Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 5, 1989

УДК 531.36

В. И. Каленова, В. М. Морозов, М. А. Салмина

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

При исследовании задачи о стабилизации установившихся движений системы, в которой управляющие силы действуют только по циклическим координатам [1, 2], применяется подход, основанный на линейной теории управления. В отличие от способа решения этой задачи [3, 4], требующего, чтобы приведенная система обладала асимптотически устойчивым инвариантным многообразием, максимально используются возможности управления, имеющиеся в системе. Формулируется ряд новых эффективных критериев управляемости и наблюдаемости, в которых учитывается структура действующих на систему сил.

Некоторые вопросы стабилизации установившихся движений рассматривались в [5, 6], где задавалась структура управляющих воздействий и исследовалась устойчивость замкнутой системы, а также в [7, 8], где, в частности, анализировались условия управляемости.

1. Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными связями, среди обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ которой имеются координаты q_j $(j = r+1, \ldots, n,\ r < n)$, не входящие явным образом в выражение для кинетической энергии T системы. Пусть силы, действующие на систему, также не зависят от этих координат, которые принято называть псевдоциклическими. Остальные координаты q_i $(i = 1, \ldots, r)$ — позиционные. Обозначим q, $q^{\boldsymbol\cdot}$, ω матрицы-столбцы, составленные из позиционных координат, позиционных и псевдоциклических скоростей.

В общем случае система гироскопически связана и ее кинетическая энергия имеет вид

$$T = {}^1/_2 q^{\boldsymbol\cdot T} A\,(q)\,q^{\boldsymbol\cdot} + q^{\boldsymbol\cdot T}\,C\,(q)\,\omega + {}^1/_2\omega^T B\,(q)\,\omega$$

Здесь A, B — положительно-определенные симметричные матрицы, C — прямоугольная матрица. Их коэффициенты зависят только от позиционных координат.

Обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам, заданы и представляют сумму потенциальных и диссипативных сил:

$$Q_i = \partial U/\partial q_i + Q_{id} \quad (i = 1, \ldots, r)$$

Обобщенные силы $F_j = F_j\,(q, q^{\boldsymbol\cdot}, \omega)$ $(j = r+1, \ldots, n)$, отвечающие псевдоциклическим координатам, будем считать управляющими и подлежащими выбору.

Информация о значениях q, $q^{\boldsymbol\cdot}$, ω доставляется посредством измерения $\Sigma = \Sigma\,(q, q^{\boldsymbol\cdot}, \omega)$ размерности $l \times 1$.

Пусть при некоторых начальных условиях возможно установившееся движение системы:

$$q\,(t) = q_0 = \mathrm{const}, \quad \omega\,(t) = \omega_0 = \mathrm{const}$$

Величины q_0, ω_0 определяются из следующих уравнений:

$$-\partial U/\partial q_i - {}^1/_2\partial\omega^T B\omega/\partial q_i = 0$$

При этом $F_j = 0$.

Если для $q = q_0$ выполняются равенства

$$\partial U/\partial q_i = \partial B_{kj}/\partial q_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{1.1}$$

где B_{kj} — коэффициенты матрицы B, то такие установившиеся движения называют тривиальными, остальные — существенными.

Введем отклонения $x = q - q_0$, $\eta = \omega - \omega_0$ и запишем уравнения Лагранжа в переменных x, η в матричном виде, выделив линейные члены

$$\begin{gathered} A_0 x^{\cdot\cdot} + (D_0 + G_0)\, x^{\cdot} + W_0 x + C_0 \eta^{\cdot} - P_0^T \eta = X\,(x, x^{\cdot}, \eta) \\ B_0 \eta^{\cdot} + C_0^T x^{\cdot\cdot} + P_0 x^{\cdot} = u + \Theta\,(x, x^{\cdot}, \eta) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь D_0 — матрица коэффициентов линейной части вектора диссипативной силы Q_d, u — линейная часть вектора управляющей силы F. Нулевой индекс означает, что величина вычислена при $q = q_0$, $\omega = \omega_0$. Элементы матриц G_0, W_0, P_0 определяются следующими выражениями:

$$G_{ij0} = \sum_{l=r+1}^{n} \left(\frac{\partial C_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial C_{jl}}{\partial q_i} \right) \omega_l \Bigg|_0, \quad P_{ij0} = \sum_{l=r+1}^{n} \left(\frac{\partial B_{lj}}{\partial q_i} \right) \omega_l \Bigg|_0$$

$$W_{ij0} = -\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{1}{2} \sum_{k,\,l=1}^{r} \omega_k \omega_l \frac{\partial^2 B_{kl}}{\partial q_i \partial q_j} \Bigg|_0$$

