

УДК 531.36:534.1

А. Д. Морозов

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ И ХАОСЕ В УРАВНЕНИЯХ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Доказывается, что уравнение

$$x'' + \sin x = \varepsilon x' \cos nx, \quad n \in N \quad (0.1)$$

где ε — параметр, имеет при достаточно малых ε точно $n - 1$ грубых предельных циклов (ПЦ) в области колебательных движений и не имеет ПЦ в области вращательных движений (т. е. ПЦ, охватывающих фазовый цилиндр). С использованием этого результата рассматривается уравнение вида (0.1) с периодическим по времени членом в правой части. Показывается роль ПЦ в формировании квазиаттракторов (КА). При помощи ЭВМ на примере $n = 3$ описывается процесс возникновения КА с развитым хаосом.

1. Постановка задачи. Основные результаты. Рассмотрим уравнения вида

$$x'' + A(x) = \varepsilon f(x, x', vt; \varepsilon) \quad (1.1)$$

где функция A — периодическая по x с периодом 2π , а f — периодическая по x и $\varphi = vt$ с тем же периодом, ε, v — параметры. Уравнения такого вида описывают движения различных маятников. Из других приложений отметим задачу о структуре резонансных зон в неконсервативных периодических по времени системах

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} + \mu R(u, v, \tau), \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \mu G(u, v, \tau) \quad (1.2)$$

где μ — малый параметр. Как показано в [1, 2], эта задача приводит к исследованию уравнения вида (1.1) с малым параметром ε , зависящим от μ . Кроме того, $f = \sigma(x)x' + O(\varepsilon)$, где $\sigma(x)$ определяется дивергенцией векторного поля системы (1.2).

Положим $A(x) = \sin x$ и рассмотрим прежде всего случай, когда ε — малый параметр. В этом случае уравнение (1.1) исследовалось [3] для частного вида функции f . Более общие исследования проведены в [2]. Было замечено, что принципиальную роль в исследовании уравнения (1.1) играют ПЦ автономного уравнения

$$x'' + \sin x = \varepsilon f_0(x, x'), \quad f_0 = \langle f(x, x', \varphi; 0) \rangle_\varphi \quad (1.3)$$

К уравнению вида (1.3) приводят разнообразные прикладные задачи. К ним относятся, например, задача о колебаниях подвешенных на тросах прямоугольных тел под действием воздушного потока [4], об автоколебаниях синхронного мотора [5], задачи фазовой синхронизации [6].

Исследование уравнения (1.3) сводится к проблеме ПЦ. Однако решить проблему ПЦ для уравнения (1.3) оказалось не легче, чем исследовать исходное уравнение (1.1). До настоящего времени не решена задача о ПЦ (а следовательно, об установившихся режимах и их устойчивости) для уравнения (0.1), которое наряду с уравнением Ван дер Поля можно отнести к основным уравнениям теории нелинейных колебаний. В данной

работе восполняется этот пробел. Дается полное качественное исследование уравнения (0.1). Доказывается следующее

Утверждение. Существует такое достаточно малое $\varepsilon_*(n) > 0$, что при любых $|\varepsilon| \in (0, \varepsilon_*)$ у уравнения (0.1) с $n \geq 1$ в области колебательных движений имеется точно $n - 1$ грубых ПЦ (1-го рода). В области вращательных движений ПЦ (2-го рода) отсутствуют.

Замечания. 1°. Вопрос об устойчивости ПЦ решается достаточно просто. Действительно, устойчивые и неустойчивые грубые ПЦ чередуются. Так как состояние равновесия $x = x' = 0$ является при $0 < \varepsilon < 2$ неустойчивым фокусом, то ближайший охватывающий состояние равновесия ПЦ устойчив, следующий — неустойчив и т. д.

2°. Рассматривалось [4] уравнение вида (0.1) в колебательной области. При его исследовании в качестве невозмущенного решения бралось гармоническое решение, что оправданно лишь при малых x . Таким образом, был получен [4] теоретический результат, не для уравнения (0.1), а для квазилинейного уравнения (при замене в левой части $\sin x$ на x).

3°. Была дана [7] оценка числа ПЦ уравнения (1.3) в случае, когда f_0 — тригонометрический по x и алгебраический по x' многочлен (в связи с этим см. также [1, 8, 9]).

После доказательства утверждения конструируется уравнение

$$x'' + \sin x = \varepsilon x' (\cos nx + a) \quad (1.4)$$

имеющее при $a = (-1)^n / (4n^2 - 1)$ точно n ПЦ. При этом $n - 1$ ПЦ расположены в области колебательных движений и один — на границе колебательной и вращательной областей (седловой ПЦ). Если n нечетно, то седловой ПЦ устойчив при $\varepsilon > 0$. С использованием этого факта рассматривается вопрос о «хаотической динамике» для уравнения

