

УДК 531.36:534.1

В. И. Гуляев, А. Л. Зубрицкая, В. Л. Кошкин

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Переход динамической системы через последовательность бифуркаций удвоения периода от регулярного режима движения к стохастическому при изменении параметра, определяющего интенсивность возмущения, является одним из наиболее типичных способов хаотизации детерминированных систем. Он реализуется в областях фазового пространства, характеризующихся сильной локальной неустойчивостью, и подчиняется открытому Фейгенбаумом закону универсальности [1].

В данной работе на базе совместного применения метода продолжения по параметру [2] и методов теории ветвления [3] строится последовательность бифуркаций удвоения периода вынужденных колебаний консервативного маятника. Установлено, что эта последовательность обладает свойством универсальности.

1. Поставим задачу об эволюции и бифуркациях периодических решений уравнения вынужденных колебаний маятника

$$x'' + k^2 \sin x = \lambda \sin \omega t \quad (1.1)$$

при изменении параметра λ и об исследовании их устойчивости. Пусть при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_{(0)}$ маятник совершает колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$. Соответствующее T -периодическое решение (« T -решение») уравнения (1.1) удовлетворяет условиям

$$x_{(0)}(0) = x_{(0)}(T), \quad x_{(0)}'(0) = x_{(0)}'(T) \quad (1.2)$$

Непрерывная зависимость решений уравнения (1.1) от начальных условий и параметра λ позволяет условия T -периодичности представить в форме

$$\begin{aligned} x_0 &= x(x_0, x_0', \lambda, T) \\ x_0' &= x'(x_0, x_0', \lambda, T) \quad (x_0 = x(0)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Проварьируем обе части равенств (1.3) в окрестности состояния $\lambda = \lambda_{(0)}$, $x_0 = x_{(0)0}$, $x_0' = x_{(0)0}'$

$$\begin{aligned} \delta x_{(0)0} &= \frac{\partial x(T)}{\partial x_0} \delta x_{(0)0} + \frac{\partial x(T)}{\partial x_0'} \delta x_{(0)0}' + \frac{\partial x(T)}{\partial \lambda} \delta \lambda_{(0)} \\ \delta x_{(0)0}' &= \frac{\partial x'(T)}{\partial x_0} \delta x_{(0)0} + \frac{\partial x'(T)}{\partial x_0'} \delta x_{(0)0}' + \frac{\partial x'(T)}{\partial \lambda} \delta \lambda_{(0)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$(x_{(0)0} = x_{(0)}(0))$$

Введя обозначения $\partial x(t)/\partial x_0 = y_1(t)$, $\partial x(t)/\partial x_0' = y_2(t)$, $\partial x(t)/\partial \lambda = y_\lambda(t)$, определим $y_1(T)$, $y_2(T)$, $y_\lambda(T)$ из решений соответствующих уравнений в вариациях Ю

$$y_1'' + k^2 y_1 \cos x = 0, \quad y_{10} = 1, \quad y_{10}' = 0 \quad (1.5)$$

$$y_2'' + k^2 y_2 \cos x = 0, \quad y_{20} = 0, \quad y_{20}' = 1$$

$$y_\lambda'' + k^2 y_\lambda \cos x = \sin \omega t, \quad y_{\lambda 0} = 0, \quad y_{\lambda 0}' = 0. \quad (1.6)$$

Задавшись величиной $\delta \lambda_{(0)}$, определим из (1.4) соответствующие вариации начальных условий $\delta x_{(0)0}$, $\delta x_{(0)0}'$ как решение системы линейных

уравнений

$$\begin{aligned} [y_1(T) - 1] \delta x_{(0)0} + y_2(T) \delta x_{(0)0}^{\cdot} &= -y_{\lambda}(T) \delta \lambda_{(0)} \\ y_1^{\cdot}(T) \delta x_{(0)0} + [y_2^{\cdot}(T) - 1] \delta x_{(0)0}^{\cdot} &= -y_{\lambda}^{\cdot}(T) \delta \lambda_{(0)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями $x_{(1)0} = x_{(0)0} + \delta x_{(0)0}$, $x_{(1)0}^{\cdot} = x_{(0)0}^{\cdot} + \delta x_{(0)0}^{\cdot}$ при $\lambda_{(1)} = \lambda_{(0)} + \delta \lambda_{(0)}$ будет удовлетворять условиям периодичности (1.3) с некоторой погрешностью (невязкой) $r_{(0)}$

$$x_{(1)0} = x_{(1)}(T) + r_{(0)}^1, \quad x_{(1)0}^{\cdot} = x_{(1)}^{\cdot}(T) + r_{(0)}^2$$