Здесь $X\,(x, x^{\cdot}, \eta)$, $\Theta\,(x, x^{\cdot}, \eta)$ — вектор-функции, содержащие нелинейные по x, $x^{\cdot}$, η члены.

Рассмотрим задачу о стабилизации установившихся движений q_0, ω_0 системы при помощи управляющих воздействий, прикладываемых только по псевдоциклическим координатам, основываясь на уравнениях первого приближения, которые имеют вид

$$\begin{gathered} A_0 x^{\cdot\cdot} + (D_0 + G_0)\, x^{\cdot} + W_0 x + C_0 \eta^{\cdot} - P_0^T \eta = 0 \\ B_0 \eta^{\cdot} + C_0^T x^{\cdot\cdot} + P_0 x^{\cdot} = u \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\sigma = H_0 x + L_0 x^{\cdot} + R_0 \eta \tag{1.4}$$

Здесь σ — линейная часть вектора измерений Σ, H_0, L_0, R_0 — постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Решение задачи стабилизации включает в себя, во-первых, выяснение принципиальных возможностей стабилизации, которое сводится к исследованию управляемости системы (1.3); во-вторых, определение количества необходимой информации о состоянии системы (о величинах x, $x^{\cdot}$, η), которые можно установить путем анализа наблюдаемости системы (1.3), (1.4), и, в-третьих, построение самого алгоритма стабилизации, например, в виде обратной связи по оценке вектора состояния системы, которая строится на основе определенной выше измерительной информации.

Сформулируем теорему о необходимых и достаточных условиях наблюдаемости и управляемости в форме Калмана [9]. Для этого представим систему (1.3), (1.4) в форме Коши

$$y^{\cdot} = A_y y + B_y u, \quad \sigma = C_y y \tag{1.5}$$

$$y = (x, x^{\cdot}, \eta)^T, \quad C_y = (H_0, L_0, R_0)$$

$$A_y = \begin{Vmatrix} 0 & E_r & 0 \\ A_{y1} & A_{y2} & A_{y3} \\ A_{y4} & A_{y5} & A_{y6} \end{Vmatrix}, \quad B_y = \begin{Vmatrix} 0 \\ B_{y1} \\ B_{y2} \end{Vmatrix}$$

$$A_{y1} = -S_0^{-1} W_0, \quad A_{y2} = -S_0^{-1} (D_0 + G_0 - C_0 B_0^{-1} P_0), \quad A_{y3} = S_0^{-1} P_0^T$$

$$A_{y4} = M_0^{-1} C_0^T A_0^{-1} W_0, \quad A_{y5} = -M_0^{-1} (P_0 - C_0^T A_0^{-1} (D_0 + G_0)),$$

$$A_{y6} = -M_0^{-1} C_0^T A_0^{-1} P_0^T$$

$$B_{y1} = -S_0^{-1}C_0B_0^{-1}, \quad B_{y2} = M_0^{-1}$$
$$S_0 = A_0 - C_0B_0^{-1}C_0^T, \quad M_0 = B_0 - C_0^TA_0^{-1}C_0, \quad S_0 = S_0^T > 0,$$
$$M_0 = M_0^T > 0$$

E_r — единичная матрица $r \times r$.

Теорема 1.1. Система (1.5) управляема и наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\operatorname{rank} \| B_y, A_yB_y, \ldots, A_y^{n+r-1}B_y \| = n + r \qquad (1.6)$$
$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} C_y \\ C_yA_y \\ \cdots \\ C_yA_y^{n+r-1} \end{Vmatrix} = n + r$$

Заметим, что проверка условий (1.6) достаточно трудоемка.

