Ранее было известно лишь одно точное решение — для задачи со взрывом на границе двух совершенных газов (подробнее о подобных задачах см. [8], гл. 5).

4. На фиг. 1—3 представлены иллюстрации полученных выше точных решений, а также некоторые результаты численного решения методом Рунге — Кутта задачи (1.2)—(1.4) при всех значениях ν для функций $\varphi = b$ и $g\varphi = (1 - Bg)/(\gamma - 1)$.

Иллюстрация точных решений при $\nu = 1$ для сред, не являющихся дисперсными, дана на фиг. 1 в виде графиков зависимостей g/g_s (кривая *1*), f (*2*), h (*3*) от λ при $b = 0{,}3$ (*а*); $\gamma = -2$ и $B = 1{,}2$ (*б*); $\gamma = 5$ и $B = -1$ (*в*). Численный расчет этих же вариантов при $\nu = 2$; 3 показал лишь незначительную деформацию графиков, но в варианте *б* при $\nu = 3$ образуется полость с ненулевой плотностью ($h(\lambda) = 0$ при $\lambda \leqslant 0{,}17$).

Модель дисперсных сред еще до публикации [3] численно исследовалась при $\nu = 1$ [5] и $\nu = 2$ [6]. Поэтому ниже предлагаются лишь те результаты численного анализа, которые не освещались в упомянутых работах.

На фиг. 2 для $\gamma = 1{,}3$ представлены графики зависимостей $f(\lambda)$ при $\nu = 1$ (*а*), $\nu = 2$ (*б*), $\nu = 3$ (*в*) с разными значениями B (0; 0,3; 0,6; 0,9). Видна немонотонность функции $f(\lambda)$ при $\nu = 2$; 3 для $B > B_*$ ($B_* \approx 0{,}2$ при $\nu = 3$; $B_* \approx 0{,}3$ при $\nu = 2$), причем в случае сферической симметрии это свойство выражено сильнее. Свойство немонотонности $f(\lambda)$ не было обнаружено в [6], так как в этой работе $B \leqslant 0{,}04$.

При значениях B, близких к единице, дисперсная среда ведет себя как несжимаемая. Этот эффект продемонстрирован для $\gamma = 1{,}3$ и $B = 0{,}95$ на фиг. 3, где приведены графики зависимости g, f, h от λ при $\nu = 1$; 2; 3. Заметим, что в цилиндрическом и сферическом случаях образование участков почти постоянной плотности возможно лишь при достаточно сильной немонотонности скорости. Можно показать [1], что при $\nu = 3$ предельным решением ($B = 1$) для дисперсных сред будет известное решение [2] для несжимаемой жидкости с расширяющейся из центра взрыва полостью (каверной).

Автор благодарит В. П. Коробейникова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В.* Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. 332 с.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
3. *Кудинов В. М., Паламарчук Б. И., Вахненко В. А.* Затухание сильной ударной волны в двухфазной среде // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1080—1083.
4. *Сидоркина С. И.* О некоторых движениях аэрозоля // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 398—399.
5. *Pai S. I., Menon S., Fan Z. Q.* Similarity solutions of a strong shock wave propagation in a mixture of a gas and dusty particles // Intern. J. Engng. Sci. 1980. V. 18. No. 12. P. 1365—1373.
6. *Higashino F., Suzuki T.* The effect of particles in blast waves in a dusty gas // Z. Naturforsch. 1980. Bd. 35a. H. 12. S. 1330—1336.
7. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
8. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.VI.1988

УДК 539.3

В. А. Мисюра

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается контактная задача взаимодействия массивного тела, содержащего полости, с упругими оболочечными подкреплениями этих полостей. Она заменяется некоторой другой только для массивного тела с неклассическими краевыми условиями на границах полостей, которые асимптотически точно описывают взаимодействие в исходной контактной задаче. Строятся оценки погрешности такой замены в норме L_2.