имеющей порядок отброшенных в (1.4) членов разложения в ряд Тейлора. Уточнение начальных условий может быть произведено с использованием метода Ньютона — Канторовича, тогда (k — число итераций)

$$\begin{aligned} x_{(1)0} &= x_{(0)0} + \delta x_{(0)0} + \sum_{j=0}^{k-1} \delta x_{r(j)0} \\ x_{(1)0}^{\cdot} &= x_{(0)0}^{\cdot} + \delta x_{(0)0}^{\cdot} + \sum_{j=0}^{k-1} \delta x_{r(j)0}^{\cdot} \\ \begin{vmatrix} \delta x_{r(j)0} \\ \delta x_{r(j)0}^{\cdot} \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} y_1(T) - 1 & y_2(T) \\ y_1^{\cdot}(T) & y_2^{\cdot}(T) - 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} r_{(j)}^1 \\ r_{(j)}^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Используя далее $x_{(1)0}$, $x_{(1)0}^{\cdot}$ в качестве порождающего решения при $\lambda = \lambda_{(1)}$, последующей вариацией параметра λ можно найти T -решения при $\lambda = \lambda_{(2)} = \lambda_{(1)} + \delta \lambda_{(1)}$ и т. д.

Устойчивость полученных периодических решений, а также условия их существования и единственности в рассматриваемой окрестности могут быть исследованы на основе теории Флоке путем анализа мультипликаторов ρ_i матрицы монодромии [4]

$$Y(T) = \begin{vmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1^{\cdot}(T) & y_2^{\cdot}(T) \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Бифуркации удвоения периода в консервативной системе второго порядка имеют место в состояниях, для которых оба мультипликатора матрицы (1.8) равны $\rho_{1,2} = -1$. При достижении этого состояния дальнейшие построения будем производить на периоде $2T$. Так как в этом состоянии

$$\det \| Y(2T) - E \| = 0$$

то в представлении (1.4) следует использовать зависимости с удержанием членов более высоких порядков ($y_1, y_2, \dots, y_{2\lambda}$ определены для значения $t = 2T$)

$$\begin{aligned} \delta x_0 &= y_1 \delta x_0 + y_2 \delta x_0^{\cdot} + y_{\lambda} \delta \lambda + \\ &+ \frac{1}{2} y_{11} (\delta x_0)^2 + \frac{1}{2} y_{22} (\delta x_0^{\cdot})^2 + \frac{1}{2} y_{\lambda\lambda} (\delta \lambda)^2 + \\ &+ y_{12} \delta x_0 \delta x_0^{\cdot} + y_{1\lambda} \delta x_0 \delta \lambda + y_{2\lambda} \delta x_0^{\cdot} \delta \lambda + \dots \\ \delta x_0^{\cdot} &= y_1^{\cdot} \delta x_0 + y_2^{\cdot} \delta x_0^{\cdot} + y_{\lambda}^{\cdot} \delta \lambda + \\ &+ \frac{1}{2} y_{11}^{\cdot} (\delta x_0)^2 + \frac{1}{2} y_{22}^{\cdot} (\delta x_0^{\cdot})^2 + \frac{1}{2} y_{\lambda\lambda}^{\cdot} (\delta \lambda)^2 + \\ &+ y_{12}^{\cdot} \delta x_0 \delta x_0^{\cdot} + y_{1\lambda}^{\cdot} \delta x_0 \delta \lambda + y_{2\lambda}^{\cdot} \delta x_0^{\cdot} \delta \lambda + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Коэффициенты перед членами высших порядков в уравнениях (1.9) являются производными от функций y_1, y_2, y_{λ} по x_0, x_0^{\cdot} и λ при $t = 2T$. Индексу 1 соответствует дифференцирование по x_0 , индексу 2 — по x_0^{\cdot} , индексу λ — по λ . Для определения этих коэффициентов продифференцируем почленно уравнения в вариациях (1.5), (1.6) по начальным условиям

