тельное число):

$$S_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m^{\mu} (\zeta_j/\zeta_i)^m K_{m+n+2q} (2\zeta_j\gamma h) \frac{I_m(\zeta_i\gamma R)}{K_n(\zeta_j\gamma R)} \tag{3.6}$$

Воспользуемся следующими оценками, вытекающими из соотношений эквивалентности (3.2):

$$\begin{gathered} K_{m+n+2q}(2\zeta_j\gamma h) < M_{11}(m+n+2q-1)!/(\zeta_j\gamma h)^{m+n+2q} \\ K_n(\zeta_j\gamma R) > M_{12}(n-1)!\,2^n(\zeta_j\gamma R)^{-n}, \quad I_m(\zeta_i\gamma R) < M_{13}2^{-m}(\zeta_i\gamma R)^m/m! \end{gathered} \tag{3.7}$$

Используя неравенство

$$(m+n+2q-1)! < 2^{m+n+2q-1}(n-1)!\,(m+2q)!$$

и соотношения (3.6), (3.7), запишем

$$S_1 < M_{14} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)\ldots(m+2q)\, m^{\mu} \left(\frac{R}{h}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{h}\right)^n$$

Ряды по m и n сходятся в силу предельного признака Даламбера (так как $R/h < 1$). Следовательно, сходится и ряд (3.1), т. е. $\Delta(\varepsilon, \gamma R)$ — определитель нормального типа.

Таким образом, можно считать обоснованным метод [1] исследования устойчивости волокна в полубесконечной матрице вблизи свободной плоской поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Лапуста Ю. Н.* Устойчивость волокна вблизи свободной поверхности // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 8. С. 21—29.
2. *Гузь А. Н.* О построении теории устойчивости однонаправленных волокнистых материалов // Прикл. механика. 1969. Т. 5. № 2. С. 62—70.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.
5. *Gregory R. D.* The propagation of waves in an elastic halfspace containing a cylindrical cavity // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1970. V. 67. № 3. P. 689—710.
6. *Бабич И. Ю., Гаращук И. Н., Гузь А. Н.* Устойчивость волокна в упругой матрице при неоднородном докритическом состоянии // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 11. С. 21—27.
7. *Гузь А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986. 511 с.

Киев

Поступила в редакцию 23.III.1988

УДК 539.374 : 534.1

Д. Б. Балашов, Я. А. Каменярж

О ПРОСТЫХ ВОЛНАХ В УПРУГО-ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Упругопластическое течение описывается нелинейной гиперболической [1] системой уравнений и неравенством (неотрицательность множителя в ассоциированном законе), являющимся условием нагружения. Среди простых волн (ПВ) этой системы уравнений имеются опрокидывающиеся. Однако условию нагружения удовлетворяют только те ПВ, которые не опрокидываются. Этот факт известен в случае, когда принимается закон Гука для упругой деформации и критерий текучести Мизеса [2]; его обоснование существенно использовало эти частные свойства. Ниже отсутствие опрокидывания ПВ устанавливается для тела с произвольной гладкой поверхностью текучести и линейной анизотропной упругостью. В этом случае из упругопластических ПВ не возникает скачков, что указывает на возможность решения задачи о распаде произвольного разрыва без введения скачков каких-либо новых типов, требующих разыскания дополнительных условий.

Постановка задачи и формулировка результата. Для системы квазилинейных уравнений

$$A(\mathbf{u})\,\partial\mathbf{u}/\partial t + B(\mathbf{u})\,\partial\mathbf{u}/\partial x = 0$$

(A, B — матрицы, $\mathbf{u}$ — вектор неизвестных) рассматриваются простые волны — решения вида $\mathbf{u}(\theta(x, t))$. Для существования ПВ необходимо и достаточно, чтобы характеристическое уравнение

$$\det(-A(\mathbf{u})\,c + B(\mathbf{u})) = 0 \tag{1}$$

имело действительный корень $c(\mathbf{u})$. Если $c(\mathbf{u})$ — такой некратный корень и $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — ненулевое решение системы $(-Ac + B)\,\mathbf{f} = 0$, то простая волна находится как решение уравнений

$$d\mathbf{u}/d\theta = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\theta)), \quad \partial\theta/\partial t = -c(\mathbf{u}(\theta))\,\partial\theta/\partial x \tag{2}$$

Первая группа этих соотношений в принципе может быть проинтегрирована; пусть $\mathbf{u}(\theta, u_0)$ — ее решение ($\mathbf{u}_0$ — постоянный вектор). Тогда изменение всех величин $\mathbf{u}$ в ПВ определяется эволюцией параметра $\theta(x, t)$. В соответствии с последним из уравнений (2) начальное значение $\theta(x, t_0) = \theta_0(x)$ переносится с постоянной во времени скоростью $c(\mathbf{u}(\theta_0, \mathbf{u}_0))$.