1. Постановка задачи. Пусть физически линейное упругое тело, занимающее в недеформируемом состоянии область $V_0 \subset R^3$, содержит внутри себя полость V. Последняя подкреплена оболочкой толщины h, внешняя лицевая поверхность которой совпадает с ∂V. Область, которую занимает оболочка, обозначим через V_1. Полагаем, что подкрепление и массивное тело изотропны, имеют разные упругие модули и жестко между собой склеены на ∂V. Требуется в рамках геометрически линейной теории найти напряженно-деформируемое состояние неоднородного тела $V_* = V_0 \cup V_1$ под действием некоторых внешних сил, приложенных к телу V_0.

Пусть F_i — внешние массовые силы, действующие на тело V_0, а P^i — поверхностные, заданные на части границы S_σ области V_0: $\partial V_0 = S_\sigma \cup S_u$. Индексы $i, j, k, \ldots$ принимают значения 1, 2, 3 и соответствуют проекциям на оси декартовой системы координат x^i. Согласно [1], решение поставленной задачи должно удовлетворять системе уравнений и краевых условий теории упругости в областях V_0 и V_1 и условиям контакта на поверхности $\Omega = \partial V$. Они имеют вид:

в области V_0

$$\begin{gathered} \sigma^{ij}_{,j} + F^i = 0, \quad \sigma^{ij} = \lambda_0 \delta^{ij} (\delta^{kl} \varepsilon_{kl}) + 2\mu_0 \varepsilon^{ij} \\ \varepsilon_{ij} = (w_{i,j} + w_{j,i})/2, \quad \sigma^{ij} n_j |_{S_\sigma} = P^i, \quad w_i |_{S_u} = w_i^* \end{gathered} \tag{1.1}$$

в области V_1

$$\begin{gathered} p^{ij}_{,j} = 0, \quad p^{ij} = \lambda_1 \delta^{ij} (\delta^{kl} e_{kl}) + 2\mu_1 e^{ij} \\ e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad p^{ij} n_j |_{\Omega_-} = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Условия контакта выражаются следующим образом:

$$w_i |_\Omega = u_i |_\Omega, \quad (\sigma^{ij} n_j - p^{ij} n_j) |_\Omega = 0 \tag{1.3}$$

Здесь w_i, u_i — соответственно компоненты вектора перемещений точек тела в областях V_0 и V_1, ε_{ij}, e_{ij} — тензоры деформаций, σ^{ij}, p^{ij} — тензоры напряжений, λ_0, μ_0 — упругие постоянные Ламе тела V_0, λ_1, μ_1 — подкрепления V_1, n_i — векторы нормали к соответствующим поверхностям S_σ, Ω и Ω_-, Ω_- — внутренняя лицевая поверхность подкрепления. Последние условия в (1.1) означают, что на части границы массивного тела S_u заданы перемещения. Через δ^{ij} обозначены символы Кронекера, запятая в индексах означает операцию частного дифференцирования.

Сформулированная задача относится к классу так называемых контактных задач между тонкостенными элементами и массивными деформируемыми телами. Очевидно, что при исследовании таких задач должна быть учтена тонкостенность подкрепления.

2. Преобразованная задача. Наряду с исходной задачей о деформации неоднородного тела $V_0 \cup V_1$ рассмотрим задачу теории упругости только для области V_0 (1.1) с краевым условием на Ω вида

$$\begin{gathered} \sigma_j{}^i r_\alpha{}^j n_i |_\Omega = -T^\beta_{\alpha;\beta} + b_{\alpha\mu} M^{\mu\sigma}_{;\sigma}, \quad r_\alpha{}^i = \partial r^i / \partial \xi^\alpha \\ \sigma^{ij} n_i n_j |_\Omega = -M^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $x^i = r^i(\xi^\alpha)$ — уравнение поверхности Ω, n_i — вектор нормали к Ω, ξ^α — координаты на поверхности контакта. Индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ принимают значения 1, 2 и соответствуют проекциям на оси координат ξ^α. Через $b_{\alpha\beta}$ обозначим тензор второй квадратичной формы поверхности Ω, точка с запятой в индексах означает операцию ковариантного дифференцирования относительно связности на Ω. Тензоры $T^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ связаны с перемещениями точек границы массивного тела формулами