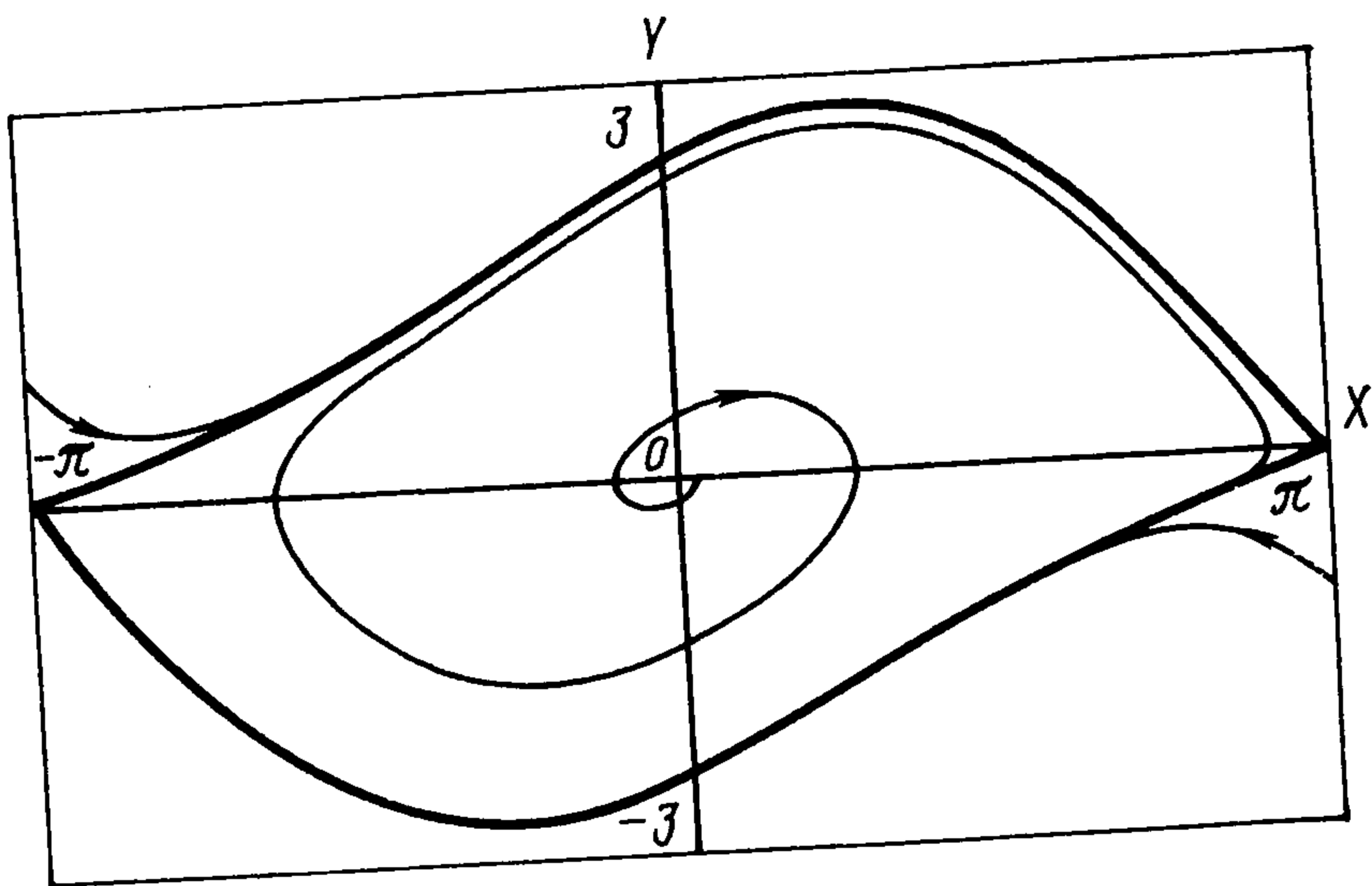
$$x'' + \sin x = \varepsilon x' (\cos nx + a) (1 + c \sin vt) \quad (1.5)$$

где ε, a, c, v — параметры. Цель данного рассмотрения — показать роль ПЦ в формировании нетривиальных притягивающих множеств. Обычно гиперболические притягивающие (нетривиальные) множества называют странными аттракторами. Для рассматриваемого класса уравнений не исключена возможность существования в притягивающем множестве устойчивых точек большого периода. В связи с этим будем использовать появившийся в литературе термин «квазиаттрактор», а иногда более общий термин — «хаос».

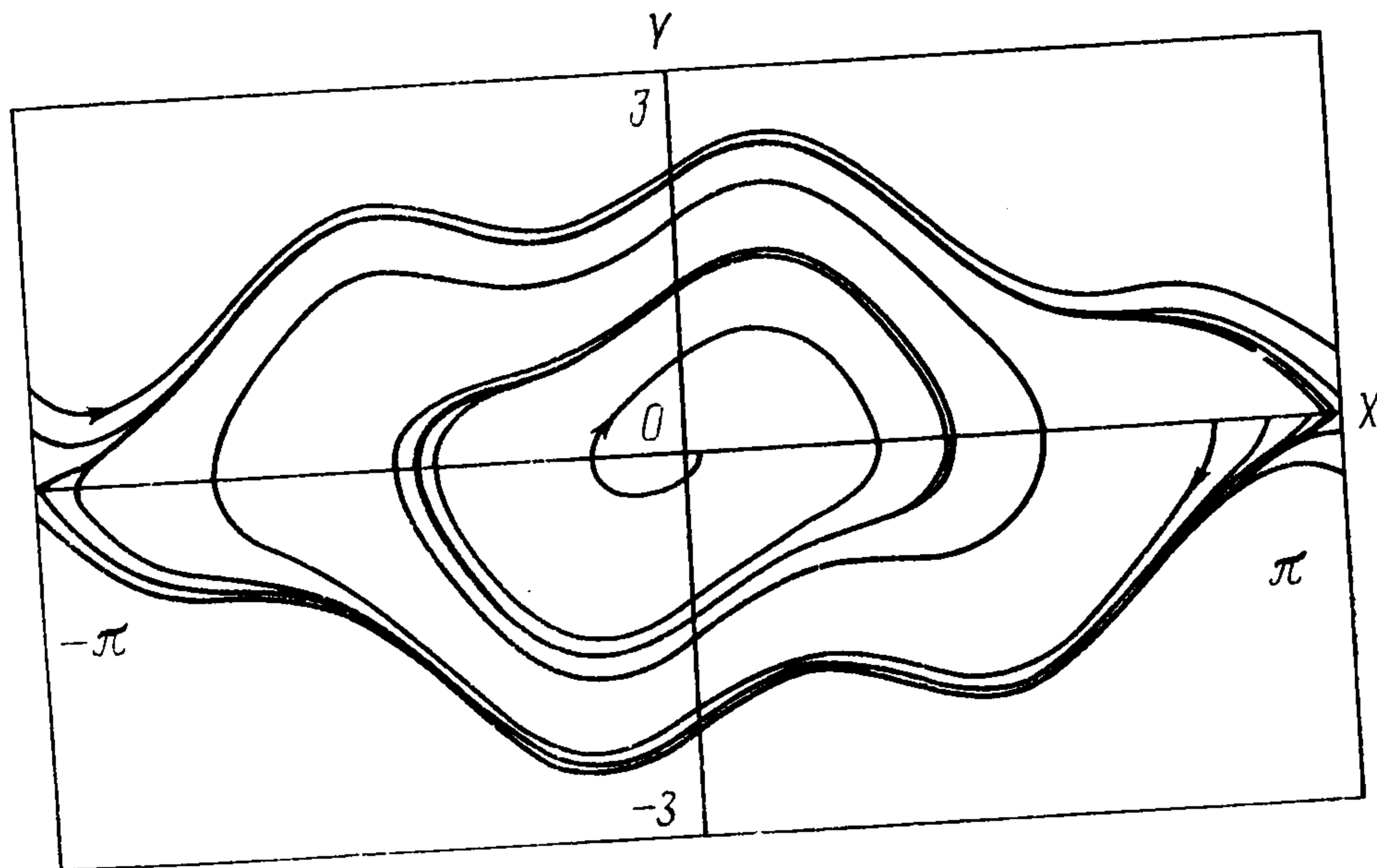
Для решения этой задачи применялась ПЭВМ. Часть результатов приведена на фиг. 1—6. На фиг. 1, 2 показаны траектории уравнения (1.4), а на фиг. 3—5 — отображение Пуанкаре для уравнения (1.5) в области $|x| \leq \pi, |x'| \leq 3$, являющейся частью развертки фазового цилиндра $\{x \bmod 2\pi, x'\}$. Обратим внимание на следующее свойство уравнения (0.1). Численные расчеты на ЭВМ указывают на справедливость приведенного выше утверждения по крайней мере до значений $|\varepsilon| = 1,8$.