и параметру, что приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} y_{\xi\xi\xi} + k^2 y_{\xi\xi} \cos x &= k^2 y_{\xi}^2 \sin x, & y_{\xi\xi 0} &= 0, & y_{\xi\xi 0} &= 0 \\ y_{\eta\xi} + k^2 y_{\eta\xi} \cos x &= k^2 y_{\eta} y_{\xi} \sin x, & y_{\eta\xi 0} &= 0, & y_{\eta\xi 0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(\xi = 1, 2, \lambda; \eta = 1, 2; \zeta = 2, \lambda; \eta \neq \zeta)$$

Решение системы уравнений ветвления (1.8) [3] при вычисленных из (1.5), (1.6), (1.10) значениях коэффициентов $y_1(2T)$, $y_2(2T)$, $y_{2\lambda}(2T)$ и заданном $\delta\lambda$ осуществляется путем отделения корней с последующим уточнением методом Ньютона — Канторовича. После этого методом продолжения по параметру можно продолжить решение по каждой из ветвей. В случае, если система (1.9) не имеет решения или среди корней имеются кратные, в уравнениях ветвления следует учесть последние члены разложения и вычисления повторить.

Продолжая $2T$ -решение уравнения (1.1) по параметру λ , найдем бифуркационное значение λ , соответствующее следующему удвоению периода вынужденных колебаний маятника и т. д.

Описанный метод построения последовательности бифуркаций удвоения периода колебаний рассматриваемой механической системы и анализ устойчивости найденных таким образом $2^n T$ -решений уравнения (1.1) ориентированы на применение быстродействующих ЭВМ и высокоточных вычислительных процедур.

Остановимся на основных особенностях его численной реализации. Для построения «дерева» ветвлений периодических решений уравнения (1.1) при изменении параметра λ разработана программа на языке Фортран. Все вычисления выполнялись с удвоенной точностью. Уравнения (1.1), (1.5), (1.6) и в точках ветвления (1.9) интегрировались совместно методом Эверхарта 11-го порядка [5] с высокой точностью ($\sim 12-13$ верных знаков в конце периода). Шаг продолжения $\delta\lambda_{(m)}$ выбирался таким образом, чтобы после 2—3 итераций метода Ньютона—Канторовича выполнялись условия

$$|r_{(k)}^{(1)}| \leq \mu \max_t |x_{(k)}(t)|, \quad |r_{(k)}^{(2)}| \leq \mu \max_t |\dot{x}_{(k)}(t)| \quad (\mu \approx 10^{-10})$$

