ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. *Prager W.*, *Synge J. L.* Approximations in elastisity based on the consept of function space // Q. Appl. Math. 1947. V. 5. № 3. P. 241—269.
3. *Александров В. М.*, *Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
4. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
5. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: ЛГУ, 1964. 395 с.
6. *Савин Г. Н.*, *Тульчий В. И.* Пластинки, подкрепленные стальными кольцами и упругими площадками. Киев: Наук. думка, 1971. 268 с.
7. *Гузь А. Н.*, *Луговой П. З.*, *Шульга Н. А.* Конические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев: Наук. думка, 1976. 162 с.
8. *Власов В. З.*, *Леонтьев Н. И.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
9. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: ЛГУ, 1978. 223 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
14.IV.1988

УДК 539.3

А. Н. Гузь, Ю. Н. Лапуста

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛОКНА В УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуются свойства бесконечного характеристического определителя в трехмерной линеаризированной задаче [1] устойчивости волокна в упругой полубесконечной матрице вблизи свободной поверхности. Доказывается, как и в случае двух, ряда, двоякопериодической системы волокон в бесконечной матрице [2—4], что указанный определитель является определителем нормального типа. Рассматриваются нелинейно-упругие трансверсально-изотропные сжимаемые материалы без учета конкретной формы упругого потенциала в рамках теории конечных докритических деформаций. Изложенные результаты справедливы и для различных вариантов теории малых докритических деформаций. Используются результаты анализа родственных вопросов теории дифракции упругих волн [5].

Постановка задачи. Характеристическое уравнение. Рассмотрим устойчивость волокна в полубесконечной матрице вблизи свободной поверхности. Введем следующие основные допущения: 1) объемные силы отсутствуют и рассматриваемое полубесконечное тело загружено «мертвыми» сжимающими усилиями вдоль оси волокна таким образом, что укорочения волокна и матрицы в этом направлении равны; 2) между волокном и матрицей осуществлен жесткий контакт; 3) плоская поверхность матрицы свободна от усилий; 4) докритическое состояние однородное (данное допущение обосновано результатами работы [6]).

Вследствие предположения 1) выполнены достаточные условия применимости статического метода (метода Эйлера) к исследованию рассматриваемой задачи устойчивости. Поэтому данную задачу будем решать методом Эйлера.

Волокно и матрицу отнесем к лагранжевым координатам, совпадающим до деформации с прямоугольной (x, y, z) и цилиндрической (r, θ, x_3) системами координат. Связь между этими системами координат опишем соотношениями

$$x = -r\sin\theta,\ y = h - r\cos\theta,\ z = x_3 \tag{1.1}$$

Пусть волокно и матрица занимают соответственно области

$$D^{(1)} = \{(r, \theta, x_3) \in \mathbf{R}^+\times\Pi\times\mathbf{R} : r \leqslant R\},\ D = \{(r, \theta, x_3) \in$$
$$\in \mathbf{R}^+\times\Pi\times\mathbf{R} : r \geqslant R,\ r\cos\theta \leqslant h\};\ \mathbf{R}^+ = [0, \infty),\ \Pi = [0, 2\pi),\ \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$$

Считаем, что волокно находится строго внутри полубесконечной матрицы, в связи с чем потребуем выполнения условия

$$R/h < 1 \tag{1.2}$$

Используя обозначения и следуя методике работы [1], получим бесконечную однородную систему алгебраических уравнений

$$A_{\alpha m}X_m + B_{\alpha m}X_m^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} M_{\alpha mn}X_n = 0 \quad (\alpha = 1, 2;\ m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