При численном интегрировании уравнения (1.5) использовались формулы из семейства формул Рунге — Кутта, допускающие погрешность на шаге $O(H^6)$, H — шаг интегрирования и требующие лишь шесть обращений на шаге к блоку вычисления правой части (в обычно используемых формулах Рунге — Кутта погрешность на шаге $O(H^5)$ и число обращений — 11). Вычисления велись как с обычной (4 байта под вещественное число), так и с двойной точностью. Увеличение n требует увеличения точности вычислений.

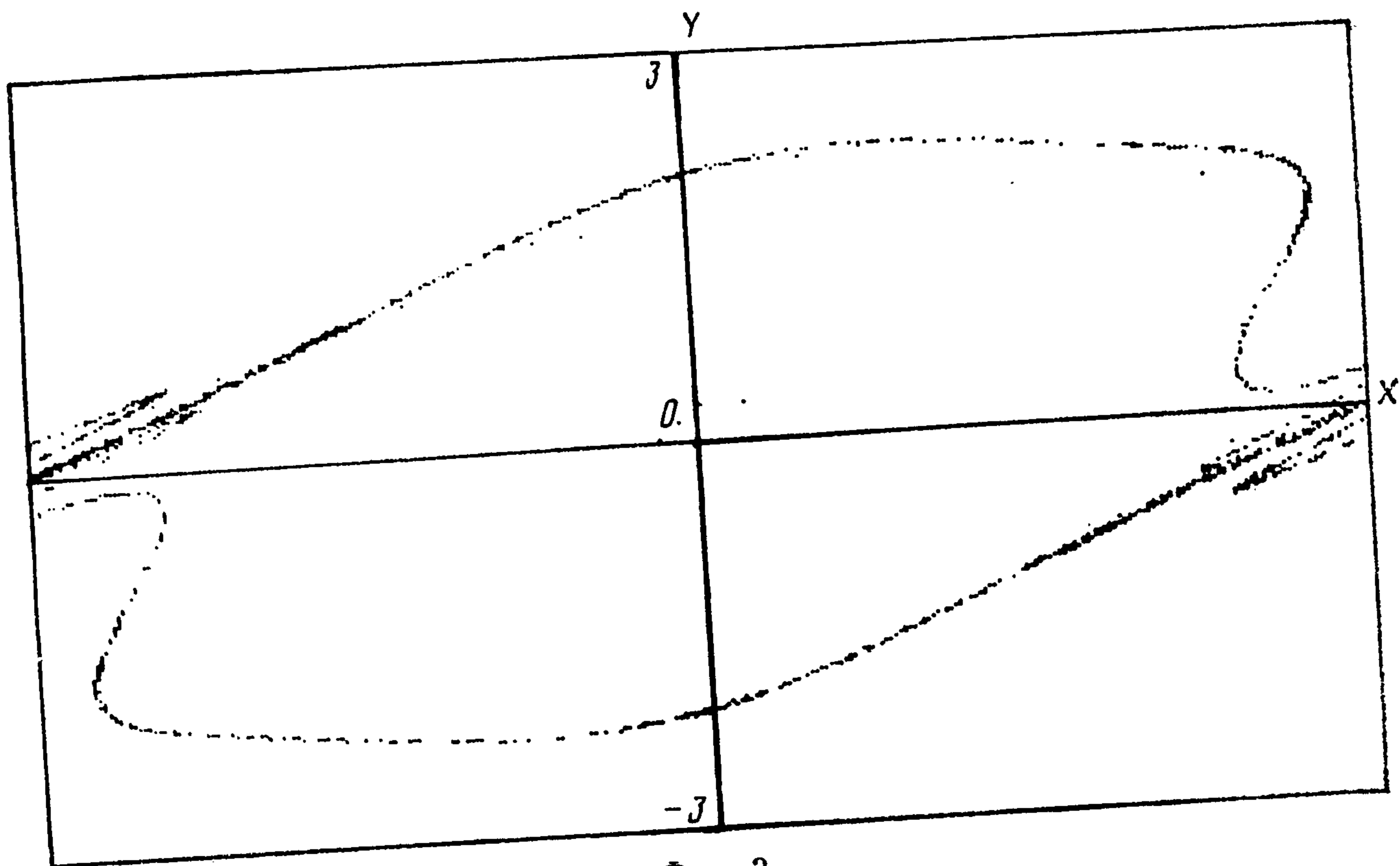
2. Исследование уравнения (0.1). Прежде всего рассмотрим кратко интегрируемый случай, когда $\varepsilon = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2