$$T^{\alpha\beta} = \partial \Phi / \partial \gamma_{\alpha\beta}, \quad M^{\alpha\beta} = -\partial \Phi / \partial \rho_{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \Phi = \mu_1 h \{ \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + \sigma (\gamma_\lambda{}^\lambda)^2 - h [\gamma^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + \sigma \gamma_\lambda{}^\lambda \rho_\lambda{}^\lambda] + \\ + {}^1/_3 h^2 [\rho^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + \sigma (\rho_\lambda{}^\lambda)^2] \}, \quad \sigma = \lambda_1 / (3\lambda_1 + 2\mu_1) \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} - b_{\alpha\beta} u, \quad \rho_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b^\lambda_{(\alpha} \gamma_{\lambda\beta)}, \quad u_\alpha = r_\alpha{}^i u_i, \quad u = u_i n^i \\ B_{\alpha\beta} = (u_{,\alpha} + b_\alpha{}^\lambda u_\lambda)_{;\beta} + b_\alpha{}^\lambda (u_{\lambda;\beta} - b_{\lambda\beta} u) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Тензоры $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ характеризуют растяжение и изгиб контактной поверхности Ω, круглые скобки в индексах означают операцию симметрирования тензора: $A_{(\alpha\beta)} =$

$= (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})/2$. Вид краевых условий (2.1)—(2.4) допускает следующую их физическую интерпретацию. Как уже отмечалось, $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ — меры растяжения и изгиба поверхности Ω, функция Φ представляет собой плотность упругой энергии подкрепления, отнесенную к единице площади контактной поверхности. Соотношения (2.2) аналогичны уравнениям состояния двумерных теорий оболочек, а краевые условия (2.1) — уравнениям равновесия. Последние выражают непрерывность напряжений в исходной контактной задаче на Ω.

Предлагается для определения напряженно-деформированного состояния неоднородного упругого тела $V_0 \cup V_1$ вместо контактной задачи (1.1)—(1.3) решать задачу (1.1), (2.1)—(2.4).

Ответ на естественный вопрос о том, насколько решения этих задач и в каких случаях различаются, дает следующее основное

Утверждение. Пусть $\check{\sigma}^0$ — поле напряжений, являющееся решением контактной задачи (1.1)—(1.3), а σ — соответственно задачи (1.1), (2.1)—(2.4) (здесь и далее полужирные буквы означают тензоры второго ранга). Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{gathered} \|\sigma^0 - \sigma\|_{L_2(V_*)} \leqslant C\mu_1\varepsilon\,(|V_0|^{1/2} + |V_1|^{1/2})(h/l + h/R)^{3/2} \\ \varepsilon = \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\rho, \quad \varepsilon_\gamma = \sup\,(\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta})^{1/2}, \quad \varepsilon_\rho = \sup h\,(\rho_{\alpha\beta}\rho^{\alpha\beta})^{1/2} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь C — постоянная, не зависящая от h, μ_1 — модуль сдвига подкрепления, ε_γ — масштаб деформаций растяжения контактной поверхности, ε_ρ — масштаб деформаций изгиба, $|V_t|$ — объем области V_t $(t = 0, 1)$. Операция sup здесь и далее берется по поверхности Ω. Характерный радиус кривизны R поверхности Ω определяется соотношением $1/R = \sup\,(b_{\alpha\beta}b^{\alpha\beta})^{1/2}$. Характерный масштаб изменения деформаций вводится формулой $l = \min\,(l_1, l_2)$, где l_1, l_2 — наилучшие постоянные в системе неравенств

$$\sup|\gamma_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \varepsilon_\gamma/l_\nu, \quad \sup h\,|\rho_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \varepsilon_\rho/l_\nu$$

Норма L_2 тензора второго ранга σ принимается следующей:

$$\|\sigma\|_{L_2(V_t)} = \Big[\int\limits_{V_t} \sigma^{ij}\sigma_{ij}d\tau_t\Big]^{1/2}$$

где $d\tau_t$ — элемент объема области V_t.