Элементы матриц $A_{\alpha m}$, $B_{\alpha m}$, $M_{\alpha mn}$ определяются по формулам

$$\begin{gathered}
A_{\alpha mij} = T_{1\alpha ij}(m)\,K_{m+1}(\zeta_i\gamma R)\,K_m^{-1}(\zeta_i\gamma R) + T_{2\alpha ij}(m) \\
B_{\alpha mij} = T_{1\alpha ij}^{(1)}(m)\,I_{m+1}(\zeta_i^{(1)}\gamma R)\,I_m^{-1}(\zeta_i^{(1)}\gamma R) - T_{2\alpha ij}^{(1)}(m) \\
M_{\alpha mnij} = \sum_{t=1}^{3}\left[-T_{1\alpha it}(m)\,I_{m+1}(\zeta_t\gamma R) + T_{2\alpha it}(m)\,I_m(\zeta_t\gamma R)\right]P_{mntj}K_n^{-1}(\zeta_j\gamma R) \\
P_{mnij} = \varepsilon_m \int_{-\infty}^{\infty} B_{ij}(t)\exp\left[-\gamma h(R_{jj} + R_{ij})\right]\exp(-nt)\,Q_{mij}^{\mp}\,dt \\
Q_{mij}^{\mp} = \left[(R_{ij} + \alpha_j)^{-m} \mp (R_{ij} - \alpha_j)^{-m}\right]\zeta_i^{m}, \quad \gamma = \pi l^{-1}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь l — длина полуволны потери устойчивости; верхний индекс минус соответствует $i = 1$, нижний плюс — $i = 2{,}3$; $\varepsilon_m = {}^1/_2$ при $m = 0$ и $\varepsilon_m = 1$ при $m > 0$. Функции $B_{ij}(t)$ определяются из систем уравнений

$$\begin{gathered}
\left(\alpha_j^2 + \frac{1}{2}\zeta_1^2\right)\left(B_{1j} + \frac{1}{2}\delta_{1j}\right) - \alpha_j \sum_{s=2}^{3} R_{sj}\left(B_{sj} - \frac{1}{2}\delta_{sj}\right) = 0 \\
\alpha_j\left(B_{1j} + \frac{1}{2}\delta_{1j}\right) - \sum_{s=2}^{3} K_{1s}R_{sj}\left(B_{sj} - \frac{1}{2}\delta_{sj}\right) = 0 \\
\alpha_j R_{1j}\left(B_{1j} - \frac{1}{2}\delta_{1j}\right) - \sum_{s=2}^{3}(K_{2s} + \alpha_j^2)\left(B_{sj} + \frac{1}{2}\delta_{sj}\right) = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\alpha_j = \zeta_j \operatorname{sh} t, \quad R_{ij} = \sqrt{\zeta_i^2 + \alpha_j^2} \quad (i, j = 1, 2, 3) \\
K_{1s} = (a_{11}\zeta_s^2 + a_{13} - \overset{*\circ}{\sigma}_{33}\lambda_1^{-2})(a_{13} + G_{13})^{-1} \\
K_{2s} = {}^1/_2\,(a_{11}G_{13}\zeta_s^2 + a_{13}G_{13} + a_{13}\overset{*\circ}{\sigma}_{33}\lambda_1^{-2})\,G_{12}^{-1}\,(a_{13} + G_{13})^{-1}
\end{gathered}$$

Величины a_{ij}, G_{1k}, характеризующие модель деформируемого тела, и значения ζ_i^2, зависящие от условий нагружения и вида упругого потенциала, можно определить по формулам работ [3, 7]; λ_1 обозначают удлинения, $\overset{*\circ}{\sigma}_{33}$ — компонента тензора обобщенных напряжений. Верхним индексом (1) отмечены соответствующие величины для волокна.