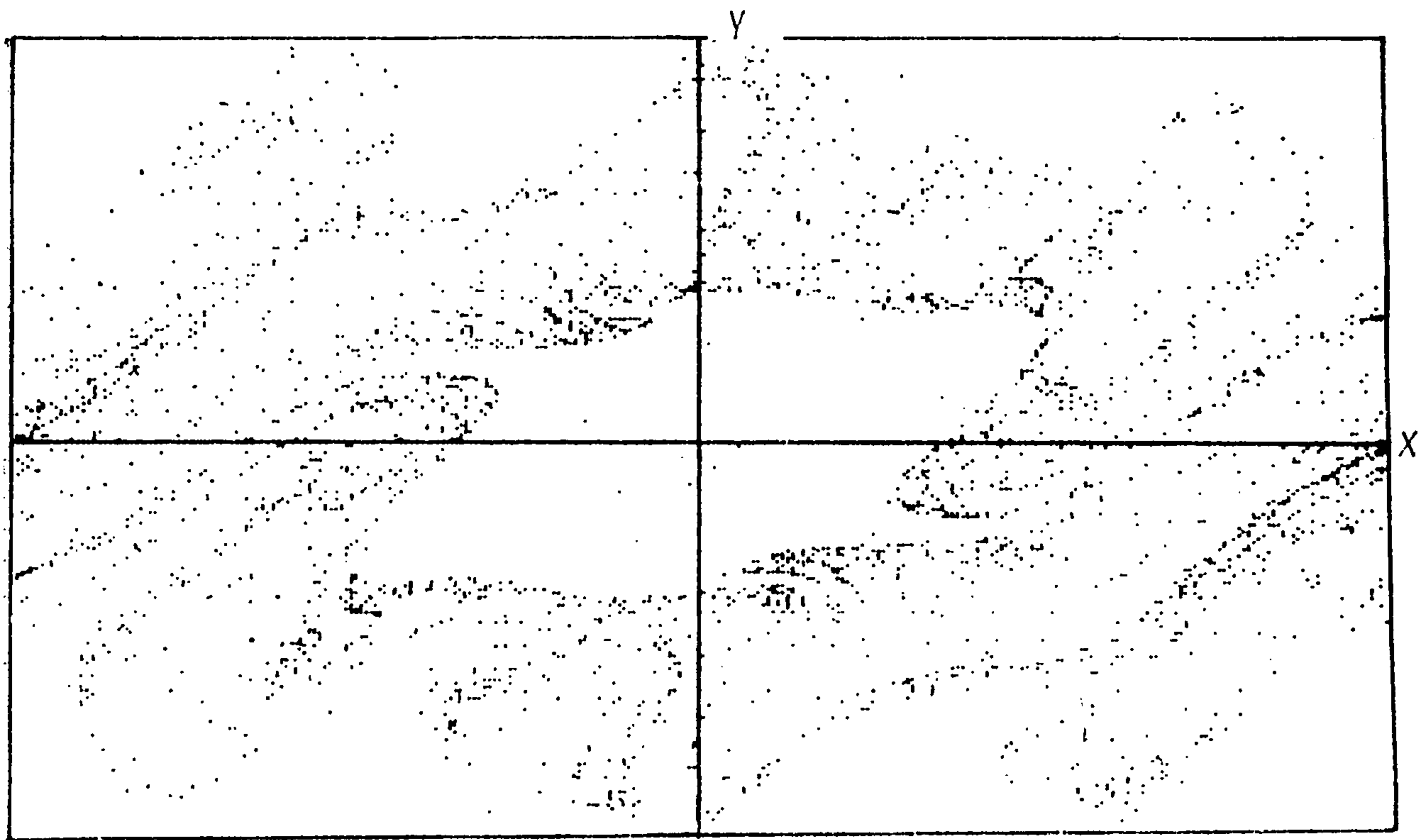
Фиг. 3

Невозмущенное уравнение, соответствующее (0.1), допускает интеграл энергии

$$x^2/2 - \cos x = h$$

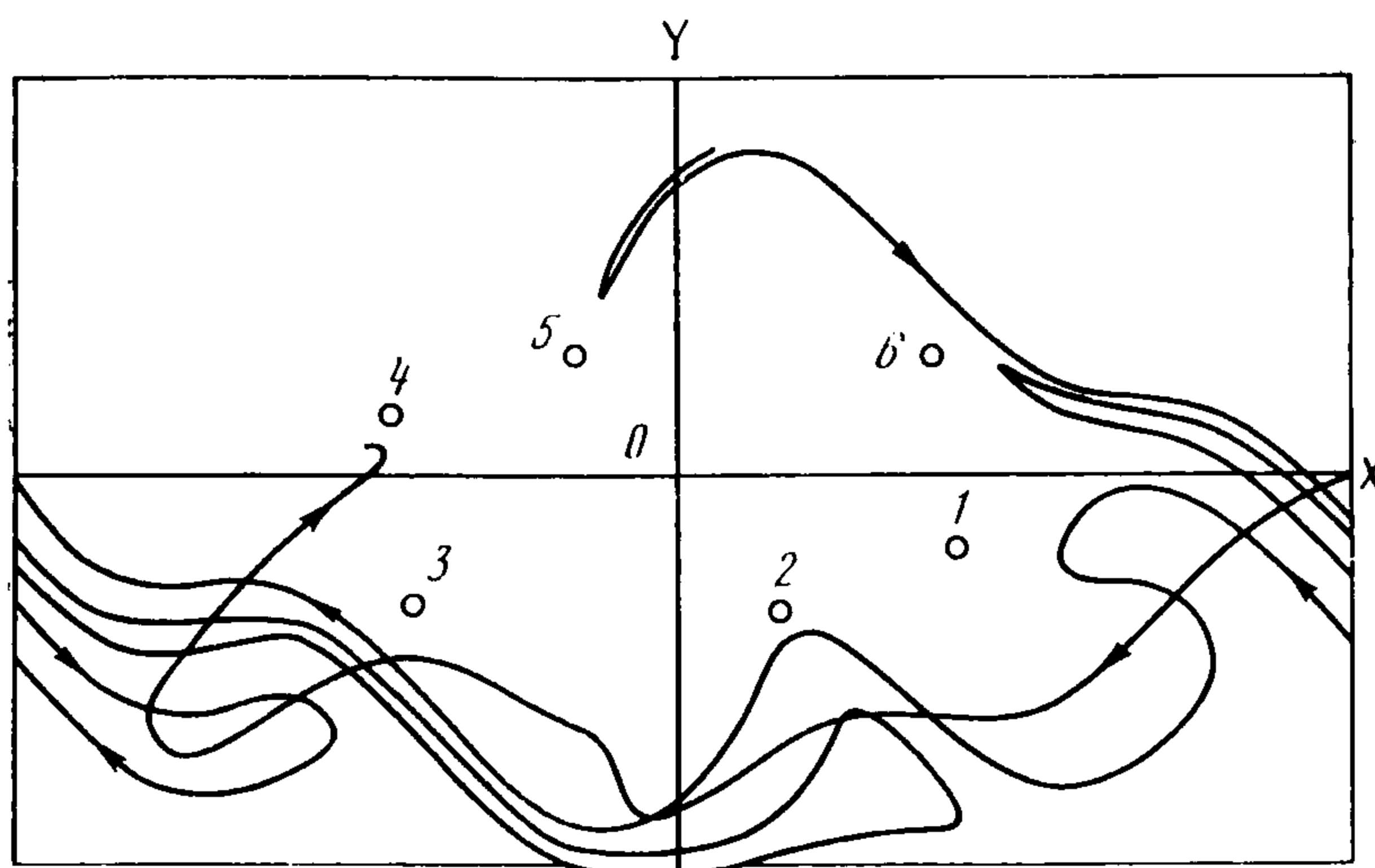
(2)

Область колебательных движений маятника соответствует значению $h \in (-1, 1)$, при этом $h = -1$ отвечает состоянию равновесия типа центра, а $h = 1$ — седлу. Область вращательных движений маятника соответ