2. Для получения эффективных условий управляемости системы (1.3) целесообразно рассмотреть раздельно гироскопически несвязанную систему ($C_0 \equiv 0$) (ГНС) и гироскопически связанную систему (ГСС).

В случае тривиальных установившихся движений (1.1) ($P_0 \equiv 0$) ГНС расщепляется на две независимые подсистемы:

$$A_0x^{\cdot\cdot} + D_0x^{\cdot} + W_0x = 0, \quad B_0\eta^{\cdot} = u \qquad (2.1)$$

причем только вторая из них управляема ($\det B_0 \neq 0$). Поэтому тривиальные установившиеся движения ГНС нестабилизируемы. Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.1) тем не менее возможна при определенных условиях на матрицы A_0, D_0, W_0. Исследование устойчивости системы (2.1) с точки зрения структуры сил проведено в работе [3].

Рассмотрим случай существенных установившихся движений ГНС. Можно показать, что имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.1. Для управляемости ГНС порядка $n + r$ необходимо и достаточно, чтобы была управляема система

$$A_0x^{\cdot\cdot} + D_0x^{\cdot} + K_0x = P_0^TB_0^{-1}v, \quad K_0 = W_0 + P_0^TB_0^{-1}P_0 \qquad (2.2)$$

порядка $2r$. Аналогичная теорема сформулирована в [8].

Теорема 2.2. Если ранг матрицы P_0 равен числу позиционных координат системы ($\operatorname{rank} P_0 = r$), то ГНС всегда управляема.

В этом случае очевидно, что наименьшее число управляющих воздействий равно числу позиционных координат системы.

Следствие 2.1. Если в системе только одна позиционная координата ($r = 1$), то она управляема тогда и только тогда, когда $P_0 \neq 0$.

Для исследования управляемости системы (2.2) можно использовать различные критерии для такого класса систем. Здесь воспользуемся критерием, позволяющим учитывать специфику структуры сил, сформулированным в [10].

Теорема 2.3. ГНС управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} \| \lambda^2A_0 + \lambda D_0 + K_0; \quad P_0^TB_0^{-1} \| = r, \quad \forall\lambda \in \Lambda$$
$$\Lambda = \{\lambda_i\colon \det [\lambda^2A_0 + \lambda D_0 + K_0] = 0\}$$

Следствие 2.2. Если $K_0 \equiv 0$, то ГНС управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} P_0 = r$.

Пример 2.1. Рассмотрим физический маятник массой m, горизонтальная ось OO' которого может поворачиваться вокруг вертикальной оси NN' [3, 11]. Система имеет две степени свободы: поворот оси качания на угол ψ (псевдоциклическая координата) и поворот тела вокруг оси качания на угол ϑ (позиционная координата). Будем считать, что оси OO' и NN' пересекаются в точке O и оси OO', OG_* (G_* — центр тяжести тела) — главные оси эллипсоида инерции для точки O. Управляющей силой F служит момент, развиваемый приводом, вращающим ось OO'. В сделанных предположениях имеем

$$2T = I_1\vartheta^{\cdot 2} + (I_2 \sin^2\vartheta + I_3 \cos^2\vartheta)\omega^2$$
$$U = mga \cos\vartheta, \quad a = |OG_*|, \quad \omega = \varphi^{\cdot}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — моменты инерции тела.

По следствию 2.1 на интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ в случае существенных установившихся движений эта ГНС всегда управляема. Исключение составляет лишь вырожденный случай $\vartheta_0 = \pi/2$, что возможно лишь при $a = 0$.