Неравенство (2.5) определяет погрешность решения преобразований задачи. Если $R \gg h$ и решение преобразований задачи таково, что $h/l \ll 1$, то оно в норме L_2 отличается от решения исходной контактной задачи членами порядка $(h/l + h/R)^{3/2}$ по сравнению с главными. Фактически сформулированное утверждение эквивалентно следующему: при $h \to 0$ решение преобразований задачи в норме L_2 стремится к решению исходной контактной задачи; тем самым устанавливается асимптотическая эквивалентность решений этих задач.

Докажем сформулированное утверждение.

3. Оценки погрешности. Погрешность решения преобразований задачи удается оценить благодаря следующей модификации тождества Прагера — Синга [2]. Зададим на Ω каким-либо образом перемещения

$$u^i|_\Omega = \varphi^i \tag{3.1}$$

и наряду с исходной контактной задачей (1.1)—(1.3) рассмотрим две задачи: первая — (1.1), (3.1), вторая (1.2), (3.1). Обозначим E_{V_*}, E_{V_0}, E_{V_1} соответственно дополнительную энергию в исходной, первой и второй задачах:

$$E_{V_0} = \int\limits_{V_0} E_0^{-1ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}d\tau_0, \quad E_{V_1} = \int\limits_{V_1} E_1^{-1ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}d\tau_1, \quad E_{V_*} = E_{V_0} + E_{V_1}$$

где E_0^{-sijkl}, E_1^{-sijkl} — тензоры упругих податливостей [3] соответственно в областях V_0 и V_1. Тогда

$$\begin{gathered} E_{V_*}[\sigma^0 - (\sigma' + \bar{\sigma})/2] = {}^1\!/_4 E_{V_0}[\sigma - \bar{\sigma}] + {}^1\!/_4 E_{V_1}[\mathbf{p} - \bar{\sigma}] + \\ + \int\limits_\Omega (p^{ij} - \sigma^{ij})\, n_j\,(w_i^\circ - \varphi_i)\, d\sigma, \ \sigma' = \{\sigma : x^i \in V_0,\ p : x^i \in V_1\} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь σ°, w_i° — решение исходной контактной задачи, σ, $\mathbf{p}$ — статически допустимые поля напряжений соответственно в первой и второй задачах, $\bar{\sigma}$ — кинематически допустимое поле в исходной задаче, согласованное с (3.1), $d\sigma$ — элемент площади поверхности Ω.

Отличие тождества (3.2) от тождества Прагера — Синга в том, что σ' не является статически допустимым полем напряжений в исходной задаче. Таким оно станет, если на Ω выполняется условие $(p^{ij} - \sigma^{ij})\, n_j = 0$; тогда (3.2) превращается в тождество Прагера — Синга.

Так как $E(\sigma)$ — положительно определенная квадратичная форма на пространстве всевозможных напряженных состояний упругого тела, то $E^{1/2}$ можно отождествить с нормой L_2. Тогда поле напряжений $(\sigma' + \bar{\sigma})/2$ можно рассматривать как приближение решения исходной задачи в норме L_2, если удается построить поля $\bar{\sigma}$, σ, $\mathbf{p}$, так, что правая часть (3.2) мала.

Проведем указанную процедуру для оценки погрешности решения преобразований задачи.

Пусть w_i^*, σ_{ij}^*, ε_{ij}^* — решения преобразованной задачи. Перемещения на Ω зададим в виде (3.1), где $\varphi_i = w_i^*$. В качестве статически и кинематически допустимых полей напряжений в первой задаче выберем решение преобразованной задачи σ_{ij}^*: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$ $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^*$ в области V_0. Тогда первое слагаемое правой части неравенства (3.2) обращается в нуль.