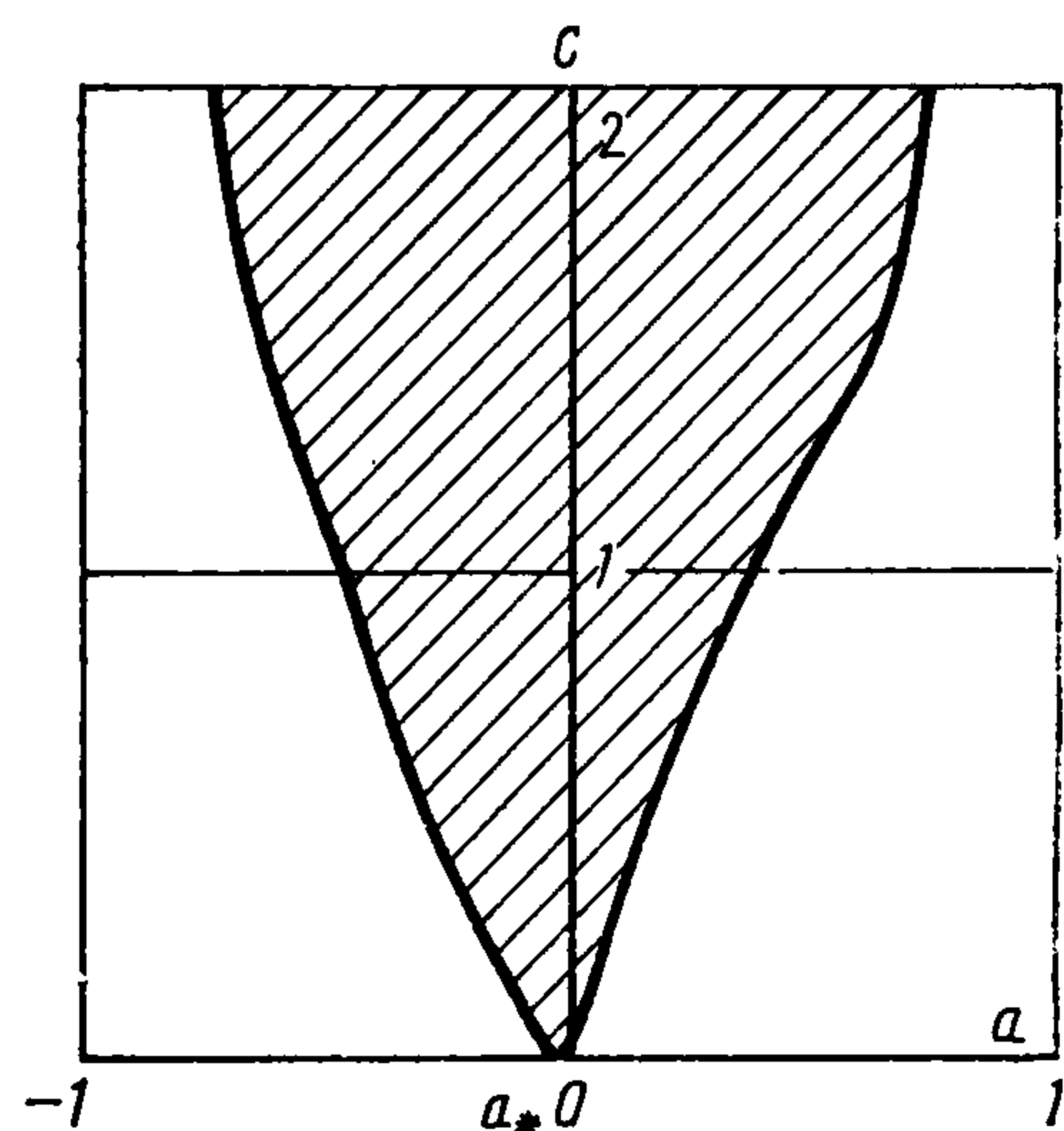


?

Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

вует $h > 1$. Используя (2.1), находим

$$h \in (-1, 1), \quad x(\theta, h) = 2 \arcsin(k \sin(\theta/\omega)) \quad (2.2)$$

$$x' = y(\theta, h) = 2k \operatorname{cn}(\theta/\omega)$$

$$k^2 = (1 + h)/2, \quad \omega = \pi/(2K)$$

$$h > 1, \quad x(\theta, h) = 2 \operatorname{am}(\theta/k\omega) \quad (2.3)$$

$$x' = y(\theta, h) = \pm 2k^{-1} \operatorname{dn}(\theta/k\omega)$$

$$k^2 = 2/(1 + h), \quad \omega = \pi/(kK); \quad \theta = \omega t$$

Здесь использованы эллиптические функции Якоби, K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k , ω — частота движения.

Как известно (например, [10, 11]), основной вопрос исследования уравнения (0.1) — вопрос о ПЦ — приводит к задаче о нулях порождающей функции Пуанкаре — Понтрягина

$$F_n(h) = \int_0^{2\pi} f_0(x, x') x_\theta' d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(nx) x' x_\theta' d\theta \quad (2.4)$$

(величины x , x' , x_θ' определяются формулами (2.2), (2.3)). Эллиптический интеграл в (2.4) приводится к стандартной форме [1, 12]

$$F_n^{(s)}(\rho) = C_n^{(s)} [P_n^{(s)}(\rho) K(\rho) + Q_n^{(s)}(\rho) E(\rho)] \quad (2.5)$$

$$C_n^{(1)} = 16/(2n + 1)!!, \quad C_n^{(2)} = 8\rho^{-n-1/2}/(2n + 1)!!, \quad \rho = k^2 \in (0, 1)$$

где $P_n^{(s)}$, $Q_n^{(s)}$ — полиномы степени n для $n \geq 1$, E — полный эллиптический интеграл второго рода, индекс $s = 1$ соответствует области колебательных движений, а $s = 2$ — вращательных.

Таким образом, исследование уравнения (0.1) приводит к исследованию двух классов специальных функций: $\{F_n^{(s)}(\rho)\}$, $s = 1, 2$. Далее для удобства будем рассматривать $F_n^{(1)}/16$ вместо $F_n^{(1)}$ и $F_n^{(2)}\rho^{1/2}/8$ вместо $F_n^{(2)}$. При этом сохраним прежние обозначения $F_n^{(s)}$.

Свойства функций $F_n^{(1)}(\rho)$ (колебательная область). 1°. Функции $F_n^{(1)}(\rho)$ являются решениями линейного гипергеометрического уравнения Гаусса [1, 13]

$$\rho(1-\rho)(F_n^{(1)})'' + \lambda_n F_n^{(1)}/4 = 0, \quad \lambda_n = 4n^2 - 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Отсюда следует представление

$$F_n^{(1)}(\rho) = C\rho F(1/2 - n, 1/2 + n, 2; \rho) \quad (2.7)$$

где F — гипергеометрическая функция, $C = \text{const}$.