Пример 2.2. Рассмотрим тяжелый гироскоп в совершенном кардановом подвесе с вертикальной осью вращения внешнего кольца [3, 12]. Угол нутации ϑ ($0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$) — позиционная координата, угловые скорости собственного вращения Ω и прецессии ω — псевдоциклические. Управляющими силами, прикладываемыми по циклическим координатам служат моменты F_1 двигателя, вращающего внешнее кольцо подвеса, и F_2 — двигателя, установленного на внутреннем кольце и приводящего во вращение гироскоп. Существенные установившиеся движения определяются соотношением

$$(I_1 + J_2 - I_3 - J_3)\Omega_0^2 \cos\vartheta_0 - I_3\omega_0\Omega_0 + mgz_0 = 0$$

Здесь I_1, I_3, J_2, J_3 — соответствующие моменты инерции ротора и внутреннего кольца подвеса, m — масса гироскопа, z_G ($z_0 \neq 0$) — расстояние от центра тяжести гироскопа до центра подвеса.

В этом случае можно показать, воспользовавшись следствием 2.1, что данная ГНС всегда управляема.

Рассмотрим ГСС ($C_0 \not\equiv 0$). Уравнения первого приближения для случая тривиальных установившихся движений (1.1) ($P_0 \equiv 0$) имеют вид

$$A_0x^{\cdot\cdot} + (D_0 + G_0)\, x^{\cdot} + W_0x + C_0\eta^{\cdot} = 0, \quad B_0\eta^{\cdot} + C_0^Tx^{\cdot\cdot} = u \tag{2.3}$$

Видно, что система (2.3) при $C_0 \not\equiv 0$ не расщепляется на две независимые подсистемы, как (2.1) в случае ГНС, а имеет перекрестную связь через $\eta^{\cdot}$ и $x^{\cdot\cdot}$, что представляет некоторые дополнительные возможности для стабилизации. Это особенно важно, когда матрица W_0 не является определенно-положительной.

Можно показать, что имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.4. Для управляемости системы (2.3) необходимо и достаточно, чтобы $\det W_0 \neq 0$ и была управляема система

$$S_0x^{\cdot\cdot} + (D_0 + G_0)\, x^{\cdot} + W_0x = -C_0B_0^{-1}v \tag{2.4}$$

Теорема 2.5. Система (2.3) управляема тогда и только тогда, когда

$$\det W_0 \neq 0, \quad \operatorname{rank} \| \lambda^2S_0 + \lambda(D_0 + G_0) + W_0;\ C_0B_0^{-1} \| = r,$$
$$\forall\lambda \in \Lambda_1, \quad \Lambda_1 = \{\lambda_i\colon \det[\lambda^2S_0 + \lambda(D_0 + G_0) + W_0] = 0\}$$

Следствие 2.3. Если система (2.3) имеет только одну позиционную координату $r = 1$, то она управляема тогда и только тогда, когда $C_0 \neq 0$, $W_0 \neq 0$.

Рассмотрим существенные ($P_0 \not\equiv 0$) установившиеся движения ГСС (1.3). Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.6. Система (1.3) управляема тогда и только тогда, когда наблюдаема система

$$S_0x^{\cdot\cdot} + N_0^Tx^{\cdot} + K_0^Tx = 0 \tag{2.5}$$
$$(N_0 = D_0 + G_0 - C_0B_0^{-1}P_0 + P_0^TB_0^{-1}C_0^T)$$

по измерению

$$\sigma = C_0^T B_0^{-1} x^{\cdot} - P_0 B_0^{-1} x$$

Теорема 2.7. Система (1.3) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} \lambda C_0^T - P_0 \\ \lambda^2 S_0 + \lambda N_0^T + K_0^T \end{matrix}\right\| = r, \quad \forall\lambda \in \Lambda_2$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda_i\colon \det[\lambda^2 S_0 + \lambda N_0^T + K_0^T] = 0\}$$

Следствие 2.4. Если $K_0 = W_0 + P_0^T B_0^{-1} P_0 = 0$, то система (1.3) управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} P_0 = r$.

Следствие 2.5. Если $r = 1$, т. е. в системе одна позиционная координата, то система (1.3) управляема тогда и только тогда, когда

$$\lambda C_0^T \neq P_0, \quad \forall\lambda \in \Lambda_2$$

Пример 2.3. Рассмотрим тяжелый гироскоп в кардановом подвесе с направленным нарушением симметрии и вертикальной осью l_1 вращения внешнего кольца [4, 13]. Внутреннее кольцо и ротор связаны между собой цилиндрическим шарниром l_0 с осью l_2, пересекающей ось l_1 в точке O. Считаем ось ротора l_3 фиксированной в теле и распределение масс ротора симметричным относительно этой оси. Центр масс ротора с координатами x_1, y_1, z_1 обозначим O_1.