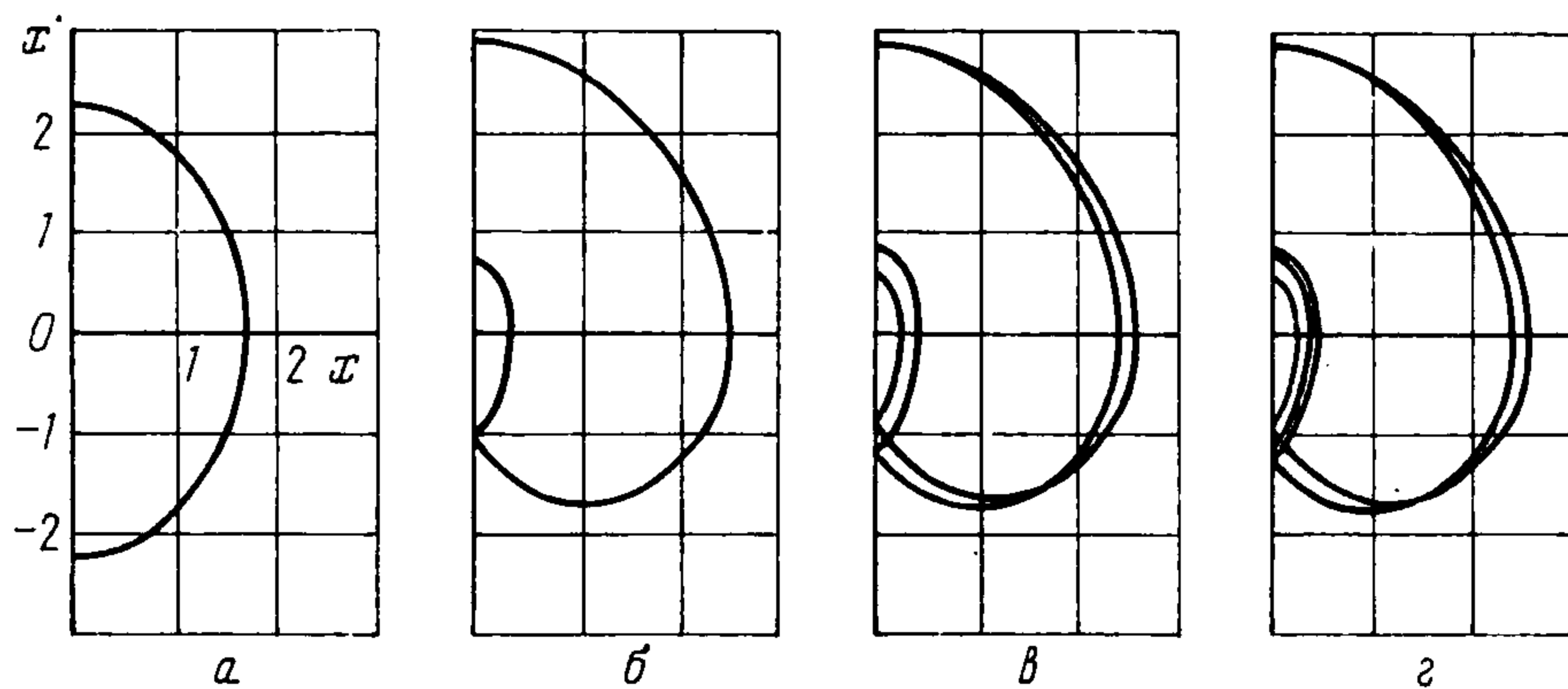
В окрестности бифуркационных значений параметра λ решение уточнялось методом половинного деления.

2. Построение последовательности бифуркаций удвоения периода вынужденных колебаний маятника проведено при $k^2 = 1$, $\omega = 1,3$. В качестве порождающего T -решения ($T = 2\pi/\omega$) принято состояние устойчивого равновесия $\lambda_{(0)} = 0$, $x_{(0)0} = 0$, $\dot{x}_{(0)0} = 0$.