Если производная $dc/d\theta = (\partial c/\partial \mathbf{u})\,\mathbf{f}(\mathbf{u}(\theta)$ отлична от нуля, то в ПВ может происходить неограниченный рост производных решения (опрокидывание ПВ). Для ПВ, распространяющейся направо ($c \geqslant 0$), критерием опрокидывания является неравенство

$$(dc/d\theta)\,\partial\theta/\partial x < 0 \tag{3}$$

Таким образом, при $dc/d\theta \neq 0$ ПВ рассматриваемой системы уравнений либо с возрастающим, либо с убывающим начальным профилем $\theta_0(x)$ обязательно опрокидываются. Иначе обстоит дело с упругопластическими ПВ. Помимо системы уравнений они должны удовлетворять неравенству — условию нагружения. Если для некоторой ПВ системы уравнений пластического течения оно не выполнено, то эта ПВ не является решением упругопластической задачи. В таком случае начальные данные эволюционируют в соответствии с уравнениями теории упругости (происходит разгрузка).

Условие нагружения служит для отбора имеющих механический смысл ПВ системы уравнений пластического течения. Для отобранных с его помощью ПВ в случае изотропного тела с поверхностью текучести Мизеса неравенство (3) не выполнено [2]. Другими словами, упругопластические ПВ в этом случае не опрокидываются. Ниже выясняется, что по той же причине опрокидывание упругопластических ПВ отсутствует и для значительно более широкого класса тел.

Рассматривается упруго- идеальнопластическое тело с произвольной гладкой поверхностью текучести $F(\sigma_{ij}) = 0$ и ассоциированным с ней законом течения. Функция F, как обычно, предполагается выпуклой; область упругого поведения в пространстве напряжений σ_{ij} определяется неравенством $F(\sigma_{ij}) < 0$, $F(0) < 0$. Для упругих деформаций принимается закон $\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}{}^e$, $\varepsilon_{ij}{}^e = B_{ijkl}\sigma_{kl}$. Постоянные упругие модули обладают свойствами симметрии

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij} \tag{4}$$

Упругопластическое течение такого тела описывается в рамках геометрически линейной теории системой [3, 4] уравнений (x^i — декартовы координаты, v_i — компоненты скорости, ρ_0 — плотность, $F_{ij} \equiv \partial F/\partial\sigma_{ij}$)

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial\lambda}{\partial t}F_{ij} + B_{ijkl}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}, \quad F(\sigma_{ij}) = 0 \tag{5}$$

и неравенством (условием нагружения)

$$\partial\lambda/\partial t \geqslant 0 \tag{6}$$

в дальнейшем устанавливается, что для такого тела плоские упругопластические ПВ не опрокидываются.

Плоские ПВ волны. Последнее из соотношений (5) можно заменить уравнением $F_{ij}\,\partial\sigma_{ij}/\partial t = 0$, эквивалентным ему, если начальные данные удовлетворяют условию $F(\sigma_{ij}) = 0$. Используя это уравнение, из свертки второго из соотношений (5) с F_{ij}

находим выражение для $\partial\lambda/\partial t$. С его помощью система (5), (6), приводится к виду

$$\rho_0\partial v_i/\partial t = \partial\sigma_{ij}/\partial x^j,\quad \partial\sigma_{ij}/\partial t = L_{ijkl}e_{kl},\qquad e_{ij} = {}^1/_2\,(\partial v_i/\partial x^j + \partial v_j/\partial x^i)$$
$$\partial\lambda/\partial t = \alpha^{-1}A_{mnpq}e_{mn}F_{pq} \geqslant 0,\quad \alpha = A_{abcd}F_{ab}F_{cd}$$

Здесь величины

$$L_{ijkl} = A_{ijkl} - \alpha^{-1}A_{ijpq}F_{pq}A_{klrs}F_{rs} \tag{7}$$

обладают свойствами симметрии, аналогичными (4) (все индексы пробегают значения 1, 2, 3).

Для плоских ПВ этой системы, т. е. решений, зависящих от $\theta\,(x,\,t)$, $x \equiv x^1$, получаем уравнения (штрихом обозначается производная по θ)

$$-c\rho_0 v_i' = \sigma_{i1}',\quad -c\sigma_{ij}' = L_{ijk1}v_k' \tag{8}$$
$$-c\lambda' = \alpha^{-1}A_{m1pq}F_{pq}v_m',\quad \partial\theta/\partial t + c\partial\theta/\partial x = 0$$

Исключим из первого уравнения напряжения (при помощи второго)

$$(-\rho_0 c^2\delta_{ij} + B_{ij})\,v_j' = 0,\quad B_{ij} = L_{i1j1}$$

Вместе с остальными соотношениями (8) оно составит систему, описывающую упругопластические ПВ. Характеристическое уравнение (1) имеет в рассматриваемом случае вид

$$\det\,(-\rho_0 c^2 I + B) = 0$$

Укажем одно соотношение, используемое в дальнейшем для исследования опрокидывания ПВ.