Для построения статически и кинематически допустимых полей напряжений в задаче 2 введем криволинейную систему координат в области V_1 по формулам

$$x^i(\xi^\alpha, \xi) = r^i(\xi^\alpha) + \xi n^i(\xi^\alpha) \tag{3.3}$$

Уравнение равновесия в (1.2) путем замены искомых функций

$$s^{\alpha\beta} = (a_\nu{}^\beta - \xi b_\gamma{}^\beta)\, p^{\alpha\nu}\varkappa, \quad s^{\alpha 3} = p^{\alpha 3}\varkappa, \quad \varkappa = 1 - 2\xi H + \xi^2 K \tag{3.4}$$

можно [2] преобразовать к виду:

$$\begin{gathered} s^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta} - b_\beta{}^\alpha s^{\beta 3} + s^{3\alpha}{}_{,\,\xi} = 0, \quad s^{\alpha 3} - \xi b_\beta{}^\alpha s^{\beta 3} = s^{3\alpha} \\ s^{\alpha 3}{}_{;\,\alpha} + b_{\alpha\beta} s^{\alpha\beta} + s^{33}{}_{,\,\xi} = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Индексы $a, b, c, \ldots$ принимают значения 1, 2, 3 и соответствуют проекциям на оси координат $\{\xi^\alpha, \xi\}$, $a_{\alpha\beta}$ — первая квадратичная форма поверхности Ω, H — средняя, K — ее гауссова кривизна. Как и ранее, запятая в индексах означает частное дифференцирование, точка с запятой — ковариантное дифференцирование относительно связности на Ω.

Задавая каким-либо образом $s^{\alpha\beta}$, (3.5) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $s^{\alpha 3}$, s^{33}. Краевое условие в (1.2) в терминах сделанной замены искомых функций имеет вид

$$\xi = -h, \quad s^{3\alpha} = 0, \quad s^{33} = 0 \tag{3.6}$$

Примем $s^{\alpha\beta}$ в виде

$$s^{\alpha\beta} = h^{-1}(4T^{*\alpha\beta} + 6h^{-1}M^{*\alpha\beta}) + 12h^{-3}(M^{*\alpha\beta} + {}^1/{}_2 hT^{*\alpha\beta})\,\xi \tag{3.7}$$

Ясно, что решение задачи (3.5), (3.6) относительно $s^{\alpha 3}$, s^{33} существует. Выписав его в явном виде, можно убедиться, что искомые функции — величины порядка $\mu_1\varepsilon\,(h/l + h/R)$. Их значение при $\xi = 0$, т. е. на контактной поверхности Ω, получим, интегрируя уравнения (3.5) по ξ от $-h$ до 0. Так как справедливы условия (3.6), получим

$$\begin{gathered} \xi = 0, \quad -s^{3\alpha} = -b_\beta{}^\alpha N^{*\beta} + T^{*\alpha\beta}{}_{;\,\beta}, \quad -s^{33} = N^{*\alpha}{}_{;\,\alpha} + b_{\alpha\beta}T^{*\alpha\beta} \\ N^{*\alpha} = M^{*\alpha\beta}{}_{;\,\beta} \end{gathered}$$

Последнее соотношение получается путем интегрирования первого уравнения (3.5), умноженного на ξ, по ξ от $-h$ до 0. Это окончательно дает

$$\xi = 0, \quad s^{3\alpha} = -T^{*\alpha\beta}{}_{;\,\beta} + b_\nu{}^\alpha M^{*\nu\sigma}{}_{;\,\sigma}, \quad s^{33} = -M^{*\alpha\beta}{}_{;\,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}T^{*\alpha\beta} \tag{3.8}$$

Кинематически допустимые поля напряжений в задаче 2 будем строить, пользуясь следующим представлением поля перемещений точек области V_1:

$$u^i(\xi^\alpha, \xi) = \varphi^i(\xi^\alpha) - \xi r_\nu{}^i a^{\nu\alpha} n_j \varphi^j{}_{,\,\alpha} + hy^i(\xi^\alpha, \xi) \tag{3.9}$$