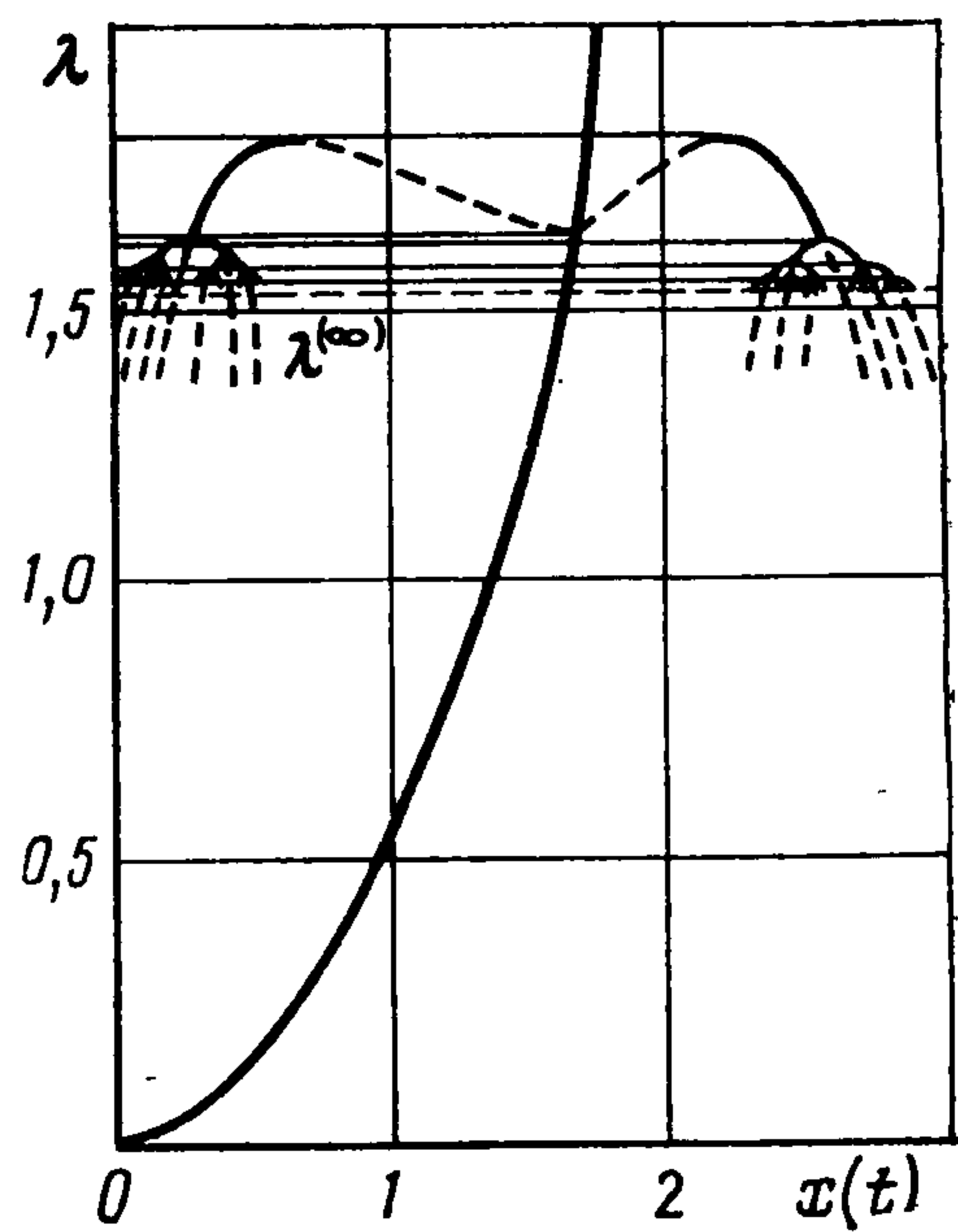
Увеличение интенсивности внешнего возмущения $\lambda > \lambda_{(0)}$ приводит к росту амплитуды и уменьшению частоты свободных нелинейных колебаний $k^* < k$, так как амплитудно-частотная характеристика маятника является мягкой. Поэтому при принятом значении частоты внешнего возмущения $\omega > k$ система с ростом λ удаляется от нелинейного резонанса.

Проследим теперь за устойчивостью T -периодических колебаний при увеличении параметра λ . На ветви T -периодических колебаний, соответствующей значениям $\lambda_{(0)} \leq \lambda < 1,725$. . . , комплексно-сопряженные мультипликаторы располагаются на единичной окружности. Поэтому такие колебания устойчивы. Они имеют фазовый портрет, подобный показанному на фиг. 1, а.