Выберем подвижные системы координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ и $O_1\xi_3\eta_3\zeta_3$. Оси $O\xi_1$, $O\xi_2$, $O_1\xi_3$ совпадают соответственно с l_1, l_2, l_3. Плоскость $O\xi_1\eta_1$ содержит ось $O\xi_2$. Угол между $O\xi_1$ и $O\xi_2$ обозначим ε $(0 < \varepsilon < \pi)$; λ, μ, ν — направляющие косинусы оси ротора в системе $O\xi_2\eta_2\zeta_2$

$$I = \left\|\begin{matrix} A_2 & -G_2 & R_2 \\ -G_2 & B_2 & -D_2 \\ -R_2 & -D_2 & C_2 \end{matrix}\right\|$$

— тензор инерции внутреннего кольца в осях $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, J — момент инерции внешнего кольца относительно оси l_1, A_* — осевой, B_* — экваториальный моменты инерции ротора для точки O; m_2, m_3 — массы внутреннего кольца, ротора; x_2, y_2, z_2 — координаты общего центра масс внутреннего кольца и ротора в системе $O\xi_2\eta_2\zeta_2$. Для рассматриваемого гироскопа $\nu = 0$, $z_2 = 0$ и выполняются равенства

$$D_2 + m_3 y_1 z_1 = 0, \quad R_2 + m_3 z_1 x_1 = 0$$

Угол нутации ϑ — позиционная координата. Будем считать, что $\vartheta = 0$, когда ось l_3 принадлежит плоскости, параллельной l_1 и l_2 $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$. Угол прецессии ψ и угол собственного вращения φ — циклические координаты.

Обобщенная сила, соответствующая позиционной координате ϑ, представляет собой сумму моментов силы тяжести и диссипативной силы $d\vartheta^{\cdot}$. Управляющими воздействиями служат: момент F_1 двигателя, вращающего внешнее кольцо подвеса, и момент F_2 двигателя, установленного на внутреннем кольце и приводящего в движение ротор.

Регулярная прецессия такого гироскопа $\vartheta = 0$, $\omega_1 = \psi^{\cdot} = \text{const}$, $\omega_2 = \varphi^{\cdot} = \text{const}$ в данном случае является тривиальным установившимся движением. Воспользовавшись следствием 2.3, можно показать, что рассматриваемая ГСС управляема.

3. Рассмотрим теперь вопрос о наблюдаемости системы (1.3) при использовании измерений

$$\sigma_1 = H_0 x + L_0 x^{\cdot} \tag{3.1}$$

$$\sigma_2 = R_0 \eta \tag{3.2}$$

где H_0, L_0 — постоянные матрицы $l \times r$, R_0 — постоянная матрица $l \times$ $\times\, n - r$. Стандартный метод исследования наблюдаемости, сформулированный в теореме 1.1, оказывается достаточно трудоемким при больших n. Специфическая структура системы позволяет получить более эффективные условия наблюдаемости. Используя критерий наблюдаемости [14], можно показать, что имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.1. Для того чтобы система (1.3), (3.1) была наблюдаема, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} H_0 & 0 \\ -K_0 & P_0^T B_0^{-1} \end{matrix}\right\| = n \tag{3.3}$$

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} H_0 + \lambda L_0 \\ \lambda^2 S_0 + \lambda N_0 + K_0 \end{matrix}\right\| = r, \quad \forall \lambda \in \Lambda_3, \ \lambda \neq 0$$

$$\Lambda_3 = \{\lambda_i \colon \det [\lambda^2 S_0 + \lambda N_0 + K_0] = 0\}$$

Следствие 3.1. Если $H_0 \equiv 0$, то система (1.3), (3.1) ненаблюдаема.