Это позволяет записать компоненты тензора деформации e_{ab} в криволинейной системе координат $\{\xi^\alpha, \xi\}$ в виде

$$\begin{gathered}
e_{\alpha\beta} = \gamma^*_{\alpha\beta} - \xi B^*_{\alpha\beta} + h\,(y_{(\alpha;\,\beta)} - b_{\alpha\beta} y) + h b^{\nu}_{(\alpha}\,(y_{\nu;\,\beta)} - b_{\nu\beta)} y) + \xi^2 b^{\lambda}_{(\alpha} B_{\lambda\beta)} \\
e_{\alpha 3} = h y_{\alpha,\,\xi} + h y_{,\alpha} + h b_{\alpha}{}^{\lambda} y_{\lambda} - h^2 b_{\alpha}{}^{\lambda} y_{\lambda,\,\xi}, \qquad e_{33} = h y_{,\,\xi} \\
y = y_i n^i, \qquad y_\alpha = r_\alpha{}^i y_i
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Кинематически допустимое поле перемещений $\bar{s}^{ab}$ вычисляется по (3.10) в соответствии с законом Гука и формулами (3.4).

Возьмем y_α, y в виде

$$y_\alpha \equiv 0, \quad y = -\sigma\gamma^{*\lambda}_{\lambda} + h^{-1}\sigma/2 B^{*\lambda}_{\lambda}\,(\xi^2 - h^2/12) \tag{3.11}$$

Тогда $\bar{s}^{\alpha 3}$ и $\bar{s}^{33}$, что следует из (3.10), будут величинами порядка $\mu_1\varepsilon\,(h/l + h/R)$. Аналогичное справедливо для разности $s^{\alpha\beta} - \bar{s}^{\alpha\beta}$ в силу (3.10) и уравнений состояния (2.2), (2.3). Таким образом в области V_1 построены статически допустимое поле s^{ab} (3.7) и кинематически допустимое поле $\bar{s}^{ab}$, соответствующее (3.9), (3.11), поточечная разность между которыми — величина порядка $\mu_1\varepsilon\,(h/l + h/R)$. Это позволяет записать

$$[E_{V_1}(p - \bar{\sigma})]^{1/2} \leqslant C'\mu_1\varepsilon\,|V_1|^{1/2}\,(h/l + h/R) \tag{3.12}$$

Остается сравнить значения статически допустимых полей σ и p на Ω. Так как, а это следует из (3.4), на Ω

$$p^{ij} n_i n_j = s_{33}, \quad p^{ij} n_j r_{i\alpha} = s_{3\alpha}$$

то из (3.8) и краевого условия (2.1) для преобразованной задачи получим, что $(\sigma^{ij} - p^{ij})\,n_j = 0$. Это обращает в нуль третье слагаемое правой части тождества (3.2). Таким образом, получаем

$$\|\sigma^\circ - (\sigma' + \bar{\sigma})/2\|_{L_2(V_*)} \leqslant C\mu_1\varepsilon\,|V_1|^{1/2}(h/l + h/R) \tag{3.13}$$

Справедливо соотношение $|V_\delta|^{1/2} \sim hL^{-1}\,|V_0|^{1/2}$, где L — характерный размер полости, и $L \gg R$, $L \gg l$. Тогда из (3.13) тривиально следует (2.5).

Замечания. 1°. В п. 1 отмечалось, что рассмотренная задача относится к классу контактных задач массивных деформируемых тел с тонкостенными элементами. Им посвящена обширная литература, библиография по которой достаточно полно представлена [3, 4]. Идея использования тонкостенности подкрепляющих элементов в плане приближенного их расчета по теории стержней и оболочек не нова. Она неоднократно применялась как в задачах теории оболочек с ребрами жесткости, с подкрепленными краями и отверстиями, например [5—7], так и в задачах о контакте массивных деформируемых тел с тонкостенными элементами [3, 4, 8]. Общие соображения по вариационному подходу к этой проблеме даны в [9].

2°. Центральное место данной работы — получение оценок погрешности решения преобразованной задачи по сравнению с исходной контактной. При этом важно отличать погрешность решения от погрешности самих уравнений преобразованной задачи. Последняя определяется как относительная величина отбрасываемых малых членов в соотношениях (1.1)—(1.3) при переходе к задаче (1.1), (2.1)—(2.4). Именно о погрешности уравнений идет речь в [3], когда обсуждается уровень точности прикладных уравнений для тонких покрытий. Модификация (3.2) тождества Прагера — Синга была получена [1)] в связи с обоснованием основных гипотез и соотношений двумерных теорий оболочек.