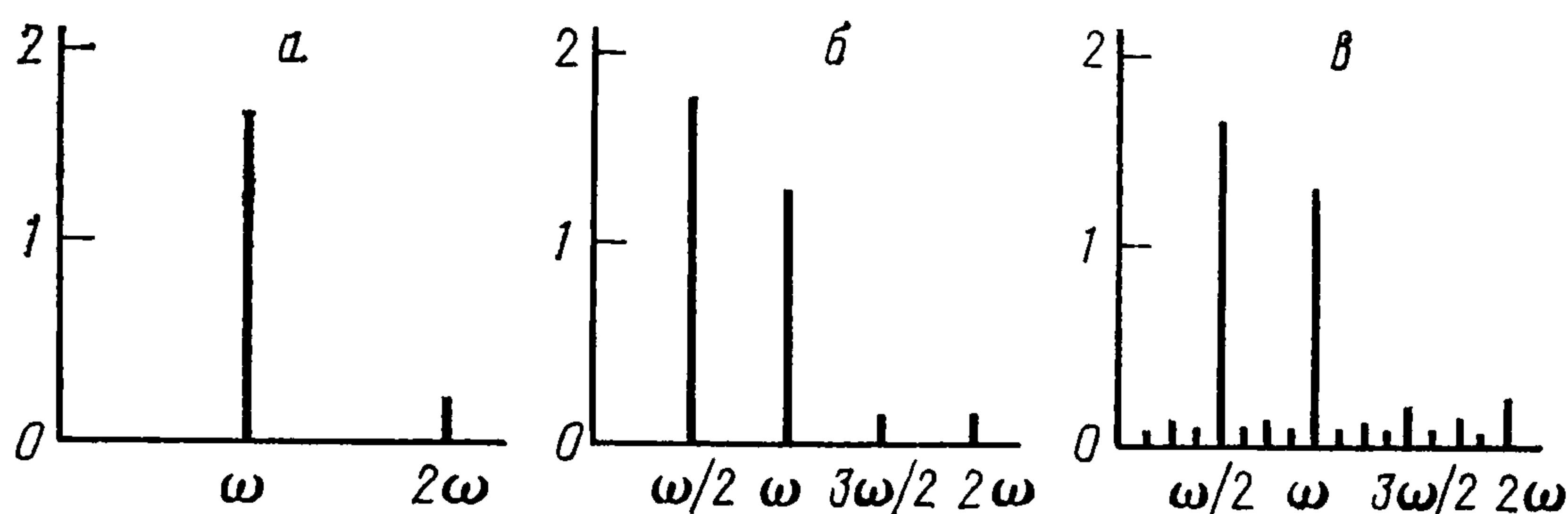
При $\lambda = \lambda^{(1)}$ (таблица) мультипликаторы приняли значение $\rho_1 = \rho_2 = -1$, что свидетельствует о сопровождении бифуркации решения удвоением периода. Ответвляющаяся из этого состояния ветвь $2T$ -решений ока-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

залась неустойчивой, так как один из мультипликаторов, вычисленных на периоде $2T$, вышел за пределы единичной окружности.

Проследим тем не менее за дальнейшей эволюцией системы при изменении амплитуды внешнего воздействия. Ветвь $2T$ -решений остается неустойчивой до достижения параметром λ значения $\lambda^{(1')}$. При $\lambda = \lambda^{(1')}$ на рассматриваемой ветви имеется предельная точка, в которой $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Продолжение ветви $2T$ -решений за предельную точку сопровождается

i	$\lambda^{(i)}$	$\delta^{(i)}$	$x_0^{(i)}$	$-x_0^{(i)}$
1	1,725	—	0	2,26561727272
1'	1,77095912802	7,12337865	1,31201	1,86039918519
2	1,72462398665	8,21381505	1,73337025268	1,53906612857
3	1,718119328404	8,70705458	1,82946173268	1,48415882553
4	1,7173274115897	8,71389854	1,83418944574	1,48435587447
5	1,71723646041822	8,72092405	1,83339655541	1,48493217056
6	1,71722602293480	8,72109726	1,83354848610	1,48490249131
7	1,71722482610252		1,83359211395	1,48488615372
8	1,71722468886838		1,83359422288	1,48488506144

уменьшением параметра λ до значения $\lambda^{(2)}$, причем на интервале $\lambda^{(1')} > \lambda > \lambda^{(2)}$ соответствующие $2T$ -периодические колебания маятника устойчивы. При $\lambda = \lambda^{(2)}$ устойчивое $2T$ -решение, фазовый портрет которого показан на фиг. 1, б, претерпевает бифуркацию удвоения периода и порождает устойчивое $4T$ -решение. Построенная ветвь $4T$ -решений устойчива на интервале $\lambda^{(2)} > \lambda > \lambda^{(3)}$. Значение параметра $\lambda^{(3)}$ соответствует следующей бифуркации удвоения периода колебаний и появлению устойчивого $8T$ -решения и т. д.

Для рассматриваемого консервативного маятника найдено восемь первых бифуркаций удвоения периода. Бифуркационные значения параметра $\lambda^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) приведены в таблице. Там же приведены начальные условия $2^{(i-1)}T$ -решений в точках бифуркации. Отметим, что на всех интервалах изменения параметра $\lambda^{(i-1)} > \lambda > \lambda^{(i)}$ (за исключением $i = 2$) соответствующие $2^{(i-1)}T$ -периодические колебания маятника устойчивы.