2°. Из (2.5), (2.7) следует

$$F_n^{(1)}(0) = 0, \quad F_n^{(1)}(1) = (-1)^{n+1}/\lambda_n, \quad (F_n^{(1)}(0))' = 4\pi, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1} (F_n^{(1)})' = (-1)^n \infty$$

3°. Из свойства 2° и (2.7) находим $C = 4\pi$. Функция $F(1/2 - n, 1/2 + n, 2; \rho)$ допускает аналитическое продолжение на комплексную плоскость C^* с разрезом вдоль действительной оси от $z = 1$ до $z = \infty$. Тогда

$$F_n^{(1)}(z) = 4\pi z F(1/2 - n, 1/2 + n, 2; z), \quad z \in C^* \quad (2.8)$$

4°. Справедлива рекуррентная формула [7]

$$(3 + 2n) F_{n+1}^{(1)}(z) + 4n(2z - 1) F_n^{(1)}(z) + (2n - 3) F_{n-1}^{(1)}(z) = 0 \quad (2.9)$$

Из (2.4) непосредственно находим

$$F_0^{(1)}(z) = (z - 1) K(z) + E(z), \quad F_1^{(1)}(z) = [(1 - z) K + (2z - 1) E]/3 \quad (2.10)$$

5°. Функции $F_n^{(1)}(z)$, $n \geq 1$, имеют на интервале $(0, 1)$ вещественной оси точно $n - 1$ нулей. Нули $F_n^{(1)}(z)$ и $F_{n+1}^{(1)}(z)$ перемежаются. Функция $F_0^{(1)}(z)$ на $(0, 1)$ нулей не имеет ($F_0^{(1)}(z) > 0$).

Доказательство этого свойства вытекает из свойств 2°, 4° (см. также [7]).

6°. Нули функций $F_n^{(1)}(z)$, расположенные на интервале $(0, 1)$ вещественной оси, простые.

Доказательство. Из (2.9) следует представление

$$F_n^{(1)}(z) = q_{n-2}(z) F_0^{(1)}(z) + p_{n-1}(z) F_1^{(1)}(z), \quad n \geq 2 \quad (2.11)$$

$$p_{j+1} = \frac{4j+4}{2j+5} (1-2z) p_j + \frac{1-2j}{2j+5} p_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2 \quad (2.12)$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 4(1-2z)/5$$

$$q_j = \frac{4j+4}{2j+5} (1-2z) q_{j-1} + \frac{1-2j}{2j+5} q_{j-2}, \quad j = 2, \dots, n-2 \quad (2.13)$$

$$q_0 = 1/5, \quad q_1 = 8(1-2z)/5$$

Используя формулы (2.10), (2.11), находим (при этом полагаем $z = \rho \in (0, 1)$)

$$(F_n^{(1)}(\rho))' = \frac{A_n F_0^{(1)} + B_n F_1^{(1)}}{4\rho(1-\rho)} \quad (2.14)$$

$$A_n = 4\rho(1-\rho) q_{n-2}' + p_{n-1} + (1-2\rho) q_{n-2}$$

$$B_n = 4\rho(1-\rho) p_{n-1}' + 3(1-2\rho) p_{n-1} + 3q_{n-2}$$

Пусть при $\rho = \rho_*$ имеем $(F_n^{(1)}(\rho_*))' = 0$. Тогда из (2.14) получаем

$$F_1^{(1)}(\rho_*) = -(A_n(\rho_*)/B_n(\rho_*)) F_0^{(1)} \rho_* \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.11), находим

$$F_n^{(1)}(\rho_*) = F_0^{(1)}(\rho_*) D_n(\rho_*)/B_n(\rho_*) \quad (2.16)$$

$$D_n = q_{n-2} B_n - p_{n-1} A_n$$

Докажем, что

$$D_n = -3/\lambda_n \quad (2.17)$$

Рассмотрим D_j для $1 < j \leq n$. Используя рекуррентные формулы (2.12), (2.13)) находим $D_2 = -1/5 = -3/\lambda_2$, $D_3 = -3/35 = -3/\lambda_3$. Далее по индукции положим $D_j = -3\lambda_j^{-1}$, $1 < j \leq n$, и докажем, что

$$D_{n+1} = -3\lambda_{n+1}^{-1} \quad (2.18)$$

Используя (2.6), (2.11), можно получить систему дифференциальных уравнений для p_{n-1} , q_{n-2} . С учетом этого дифференцирование D_n дает: $D_n'(\rho) \equiv 0$. Отсюда и из (2.12), (2.13) следует равенство (2.18).

Наконец, из условия $D_n \neq 0$ вытекает $B_n(\rho_*) \neq 0$. Тогда из (2.16) при учете, $F_0^{(1)}(\rho_*) > 0$ получаем, что величина $F_n^{(1)}(\rho_*)$ отлична от нуля и конечна. Тем самым свойство 6° доказано.

7°. Из теоремы о чередовании нулей [14] следует, что нули функции $F_n^{(1)}(\rho)$ и $(F_n^{(1)}(\rho))'$ перемежаются.

Свойства функций $F_n^{(2)}(\rho)$ (вращательная область). 1°. Из определения $F_n^{(2)}(\rho)$ следуют представления

$$F_n^{(2)}(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \cos nx \operatorname{dn}^2 \varphi d\varphi, \quad x = 2 \operatorname{am} \varphi \quad (2.19)$$

$$(F_n^{(2)}(\rho))' = -\frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \cos nx \operatorname{sn}^2 \varphi d\varphi$$

Здесь и далее $\alpha = 0$, $\beta = 2K$.

2°. Функции $F_n^{(2)}(\rho)$ удовлетворяют уравнению

$$\rho(1-\rho)(\rho(F_n^{(2)}))' + (\rho - \mu_n) F_n^{(2)}/4 = 0, \quad \mu_n = 4n^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

Доказательство. Удобнее перейти к исходным функциям $F_n(\rho) = 8F_n^{(2)}(\rho)/\rho^{1/2}$. Тогда используя равенства (2.19), получаем

$$(F_n)' = -\frac{2}{\rho^{3/2}} \int_{\alpha}^{\beta} \cos nx d\varphi$$

$$(F_n)'' = \frac{3}{\rho^{5/2}} \int_{\alpha}^{\beta} \cos nx d\varphi - \frac{2}{\rho^{3/2}} \left[\frac{E - (1-\rho)K}{\rho(1-\rho)} - \int_{\alpha}^{\beta} (\cos nx)'_{\varphi} \varphi'_{\rho} d\varphi \right],$$

$$\varphi'_{\rho} = \frac{1}{2(1-\rho)\rho^{1/2}} \left[\frac{E(\operatorname{am} \varphi, k) - (1-\rho)\varphi}{k} - \frac{k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi}{\operatorname{dn} \varphi} \right], \quad k = \rho^{1/2}$$

После преобразований находим

$$(F_n)'' = \frac{1}{\rho^{5/2}} \left[4 \int_{\alpha}^{\beta} \cos nx d\varphi - \frac{1-4n^2}{1-\rho} \int_{\alpha}^{\beta} \cos nx \operatorname{dn}^2 \varphi d\varphi \right]$$

Используя выражения для F_n , $(F_n)'$, получаем уравнение, которое для функций $F_n^{(2)}$ приводит к уравнению (2.20).