Величины $T_{\beta\alpha ij}(m)$ при $m > 0$ определяются по формулам

$$\begin{gathered}
T_{1111} = T_{112s} = T_{1131} = T_{113s} = T_{2131} = T_{1231} = 0 \\
T_{111s} = \zeta_s\varkappa, \quad T_{1121} = -\zeta_1\varkappa \\
T_{2111} = -T_{211s} = T_{2121} = T_{212s} = m, \quad T_{213s} = \lambda_1(K_{1s} - 1) \\
-\zeta_1^{-1}T_{1211} = \zeta_s^{-1}mT_{121s} = -\zeta_1^{-1}mT_{1221} = \zeta_s^{-1}T_{122s} = \varkappa(m-1)^{-1}T_{2211} = \\
= -\varkappa(m-1)^{-1}T_{222s} = 2\lambda_1^2G_{12}\varkappa^{-1}m \\
-\zeta_s^{-1}\varkappa^{-1}T_{123s} = K_{1s}m^{-1}T_{2231} = m^{-1}T_{223s} = \lambda_1G_{13}K_{1s}\varkappa^{-1} \\
T_{221s} = 2\lambda_1^2G_{12}\left[K_{2s} + \varkappa^{-2}m(m-1)\right] \\
T_{2221} = -\lambda_1^2G_{12}\left[\zeta_1^2 + 2\varkappa^{-2}m(m-1)\right], \quad \varkappa = \gamma R
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Значения $T_{\beta\alpha\nu k}(0)$ получаются из $T_{\beta\alpha\nu r}(u)$ при $u = 0$ ($r = k + 1$; $\alpha, \beta, \nu, k = 1, 2$; $s, r = 2, 3$). Для того чтобы получить выражения для $T_{\beta\alpha ij}^{(1)}(m)$, необходимо в соответствующих формулах для $T_{\beta\alpha ij}(m)$ пометить величины, зависящие от докритического состояния и модели деформируемого тела, верхним индексом (1) и домножить полученные выражения на $(-1)^{\beta}$.

Отметим, что в рассматриваемой проблеме без ограничения общности можно требовать выполнения условий

$$\det B_{2m} \neq 0, \quad \det H_m \neq 0 \tag{1.7}$$
$$(H_m = (A_{1m} - B_{1m} B_{2m}^{-1} A_{2m}))$$

Действительно, равенство нулю первого определителя в (1.7) соответствует одной из форм неустойчивости бесконечного цилиндра со свободной боковой поверхностью под действием сжимающей нагрузки, а равенство нулю второго — одной из форм потери устойчивости волокна в бесконечной матрице.

Приведем систему (1.3) к каноническому виду

$$X_m + \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn} X_n = 0 \tag{1.8}$$

$$S_{mn} = H_m^{-1} (M_{1mn} - B_{1m} B_{2m}^{-1} M_{2mn}) \tag{1.9}$$

Из условия существования нетривиальных решений выводим характеристическое уравнение

$$\Delta\ (\varepsilon, \gamma R) = 0 \tag{1.10}$$

где $\Delta\ (\varepsilon, \gamma R)$ — определитель бесконечной однородной системы алгебраических уравнений (1.8), ε — укорочение волокна и матрицы.

2. Некоторые свойства систем уравнений (1.5) и их решений. Обозначим: $\delta_j\ (t)$ — определитель j-й системы уравнений (1.5), а $\Delta_{ij}\ (t)$ — определитель, полученный из $\delta_j\ (t)$ путем замены i-го столбца столбцом свободных членов. Рассмотрены [3, 4] плоские и пространственные задачи о неустойчивости свободной плоской границы полубесконечного упругого тела при сжатии в направлениях, параллельных свободной поверхности. Полученные характеристические определители для пространственных задач имеют структуру, аналогичную $\delta_j\ (t)$. Это позволяет установить физический смысл значений t_0, для которых $\delta_j\ (t_0) = 0$: они определяют форму потери устойчивости плоской границы полубесконечной матрицы при сжатии вдоль оси z с длинами полуволн l_z и l_x, отношение которых равно $|\ \alpha_j\ (t_0)\ |$.

Из результатов работ [3, 4] и соображений физического характера следует, что армирующий элемент (более жесткий, чем связующее) теряет устойчивость в матрице при меньших значениях укорочений, чем свободная плоская поверхность. Поэтому в дальнейшем без потери общности можно требовать выполнения условий

$$\forall t \in (-\infty, \infty), \quad \delta_j\ (t) \neq 0 \ \ (j = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

Данные соотношения дают возможность определить неизвестные функции $B_{ij}\ (t)$ по формулам

$$B_{ij}\ (t) = \Delta_{ij}\ (t)\ \delta_j^{-1}\ (t) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение $t_1 > 0$, такое, что

$$\alpha_j^2\ (t_1) > \max_{i=1,2,3} \zeta_i^2 \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

Вследствие непрерывности искомые функции $B_{ij}\ (t)$] ограниченные на любом ограниченном замкнутом сегменте, в том числе и на $[-t_1, t_1]$:

$$\forall t \in [-t_1, t_1], \quad |\ B_{ij}\ (t)\ | < M_1 \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем $M_k\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$ — некоторые положительные постоянные.