Следствие 3.2. Если $L_0 \equiv 0$, $H_0 = E_r$, то система (1.3), (3.1) наблюдаема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} P_0 \geqslant n - r$. В частности, это означает, что для наблюдаемости системы число позиционных координат должно быть не меньше числа циклических.

Следствие 3.3. В случае тривиальных установившихся движений ($P_0 \equiv \equiv 0$) система (1.3), (3.1) ненаблюдаема.

Следствие 3.4. Для гироскопически несвязанной системы ($C_0 \equiv 0$) система (2.1), (3.1) наблюдаема тогда и только тогда, когда при выполнении условия (3.3)

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} H_0 + \lambda L_0 \\ \lambda^2 A_0 + \lambda D_0 + K_0 \end{matrix}\right\| = r, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \ \lambda \neq 0$$

Теорема 3.2. Для того чтобы система (1.3), (3.2) была наблюдаема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\det W_0 \neq 0, \quad \operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} P_0 + \lambda C_0^T \\ \lambda^2 S_0 + \lambda N_0 + K_0 \end{matrix}\right\| = r, \quad \forall \lambda \in \Lambda_3, \quad \lambda \neq 0$$

Следствие 3.5. В случае тривиальных установившихся движений ($P_0 \equiv \equiv 0$) система (1.3), (3.2) наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\det W_0 \neq 0, \quad \operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} \lambda C_0^T \\ \lambda^2 S_0 + \lambda (D_0 + G_0) + W_0 \end{matrix}\right\| = r, \quad \forall \lambda \in \Lambda_1, \ \lambda \neq 0$$

Следствие 3.6. ГНС ($C_0 \equiv 0$) (1.3), (3.2) наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\det W_0 \neq 0, \quad \operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} P_0 \\ \lambda^2 A_0 + \lambda D_0 + K_0 \end{matrix}\right\| = r, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \ \lambda \neq 0$$

Следствие 3.7. ГНС ($C_0 \equiv 0$) (1.3), (3.2) в случае тривиальных установившихся движений ($P_0 \equiv 0$) ненаблюдаема.

Следствие 3.8. Если в ГНС ($C_0 \equiv 0$) (1.3), (3.2) $r = 1$ (одна позиционная координата), то она наблюдаема тогда и только тогда, когда $W_0 \neq 0$ и $P_0 \neq 0$.

Следствие 3.9. Если в случае тривиальных ($P_0 \equiv 0$) установившихся движений в системе (1.3), (3.2) $r = 1$ (одна позиционная координата), то она наблюдаема тогда и только тогда, когда $W_0 \neq 0$, $C_0 \neq 0$.

Проиллюстрируем полученные теоремы на примерах, рассмотренных в п. 2.

Пример 3.1. Физический маятник представляет собой ГНС с одной позиционной координатой. Воспользовавшись следствиями 3.1, 3.2, 3.8, получим: 1) система ненаблюдаема по измерению $\sigma_4 = x^{\cdot}$; 2) система наблюдаема по измерению $\sigma_5 = x$ и наблюдаема по измерению $\sigma_2 = \eta$, кроме вырожденного случая, когда центр масс совпадает с точкой подвеса ($a = 0$).

Пример 3.2. Для гироскопа в кардановом подвесе при существенных установившихся движениях, которые являются регулярной прецессией, система ненаблюдаема по измерению $\sigma_4 = x^{\cdot}$ и наблюдаема отдельно по измерениям $\sigma_5 = x$, $\sigma_2 = \eta$, что аналогично показывается при помощи следствий 3.1, 3.2, 3.8.

Пример 3.3. Так как регулярная прецессия тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с направленным нарушением симметрии и вертикальной осью вращения внешнего кольца соответствует случаю тривиальных установившихся движений ГСС, то по следствиям 3.4, 3.9 система наблюдаема по измерению $\sigma_2 = \eta$ и ненаблюдаема по измерениям $\sigma_4 = x^\cdot$, $\sigma_5 = x$.