3°. Решение уравнения (2.20), удовлетворяющее условию $F_n^{(2)}(0) = 0$, можно выразить через решение гипергеометрического уравнения

Гаусса [14]

$$F_n^{(2)}(\rho) = C_n \rho^n F(-1/2 + n, 1/2 + n, 1 + 2n; \rho) \quad (2.21)$$

$$C_n = \pi \frac{(-1)^{n+1} (n + 1/2) [(2n - 1)!!]^2}{(\mu_n - 1) 2^n (2n)!}, \quad \mu_n - 1 = \lambda_n$$

(постоянная C_n находится из условия $F_n^{(2)}(1) = F_n^{(1)}(1) = (-1)^{n+1} \lambda_n^{-1}$).

4°. Из (2.21) следует возможность аналитического продолжения $F_n^{(2)}$ на комплексную плоскость C^* :

$$F_n^{(2)}(z) = C_n z^n F(-1/2 + n, 1/2 + n, 1 + 2n; z), \quad z \in C^* \quad (2.22)$$

5°. Из теоремы Ранкела [15] о нулях гипергеометрических функций следует, что $F_n^{(2)}(z)$ не имеет нулей в C^* , отличных от $z = 0$. Отсюда вытекает, что $F_n^{(2)}(\rho)$ не имеет нулей для $\rho \in (0, 1)$.

6°. Используя рекуррентные формулы для смежных гипергеометрических функций, получаем следующую рекуррентную формулу:

$$(2n + 3) z F_{n+1}^{(2)}(z) + 4n(2 - z) F_n^{(2)}(z) + (2n - 3) z F_{n-1}^{(2)}(z) = 0, \quad z \in C^* \quad (2.23)$$

причем, как следует из первой формулы (2.19)

$$F_0^{(2)}(z) = E(z), \quad F_1^{(2)}(z) = [2(z - 1)K + (2 - z)E]/(3z)$$

Из свойства 5° функций $F_n^{(s)}(z)$, $s = 1, 2$, свойства 6° функций $F_n^{(1)}(z)$ и теоремы Л. С. Понтрягина [10, 11] следует утверждение, сформулированное в разд. 1.

Замечание. Функции $F_n^{(s)}(\rho)$, $\rho \in [0, 1]$, являются собственными функциями краевых задач для уравнений (2.6) при $s = 1$ и (2.20) при $s = 2$. Рекуррентные формулы (2.9), (2.23) позволяют эффективно вычислять значения этих функций на ЭВМ.

3. Исследование уравнения (1.4). Для уравнения (1.4) порождающая функция имеет вид

$$\Phi_n^{(s)}(\rho; a) = F_n^{(s)}(\rho) + a F_0^{(s)}(\rho), \quad n \geq 1, \quad \rho \in (0, 1) \quad (3.1)$$

В силу очевидного свойства $F_n^{(1)}(1) = F_n^{(2)}(1)$ можно ввести в рассмотрение глобальную порождающую функцию

$$\Phi_n(h; a) = \begin{cases} \Phi_n^{(1)}(h; a); & h \in (-1, 1] \\ \Phi_n^{(2)}(h; a), & h \geq 1 \end{cases}$$

Этот факт и формулы (2.7), (2.21) оправдывают рассмотрение функций $F_n^{(s)}(\rho)$ как порождающих функций на отрезке $[0, 1]$.

Параметр a в (3.1) выберем из условия $\Phi_n^{(1)}(1; a) = 0$. Тогда $a = a_*(n) = (-1)^n \lambda_n^{-1}$. Простые нули функции $\Phi_n^{(1)}(\rho; a_*)$ отвечают точкам трансверсального пересечения кривых $F_n^{(1)}(\rho)$ и $-a_* F_0^{(1)}(\rho)$. Используя (2.16), (2.17) с учетом неравенства $|B_n(\rho_*)| < 3$ нетрудно получить неравенство $|F_n^{(1)}(\rho_*)| > |-a_* F_0^{(1)}(\rho_*)|$, где ρ_* — точка экстремума функции $F_n^{(1)}(\rho)$. При выполнении этого неравенства в силу свойств 2°, 5°, 7° и теоремы 1 из [7] функция $\Phi_n^{(1)}(\rho; a_*)$ имеет $n - 1$ простых нулей на $(0, 1)$. Кроме того, в силу выбора параметра a она имеет еще один простой нуль $\rho = 1$, который при увеличении $|a|$ от $|a_*|$ смещается в область $\rho < 1$ ($h < 1$). При уменьшении $|a|$ от $|a_*|$ функция $\Phi_n^{(1)}(\rho; a)$ имеет $n - 1$ нулей, а $\Phi_n^{(2)}(\rho, a)$ — один нуль $\rho = \rho_0$, причем $\rho_0 \rightarrow 0$ при $|a| \rightarrow 0$ (ПЦ в области вращательных движений уходит на бесконечность).

Этот теоретический результат, полученный при малых $|\varepsilon|$, иллюстрируется с помощью ЭВМ для $\varepsilon = 1$, $a = a_*$ на фиг. 1 ($n = 1$) и фиг. 2 ($n = 3$).

4. Исследование уравнения (1.5). В отличие от автономного уравнения (1.4) в неавтономном уравнении (1.5) могут существовать резонансные периодические режимы разных периодов, возможно трансверсальное пересечение сепаратрисных многообразий седлового периодического движения и, как следствие, существование гомоклинической структуры (нетривиального гиперболического множества). При определенных условиях может существовать нетривиальное притягивающее множество — квазиаттрактор (КА).

Исследование уравнения вида (1.5) проводилось при малых $|\varepsilon|$ в работе [3] (см. также [2]). Поэтому здесь остановимся лишь на случае не малых $|\varepsilon|$. В этом случае основным инструментом исследования является ЭВМ.