Остановимся теперь на случае $|\ t\ | > t_1$. Видно, что функции $\alpha_j^{-5}\ (t)\ \Delta_{ij}\ (t)$ — ограниченные на $(-\infty, -t_1) \cup (t_1, \infty)$:

$$\forall t \in (-\infty, -t_1) \cup (t_1, \infty), \quad |\ \alpha_j^{-5}\ (t)\ \Delta_{ij}\ (t)\ | < M_2 \tag{2.5}$$

Далее, разлагая $\alpha_j^{-5}\ (t)\ \delta_j\ (t)$ в ряд по степеням $\alpha_j^{-2}\ (t)$ для $|\ t\ | > t_1$, придем к оценке

$$\forall t \in (-\infty, -t_1) \cup (t_1, \infty), \ |\ \delta_j\ (t)\ | > M_3\ |\ \alpha_j\ (t)\ |^{5-2q}, \quad q \in N \tag{2.6}$$

Из совместного рассмотрения оценок (2.5), (2.6) и формулы (2.2) следует, что

$$\forall t \in (-\infty, -t_1) \cup (t_1, \infty), \quad | B_{ij}(t) | < M_4 \alpha_j{}^{2q}(t) \tag{2.7}$$

Учитывая, что

$$| \alpha_j(t) | < \zeta_j \exp | t | \tag{2.8}$$

из (2.4) и (2.7) получаем

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad | B_{ij}(t) | < M_5 \exp 2q | t | \tag{2.9}$$

Отметим, что вследствие четности функции $\delta_j(t)$ функции $B_{ij}(t)$ имеют ту же четность, что и $\Delta_{ij}(t)$. При этом функции с индексами 11, 22, 23, 32, 33 — четные, остальные нечетные.

3. Обоснование применимости метода редукции к решению характеристического уравнения. Уравнение (1.10), в левой части которого стоит бесконечный определитель, имеет весьма сложную структуру. Поэтому его аналитическое решение не представляется возможным. При численном решении характеристический определитель необходимо заменить конечным. Чтобы оправдать замену, рассмотрим некоторые свойства определителя $\Delta(\varepsilon, \gamma R)$ и докажем, что он является определителем нормального типа:

$$\exists M_6, S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^{j'} | S_{mnij} | < M_6 \tag{3.1}$$

$$i' = \begin{cases} 2, m = 0 \\ 3, m > 0 \end{cases}, \quad j' = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 3, n > 0 \end{cases}$$

В выражения для элементов S_{mnij} характеристического определителя в качестве сомножителей входят элементы матриц

$$H_m^{-1} \text{ и } H_m^{-1} B_{1m} B_{2m}^{-1}.$$

Учитывая, что для модифицированных функций Бесселя и функций Макдональда при конечных значениях аргумента и больших значениях индекса справедливы соотношения эквивалентности в виде

$$I_n(x) \backsim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n, \quad K_n(x) \backsim \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^n \quad (n \to \infty) \tag{3.2}$$

приходим к выводу: существуют такие M_7 и $\eta > 0$, что абсолютные значения всех элементов указанных матриц можно оценить сверху величиной $M_7 m^\eta$.

Оценим абсолютные значения коэффициентов P_{mnij}. Учитывая отмеченные в разд. 2 свойства четности (нечетности) функций $B_{ij}(t)$, в предпоследней формуле (1.4) заменим пределы интегрирования на 0, ∞, а $\exp(-nt)$ — на $\exp(-nt) \mp \mp \exp nt$, выбирая знак минус при $j = 1$ и плюс при $j = 2, 3$ (правило выбора знака в выражении для $Q_{mij}^{\mp}$ сохраняется).