Производные собственного числа симметричной матрицы по ее компонентам. Рассмотрим симметричную матрицу с компонентами a_{ij}; пусть λ_k — ее собственные числа, $\mathbf{w}_k$ — ортонормированный набор ее собственных векторов, w_{kl} $(l = 1,\,2,\,3)$ компоненты вектора $\mathbf{w}_k$ (индексы пробегают значения 1, 2, 3).

Пусть f — функция симметричной матрицы a. Ее производной по a называется симметричная матрица $f_{ij}'\,(a)$ в выражении главной линейной части приращения

$$f\,(a + h) - f\,(a) = f_{ij}'\,(a)\,h_{ij} + o\,(h)$$

(h — произвольная симметричная матрица). Если функцию f продолжить на множество всех матриц соотношением

$$f\,(a) = f\,(a\,/\,2 + a^T\,/\,2)$$

где индекс T означает транспонирование, то имеет место равенство

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\,(a) = f_{ij}'\left(\frac{a + a^T}{2}\right)$$

В случае симметричной матрицы a правая часть, очевидно, равна $f_{ij}'\,(a)$. В связи с этим производная $f_{ij}'\,(a)$ в дальнейшем обозначается $\partial f/\partial a_{ij}$.

Справедлива формула (здесь и в следующих двух соотношениях по k не суммировать!)

$$\partial\lambda_k/\partial a_{ij} = w_{ki}w_{kj} \tag{9}$$

Она получается дифференцированием равенства $\lambda_k = w_{km}a_{mn}w_{kn}$ при учете соотношения

$$(\partial w_{km}/\partial a_{ij})\,a_{mn}w_{kn} + w_{km}a_{mn}\partial w_{kn}/\partial a_{ij} = \lambda_k\,(\partial/\partial a_{ij})\,(w_{kn}w_{kn}) = 0$$

Отсутствие опрокидывания ПВ. Для волн, распространяющихся направо ($c \geqslant 0$), необходимое и достаточное условие опрокидывания (3) можно представить в виде

$$d\rho_0 c^2\,/\,d\theta\cdot\partial\theta/\partial x < 0 \tag{10}$$

Покажем, что для рассматриваемых упругопластических ПВ оно никогда не выполняется. Первый сомножитель найдем как производную сложной функции

$$\frac{d\rho_0 c^2}{d\theta} = \frac{\partial\rho_0 c^2}{\partial B_{ij}}\,\frac{\partial B_{ij}}{\partial F_{kl}}\,\frac{\partial F_{kl}}{\partial\sigma_{mn}}\,\sigma_{mn}' \tag{11}$$

Здесь $B_{ij} = L_{i1j1}$ — компоненты симметричной матрицы. Ее производная по F_{kl} вычисляется с учетом выражения (7), а производная ее собственного числа $\rho_0 c^2$ по B_{ij} — по формуле (9) с использованием собственного вектора $v'\,/\,|\,v'\,|$. Для их свертки получаем, таким образом, выражение

$$\frac{\partial\rho_0 c^2}{\partial B_{ij}}\frac{\partial B_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{1}{|v'|^2} v_i' v_j' \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (\alpha^{-1} A_{i1pq} F_{pq} A_{j1rs} F_{rs}) =$$

$$= -\frac{2}{\alpha |v'|^2} A_{i1pq} F_{pq} v_i' L_{j1kl} v_j' = -\frac{2c^2}{|v'|^2} \lambda' \sigma'_{kl}$$

Последнее равенство получено при помощи соотношений (8). Подставляя его в формулу (11), находим

$$\frac{d\rho_0 c^2}{d\theta} = -2c^2\lambda' H, \quad H = \sigma'_{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{mn}} \sigma'_{mn}$$

и выражение в левой части (10) равно $2cH\lambda' \partial\theta/\partial t = 2cH \partial\lambda/\partial t$.

В силу выпуклости функции F величина H неотрицательна, а неравенство $\partial\lambda/\partial t \geqslant 0$ — условие нагружения, выполненное в процессе пластического течения. Таким образом, условие (10) не выполняется и, следовательно, упругопластические ПВ для рассматриваемого класса тел не опрокидываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mandel J.* Ondes plastiques dans un milieu indefini a troites dimensions // J. Mech. 1962. V. 1. № 1. P. 3—30. Механика. 1963. № 5. P. 119—141.
2. *Каменярж Я. А.* О простых волнах и распаде разрыва в упругопластической среде с условием Мизеса // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 320—329.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 584 с.
4. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1988