4. Перейдем к третьему этапу решения задачи стабилизации — построению алгоритма стабилизации. Если условия управляемости, сформулированные в п. 2, выполнены, то это означает, что в системе (1.3) всегда можно выбрать управление u в виде обратной связи по состоянию

$$u = -K_1 x - K_2 x^\cdot - K_3 \eta \tag{4.1}$$

(здесь K_1, K_2, K_3 — постоянные матрицы соответствующих размерностей) таким образом, чтобы обеспечить любые наперед заданные корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$\begin{gathered} A_0 x^{\cdot\cdot} + (D_0 + G_0)\, x^\cdot + W_0 x + C_0 \eta^\cdot - P_0 \eta = 0 \\ B_0 \eta^\cdot + C_0^T x^{\cdot\cdot} + P_0 x^\cdot = -K_1 x - K_2 x^\cdot - K_3 \eta \end{gathered} \tag{4.2}$$

При этом нулевое решение полной нелинейной замкнутой управлением (4.1) системы (1.2) также будет асимптотически устойчивым.

Элементы матриц K_1, K_2, K_3 могут быть определены разными способами. В частности, их можно выбрать, приводя систему к так называемому каноническому управляемому представлению, т. е. разбив исходную систему на ряд подсистем со скалярным управлением [15]. В этих подсистемах выбор коэффициентов управления, отвечающих наперед заданной степени затухания, не представляет принципиальных трудностей, например, можно воспользоваться удобной процедурой [16].

Для формирования управления (4.1) требуются все фазовые координаты x, $x^\cdot$, η, которые, вообще говоря, могут быть измерены. Однако, как показало исследование наблюдаемости системы, проведенное в п. 3, в измерении всех фазовых координат нет необходимости. При выполнении условий наблюдаемости, сформулированных в п. 3, можно построить алгоритм стабилизации системы (1.3) в виде

$$u = -K_1 x^\circ - K_2 x^{\circ\cdot} - K_3 \eta^\circ \tag{4.3}$$

где x°, $x^{\circ\cdot}$, η° — оценки векторов x, $x^\cdot$, η, полученные из алгоритма оценивания вида

$$y^{\circ\cdot} = A_y y^\circ + L_y (\sigma - C_y y^\circ) \tag{4.4}$$

где $y^{\circ T} = (x^\circ, x^{\circ\cdot}, \eta^\circ)$, матрицы A_y, C_y определены соотношениями (1.5), (1.6), а $\sigma = C_y y$ — измерение, по которому система (1.5) наблюдаема; матрица коэффициентов усиления L_y определяется из какого-либо критерия малости ошибок оценки $\Delta y = y - y^\circ$. Замкнутая управляемая система в этом случае описывается соотношениями (1.3), (4.3), (4.4).

Авторы благодарят В. А. Самсонова за замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966—976.
2. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 977—985.
3. *Самсонов В. А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 512—520.
4. *Клоков А. С., Самсонов В. А.* О стабилизируемости тривиальных установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 199—202.

5. *Красинская Э. М.* К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 302—309.
6. *Красинский А. Я.* Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 194—202.
7. *Красинский А. Я., Ронжин В. В.* К стабилизации установившихся движений механических систем с циклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 542—548.
8. *Атанасов В. А., Лилов Л. К.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 713—718.
9. *Калман Д., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
10. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and Observability Criteria for multivariable linear second — order models // IEEE Trans. on Automatic Control. 1984. V. AC—29. № 2. P. 163—165.
11. *Румянцев В. В.* Об устойчивости равномерных вращений механических систем // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 6. С. 113—121.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 374—378.
13. *Коносевич Б. И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1977. Вып. 9. С. 61—73.
14. *Hautus M. L. J.* Controllability and Observability conditions of linear autonomous systems // Proc. kon. Ned. Akad. Wetensch. 1969. Ser. A. V. 72. P. 443—448.
15. *Maroulas J., Barnett S.* Canonical forms for time — invariant limear control systems: A survey with extentions // Int. J. Syst. Sci. 1979. V. 10. N 1. P. 33—50.
16. *Мироновский Л. А.* Аналоговые и гибридные модели динамических систем. Л.: Ленингр. ин-т авиац. приборостроения, 1985. 113 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1988