Справедливы следующие оценки ($\forall t \in \mathbf{R}^+$):

$$\exp(-\gamma h R_{ij}) < M_8 \exp(-\gamma h R_{jj}) \tag{3.3}$$

$$| e^{-nt} \mp e^{nt} | < 2 e^{nt}, \quad | Q_{mij}^{\mp} | < M_9 (\zeta_j / \zeta_i)^m e^{mt}$$

Действительно, первая из них следует из предельного соотношения

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\exp(-\gamma h R_{ij})}{\exp(-\gamma h R_{jj})} = 1$$

вторая очевидна, а третья вытекает из неравенства

$$| Q_{mij}^{\mp} | < 2 (R_{ij} + \alpha_j)^m \zeta_i^{-m}, \quad t \in \mathbf{R}^+ \tag{3.4}$$

и предельного соотношения

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R_{ij} + \alpha_j}{e^t} = \zeta_j$$

Учитывая неравенства (3.3), (2.9) и используя известное интегральное представление для функций Макдональда, получим

$$| P_{mnij} | < 2 M_{10} (\zeta_j / \zeta_i)^m K_{m+n+2q} (2 \zeta_j \gamma h) \tag{3.5}$$

Из анализа соотношений (1.9), (1.4), (3.5) и изложенного в ытекает, что достаточно доказать сходимость двойного ряда следующей структуры (μ — некоторое положительное число):

$$S_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m^{\mu} (\zeta_j/\zeta_i)^m K_{m+n+2q} (2\zeta_j \gamma h) \frac{I_m(\zeta_i \gamma R)}{K_n(\zeta_j \gamma R)} \qquad (3.6)$$

Воспользуемся следующими оценками, вытекающими из соотношений эквивалентности (3.2):

$$\begin{gathered} K_{m+n+2q}(2\zeta_j\gamma h) < M_{11}(m+n+2q-1)!/(\zeta_j\gamma h)^{m+n+2q} \\ K_n(\zeta_j\gamma R) > M_{12}(n-1)!\,2^n(\zeta_j\gamma R)^{-n}, \quad I_m(\zeta_i\gamma R) < M_{13}2^{-m}(\zeta_i\gamma R)^m/m! \end{gathered} \qquad (3.7)$$

Используя неравенство

$$(m+n+2q-1)! < 2^{m+n+2q-1}(n-1)!\,(m+2q)!$$

и соотношения (3.6), (3.7), запишем

$$S_1 < M_{14} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)\ldots(m+2q)\, m^{\mu} \left(\frac{R}{h}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{h}\right)^n$$

Ряды по m и n сходятся в силу предельного признака Даламбера (так как $R/h < 1$). Следовательно, сходится и ряд (3.1), т. е. $\Delta(\varepsilon, \gamma R)$ — определитель нормального типа.

Таким образом, можно считать обоснованным метод [1] исследования устойчивости волокна в полубесконечной матрице вблизи свободной плоской поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Лапуста Ю. Н.* Устойчивость волокна вблизи свободной поверхности // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 8. С. 21—29.
2. *Гузь А. Н.* О построении теории устойчивости однонаправленных волокнистых материалов // Прикл. механика. 1969. Т. 5. № 2. С. 62—70.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.
5. *Gregory R. D.* The propagation of waves in an elastic halfspace containing a cylindrical cavity // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1970. V. 67. № 3. P. 689—710.
6. *Бабич И. Ю., Гаращук И. Н., Гузь А. Н.* Устойчивость волокна в упругой матрице при неоднородном докритическом состоянии // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 11. С. 21—27.
7. *Гузь А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986. 511 с.

Киев

Поступила в редакцию 23.III.1988

УДК 539.374 : 534.1

Д. Б. Балашов, Я. А. Каменярж

О ПРОСТЫХ ВОЛНАХ В УПРУГО-ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Упругопластическое течение описывается нелинейной гиперболической [1] системой уравнений и неравенством (неотрицательность множителя в ассоциированном законе), являющимся условием нагружения. Среди простых волн (ПВ) этой системы уравнений имеются опрокидывающиеся. Однако условию нагружения удовлетворяют только те ПВ, которые не опрокидываются. Этот факт известен в случае, когда принимается закон Гука для упругой деформации и критерий текучести Мизеса [2]; его обоснование существенно использовало эти частные свойства. Ниже отсутствие опрокидывания ПВ устанавливается для тела с произвольной гладкой поверхностью текучести и линейной анизотропной упругостью. В этом случае из упругопластических ПВ не возникает скачков, что указывает на возможность решения задачи о распаде