Фазовые траектории от T - до $8T$ -решений в правой полуплоскости, соответствующие бифуркационным значениям параметра $\lambda^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), представлены на фиг. 1, *a — г*. На фиг. 2 показано дерево ветвлений в правой полуплоскости уравнения (1.1), полученное при рассечении пространства $x(t), x'(t), \lambda$ плоскостью $x'(t) = 0$. Фазовые портреты и дерево ветвлений симметричны относительно оси $0x'$. Ветви, соответствующие устойчивым $2^{(i-1)}T$ -решениям, показаны сплошными линиями, неустойчивым — пунктирными линиями. Как видно по фазовым портретам найденных $2^{(i-1)}T$ -решений, каждая последующая бифуркация удвоения периода колебаний приводит к расщеплению фазовой траектории системы и меньшей упорядоченности движения. Однако с увеличением i расстояния между смежными участками фазовых траекторий быстро убывают и уже при $i > 5$ становятся трудно различимыми. В связи с этим отметим, что фазовая траектория $128T$ -решения пересекает ось x в 256 точках.

Анализ бифуркационных значений параметра $\lambda^{(i)}$ показывает, что их последовательность сходится к некоторой точке накопления [6] $\lambda^{(\infty)}$ по закону, близкому к геометрической прогрессии с показателем

$$\delta^{(i)} = (\lambda^{(i)} - \lambda^{(i+1)}) / (\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i+2)})$$

а сам показатель $\delta^{(i)}$ при увеличении i стремится к универсальной консервативной постоянной Фейгенбаума [7] $\delta = 8,7210972\dots$, полученной для двумерных гамильтоновых отображений. Характерно, что уже при $i = 6$ $\delta^{(i)}$ совпадает с δ до восьмой значащей цифры (таблица).

Высокая скорость сходимости δ бифуркационных значений параметра λ к точке накопления $\lambda^{(\infty)}$ приводит к быстрому уменьшению упорядоченности движения и усложнению фазовых траекторий при незначительном изменении интенсивности внешнего возмущения. Как следует из фиг. 2, этот процесс носит лавинообразный характер.

Воспользовавшись постоянной δ [7], определим приближенное значение параметра $\lambda^{(\infty)}$, при котором колебания маятника будут носить хаотический характер. Так, при $i = 7$

$$\lambda^{(\infty)} \approx \lambda^{(i)} - (\lambda^{(i)} - \lambda^{(i+1)}) \delta / (\delta - 1) = 1,71722467109446\dots$$

Проведем теперь гармонический анализ полученных периодических решений. На фиг. 3, *a—в* показаны спектры Фурье $2^{(i-1)}T$ -решений уравнения (1.1) соответственно для $i = 1, 2, 4$. Характерная особенность спектров заключается в появлении субгармоник с частотой $\omega/2^i$ и кратных им нечетных гармоник при каждой i -й бифуркации удвоения периода. С увеличением λ амплитуда каждой гармоники увеличивается до некоторого уровня насыщения, причем этот уровень уменьшается с увеличением i . При $i \rightarrow \infty$ спектр стремится к непрерывному, что свидетельствует о хаотическом характере колебаний.

Таким образом, выполненное исследование подтвердило возможность перехода к хаотическому движению колебаний маятника через универсальную по Фейгенбауму последовательность бифуркаций удвоения периода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feigenbaum M. J.* Universal behavior in nonlinear systems // Los Alamos Sci. 1980. V. 1. P. 4—27. = Успехи физ. наук, 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 343—347.
2. *Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А. и др.* Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львов: Виша гк., 1983. 287 с.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Everhart E.* An Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 35—55.
6. *Лухтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
7. *Helleman R. H. G.* Feigenbaum sequences in conservative and dissipative systems // Chaos and Order in Nature: intern. Symp. of Synergetics. Bavaria. 1981. Berlin: Springer, 1981. P. 232—248.

Киев

Поступила в редакцию
12.VII.1989