3°. Можно проверить, что преобразованная задача допускает вариационную формулировку. Функционал Лагранжа для нее имеет вид

$$I(w^i) = \int\limits_{V_0} U d\tau_0 - \int\limits_{S_\sigma} P_i w^i d\sigma - \int\limits_{V_0} F_i w^i d\tau_0 + \int\limits_{\Omega} \Phi d\omega$$

где U — плотность упругой энергии массивного тела, $d\tau_0$ — элемент объема области V_0; $d\sigma$, $d\omega$ — элементы площадей соответственно поверхностей S_σ и Ω. Это позволяет применять хорошо разработанные вариационно-разностные методы для численного исследования широкого класса задач.

[1)] *Мисюра В. А.* Эффект потери точности классической теории оболочек: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1983. 115 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. *Prager W., Synge J. L.* Approximations in elastisity based on the consept of function space // Q. Appl. Math. 1947. V. 5. № 3. P. 241—269.
3. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
4. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
5. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: ЛГУ, 1964. 395 с.
6. *Савин Г. Н., Тульчий В. И.* Пластинки, подкрепленные стальными кольцами и упругими площадками. Киев: Наук. думка, 1971. 268 с.
7. *Гузь А. Н., Луговой П. З., Шульга Н. А.* Конические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев: Наук. думка, 1976. 162 с.
8. *Власов В. З., Леонтьев Н. И.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
9. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: ЛГУ, 1978. 223 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 14.IV.1988

УДК 539.3

А. Н. Гузь, Ю. Н. Лапуста

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛОКНА В УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуются свойства бесконечного характеристического определителя в трехмерной линеаризированной задаче [1] устойчивости волокна в упругой полубесконечной матрице вблизи свободной поверхности. Доказывается, как и в случае двух, ряда, двоякопериодической системы волокон в бесконечной матрице [2—4], что указанный определитель является определителем нормального типа. Рассматриваются нелинейно-упругие трансверсально-изотропные сжимаемые материалы без учета конкретной формы упругого потенциала в рамках теории конечных докритических деформаций. Изложенные результаты справедливы и для различных вариантов теории малых докритических деформаций. Используются результаты анализа родственных вопросов теории дифракции упругих волн [5].

. Постановка задачи. Характеристическое уравнение. Рассмотрим устойчивость волокна в полубесконечной матрице вблизи свободной поверхности. Введем следующие основные допущения: 1) объемные силы отсутствуют и рассматриваемое полубесконечное тело загружено «мертвыми» сжимающими усилиями вдоль оси волокна таким образом, что укорочения волокна и матрицы в этом направлении равны; 2) между волокном и матрицей осуществлен жесткий контакт; 3) плоская поверхность матрицы свободна от усилий; 4) докритическое состояние однородное (данное допущение обосновано результатами работы [6]).

Вследствие предположения 1) выполнены достаточные условия применимости статического метода (метода Эйлера) к исследованию рассматриваемой задачи устойчивости. Поэтому данную задачу будем решать методом Эйлера.

Волокно и матрицу отнесем к лагранжевым координатам, совпадающим до деформации с прямоугольной (x, y, z) и цилиндрической (r, θ, x_3) системами координат. Связь между этими системами координат опишем соотношениями

$$x = -r\sin\theta,\ y = h - r\cos\theta,\ z = x_3 \qquad (1.1)$$

Пусть волокно и матрица занимают соответственно области

$$D^{(1)} = \{(r, \theta, x_3) \in \mathbf{R}^+ \times \Pi \times \mathbf{R} : r \leqslant R\},\ D = \{(r, \theta, x_3) \in$$
$$\in \mathbf{R}^+ \times \Pi \times \mathbf{R} : r \geqslant R,\ r\cos\theta \leqslant h\};\ \mathbf{R}^+ = [0, \infty),\ \Pi = [0, 2\pi),\ \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$$