Как известно, исследование неавтономных периодических по времени уравнений вида (1.5) приводит к исследованию отображения Пуанкаре секущей $t = 0$ в себя через период внешней силы. При $c = 0$ инвариантные кривые этого отображения совпадают с соответствующими траекториями уравнения (1.4) и принадлежат цилиндру $\{x \bmod 2\pi, y\}$.

Приведем результаты численного эксперимента, проведенного для уравнения (1.5) при $c \neq 0$ и $\nu = 5$.

При $a = a_*$ (n) у уравнения (1.4) существует седловой ПЦ, а у уравнения (1.5) при некоторых значениях ε , c — КА. На фиг. 3 показан КА, полученный при $n = 1$, $\varepsilon = 1$, $c = 1$, $a = a_* = -1/3$, а на фиг. 4 — при $n = 3$, $\varepsilon = 1$, $c = 1$, $a = a_* = -1/35$. На каждой из фигур выведено по 3000 точек отображения Пуанкаре. Областью притяжения этих КА является весь фазовый цилиндр. Свойство неустойчивости траекторий на КА определялось вычислением ляпуновских характеристических показателей μ^\pm и дробной части ляпуновской размерности $\gamma = |\mu^+/\mu^-|$. Для случая $n = 1$ (фиг. 3) имеем $\gamma \approx 0,11$, а для $n = 3$ (фиг. 4) $\gamma \approx 0,67$. Далее полагается $\varepsilon = 1$.

Идея получения КА путем периодического по времени возмущения системы с седловым устойчивым ПЦ не нова (например, [16, 17]). Новизна заключается в том, что указанный путь не всегда приводит к существованию КА. Для уравнения (1.5) при $n = 3$, $a = a_*$ и уменьшении c от $c_* \approx 0,72$ КА исчезает, хотя при этом у автономного уравнения (1.4) существует устойчивый седловой ПЦ, а у уравнения (1.5) — гомоклиническая структура (фиг. 5). Этот факт объясняется существованием у уравнения (1.4) при $n = 3$, $a = a_*$ двух устойчивых и одного неустойчивого ПЦ. При уменьшении c от c_* притягивающим становится режим, отвечающий внутреннему устойчивому ПЦ (при $c = 0,5$ таким режимом является устойчивый резонансный режим периода 6 ($2\pi/5$), на фиг. 5 — точки 1—6). Подобная ситуация наблюдалась при уменьшении c до значения $c_{**} \approx 0,025$.

Итак, при $c \in (c_{**}, c_*)$ у уравнения (1.5) с $n = 3$, $a = a_*$ имеется единственный аттрактор, соответствующий внутреннему устойчивому ПЦ уравнения (1.4). Структура этого аттрактора зависит от значения c . Наблюдались три случая: 1) резонансный (одночастотный); 2) нерезонансный (двухчастотный — гладкая замкнутая инвариантная кривая у отображения Пуанкаре и соответственно двумерный тор у уравнения (1.5));

3) КА (геометрически размазанный цикл-кольцо, в связи с этим см. [16]).

КА, порожденный седловым ПЦ, будем называть седловым КА.

Отсутствие седлового КА при $c \in (c_{**}, c_*)$ объясняется следующим образом. Для этих значений параметра c неустойчивый ПЦ уравнения (1.4) поглощается окрестностью седлового КА (т. е. окрестностью гомоклинического контура) и эта окрестность становится неустойчивой изнутри.

Далее при уменьшении c от c_{**} ($c > 0$) вновь появляется седловой КА. При $c \in (0, c_{**})$ неустойчивый ПЦ уравнения (1.4) лежит вне окрестности седлового КА.

Отметим, что значения $c = c_*$, $c = c_{**}$ относятся по типу к «кризисным» бифуркационным значениям параметра c .

На фиг. 6 на плоскости параметров (a, c) показана бифуркационная кривая, соответствующая касанию устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой неподвижной точки $(\pi, 0)$ при $n = 3$ и $\varepsilon = 1$. Заштрихована область существования гомоклинической структуры (область трансверсального пересечения сепаратрис).

Ситуация усложняется с увеличением n . Лишь знание информации о ПЦ уравнения (1.4) позволяет понять бифуркации, связанные с появлением и исчезновением КА в уравнении (1.5). И здесь принципиальную роль играет утверждение разд. 1. Так, при нечетном n бифуркации КА проходят по описанному для случая $n = 3$ сценарию. Естественно, с увеличением n увеличится число бифуркаций КА, связанное с увеличением числа ПЦ у уравнения (1.4). В случае четного n отсутствует седловой КА при $a = a_*$.

В заключение отметим роль глобальных бифуркаций, приводящих к появлению седлового КА с развитым хаосом при умеренных значениях амплитуды «внешней силы» (фиг. 4). Бифуркации, лежащие в основе классических сценариев перехода к хаосу для рассматриваемых уравнений (например, сценария Фейгенбаума), имеют локальную природу и требуют значительно больших амплитуд «внешней силы» для получения развитого хаоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. Д. Уравнения маятникового типа и резонансы // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1980, С. 3—16.
2. Морозов А. Д., Шильников Л. П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 385—394.
3. Морозов А. Д., Шильников Л. П. К математической теории синхронизации колебаний // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1340—1343.
4. Leech C. M. Limit Cycle stability of aerodynamically induced yaw oscillations // Intern. J. Mech. Sci. 1979. V. 21. № 9. P. 517—525.
5. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамических систем // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 969—988.
6. Фазовая синхронизация / Под ред. Шахгильдяна В. В., Белюстиной Л. Н. М.: Связь, 1975. 289 с.
7. Морозов А. Д. К решению проблемы предельных циклов для маятниковых уравнений, близких к интегрируемым // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1987. С. 113—127.
8. Варченко А. Н. Оценка числа нулей Абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы // Функциональный анализ и его приложения. 1984. Т. 18. Вып. 2. С. 14—25.
9. Петров Г. С. Чебышевское свойство эллиптических интегралов // Функциональный анализ и его приложения. 1988. Т. 22. Вып. 1. С. 83—84.
10. Морозов А. Д. Системы, близкие к нелинейным интегрируемым. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983. 96 с.
11. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
12. Морозов А. Д., Федоров Е. Л. О приведении порождающего уравнения к стандартной форме // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1982. С. 20—34.
13. Морозов А. Д., Федоров Е. Л. К исследованию уравнений с одной степенью сво-

- боды, близких к нелинейным интегрируемым // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1511—1516.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
 15. Runckel H.-J. On the zeroes of the hypergeometric function // Math. Ann. 1971. В. 191. № 1. P. 53—58.
 16. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О малых периодических возмущениях автономных систем // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214. № 4. С. 739—742.
 17. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.

Горький

Поступила в редакцию
28.III.1988