прямой $y = n - \kappa \chi \sqrt{(vr)^{-1}}$ (показанной штрихами на фиг. 5) графика $y = \rho(\kappa)$ (жирная линия на фиг. 5).

4. **Случай круговой начальной и конечной орбиты.** Вычислим гамильтониан на особой поверхности. Согласно уравнению (3.17) и первой из формул (3.25) имеем

$$H = \lambda_2 (f - \frac{2}{3}r^{-1} (\dot{r})^2), \quad f = \nu r^{-2} (g^2 - 1) < 0$$

Значит, на особой поверхности гамильтониан не обращается в нуль. Если длительность процесса управления не закреплена, то можно дополнительно к выводу разд. 3 установить непрерывность гамильтониана в моменты 0, t_p . Следовательно, оптимальная программа управления не содержит промежуточной тяги. Она состоит из апсидальных касательных импульсов. Если время межорбитального перехода задано, то предыдущий анализ показывает, что гипотеза [2] об отсутствии промежуточной тяги в задачах с нефиксированной угловой дальностью для рассмотренного случая равносильна непрерывности гамильтониана в момент выхода на заданную орбиту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоуден Д. Оптимальные траектории для космической навигации: Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 152 с.
2. Voubeke de B. M. F., Geerts J. Optimization of multiple impulse orbital transfers by maximum principle // Rept. OA-4, presented at XV Intern. Astronaut. Congr. Warsaw, 1964 = Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1966. № 1. С. 27—49.
3. Шолов Г. Е. Математический анализ (2-й спецкурс). М.: Наука, 1965. 327 с.
4. Завалищин С. Т., Суханов В. И. Прикладные задачи синтеза и проектирования управляющих алгоритмов. М.: Наука, 1985. 144 с.
5. Сесекин А. Н. О нелинейных дифференциальных уравнениях, содержащих произведения разрывных функций на обобщенные // Обобщенные функции и дифференциальные уравнения. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1985. С. 48—61.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
7. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
25.IV.1988