

1. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
2. Wang K. C. On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt 2. P. 397—404.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
4. Бесов О. В., Ильин В. В., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
5. Титов О. В. О некоторых свойствах уравнений пространственного пограничного слоя // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 369—371.

Москва

Поступила в редакцию
1.VIII.1988

УДК 532.593 : 533.6.011.72

Н. А. Белов

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ В НЕКОТОРЫХ ИДЕАЛЬНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

Рассматривается известная автомодельная задача о сильном взрыве в идеальной сжимаемой среде, обладающей некоторым произволом в виде внутренней энергии. Постановка этой задачи была дана Л. И. Седовым. Существование двух первых интегралов сводит задачу к исследованию интегрируемости одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

В работе показано, что даже в простейшем случае плоской симметрии задачи это уравнение приводится в общем случае к неинтегрируемому в квадратурах уравнению Абеля с функциональными коэффициентами. Найден частный случай его интегрируемости, позволивший выписать аналитические решения задачи для некоторого семейства сред, включающего совершенный и запыленный (в предположении о равновесии параметров фаз) газы. Этот результат обобщает полученные ранее результаты [1—4]. Все найденные решения продолжимы до плоскости симметрии, исследовано их асимптотическое поведение вблизи нее.

Для того же семейства сред проведен численный анализ задачи в цилиндрическом и сферическом случаях. Для дисперсных сред типа пузырьковой жидкости или запыленного газа (численно исследованного ранее [5, 6]) обнаружено два новых эффекта: немонотонность скорости за ударной волной и эффект несжимаемости при достаточно малом содержании газа в смеси. В сферическом случае предельным решением задачи при уменьшении содержания газа является известное решение задачи о сильном взрыве в несжимаемой жидкости.

1. Изложим кратко постановку задачи (подробнее см. [1, 2]). Пусть плотность внутренней энергии имеет вид

$$e(p, \rho) = p\varphi(g)/\rho_0, \quad g = \rho/\rho_0 \quad (1.1)$$

здесь p и ρ — давление и плотность, φ — произвольная функция), тогда задача автомодельна (две независимые размерные константы — энергия взрыва и ρ_0 — постоянная с размерностью плотности), и безразмерные плотность g , скорость $f = v/x_s'$ и давление $h = p/(\rho_0 x_s'^2)$ удовлетворяют системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, полученных из уравнений неразрывности, движения и сохранения энтропии в частице:

$$(\lambda - f) g'/g - f' - (v - 1) f/\lambda = 0, \quad h' - (\lambda - f) g f' - 1/2 v f g = 0 \quad (1.2)$$

$$(\lambda - f) (h'/h - g' d \ln \chi/dg) + v = 0; \quad \chi(g) = \varphi^{-1} \exp \int (g^2 \varphi)^{-1} dg$$

где $\lambda = x/x_s$ — безразмерная координата (штрих означает дифференцирование по λ); параметр v равен 1, 2, 3 для плоской, цилиндрической, сферической симметрии; x_s и x_s' — координата и скорость (предполагаемой) сильной ударной волны. Из сообра-

жений размерности следует, что $x_s \sim t^{2/(v+2)}$, t — время, и это использовалось в (1.2). Граничными условиями для системы (1.2) служат соотношения на сильной ударной волне ($\lambda = 1$)

$$f_s = 1 - g_1/g_s, \quad h_s = g_1 f_s, \quad 2g_1 \varphi(g_s) = 1 - g_1/g_s \quad (1.3)$$

g_1 — начальная плотность среды, индексом s помечаются значения переменных на волне. Последнее соотношение в (1.3) нужно рассматривать как уравнение относительно g_s (причем, поскольку его правая часть должна быть положительной, должно выполняться и условие $0 < \varphi(g_s) < 1/(2g_1)$).

Чтобы решение было физическим, потребуем также выполнения условия отсутствия источников в центре симметрии (взрыва)

$$f(0) = 0 \quad (1.4)$$

Если отвлечься от определения размерных характеристик течения, краевая задача (1.2)—(1.4) представляет собой математическую постановку задачи о сильном взрыве в среде с внутренней энергией вида (1.1).

Существование двух алгебраических первых интегралов системы (1.2) — адиабатичности и энергии:

$$h\chi^{-1}g(\lambda - f)\lambda^{v-1} = C_a \quad (1.5)$$

$$[hf - g(\lambda - f)(1/2f^2 + h\varphi)]\lambda^{v-1} = C_e \quad (1.6)$$

(где C_a и C_e определяются из (1.3); $C_e = 0$, $\forall \varphi$) позволяет упростить исследование задачи о сильном взрыве и перейти к рассмотрению задачи Коши для одного уравнения первого порядка в переменных g и $F = f/\lambda$

$$\begin{aligned} d \ln g/dF = g\varphi(F-1)^{-1} \{F[(v-1)F+1] + g\varphi(F-1)[(v-1)F+ \\ + 1 - 1/2v]\} \{g^2\varphi^2(F-1)(F-1-1/2v) + g\varphi F(F-1-v) + \\ + 1/2vF^2(1-g^2d\varphi/dg)\}^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$F_s = 1 - g_1/g_s, \quad 2g_1\varphi(g_s) = 1 - g_1/g_s \quad (1.8)$$

Условие (1.4) проверяется после нахождения решения задачи (1.7), (1.8). Уравнение (1.7), рассматриваемое относительно неизвестной $g\varphi$ при заданной функции $F(g)$, является уравнением Риккати и может быть проинтегрировано в квадратурах от $F(g)$, и это вместе с использованием первых интегралов дает возможность описать (см. [1]) некоторые общие свойства поведения решения задачи с произвольной функцией $\varphi(g)$. Вопрос о прямом интегрировании (1.7) остается при этом открытым.

2. Для исследования интегрируемости уравнения (1.7) приведем его к более удобному виду. Пусть

$$u = 1/(g\varphi), \quad w = 1/F - 1 \quad (2.1)$$

тогда задачу (1.7), (1.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \{2u(w+v) - w[v + (2-v)w]\} w^{-1}(w+1)^{-1} dw = vdu + \{vu^2 - u[v + \\ + 2(v+1)w] + w[v + (2+v)w]\} d \ln g \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w_s = u_s/2, \quad u_s \equiv u(g_s) = 2g_1/(g_s - g_1) \quad (2.3)$$

Знание частных решений уравнения (2.2) позволяет заключить: решение задачи (2.2), (2.3) должно находиться в «стакане»: $g \geq 0$, $0 \leq w \leq u(g)$.

Предположим теперь, что g, w, u — независимые переменные. Тогда (2.2) — уравнение Пфаффа не вполне интегрируемого типа (об уравнениях Пфаффа см., например, [7]). Одномерные интегральные многообразия этого уравнения в пространстве g, w, u описываются системой алгебраических уравнений

$$(u-w)(w+1)^{2(v-1)/v} = w^2\theta(g), \quad u-1 - (1+2/v)w = -d \ln \theta/d \ln g \quad (2.4)$$

где θ — произвольная функция от g (можно сказать, что система (2.4) представляет собой общее «параметрическое» решение уравнения (2.2) с параметром $\theta(g)$).

В случае плоской симметрии ($v = 1$) система (2.4) имеет самый простой вид. Исключением w из (2.4) можно получить дифференциальное уравнение относительно θ при заданной функции $u(g)$. Если же вместо θ взять

$$Y = (1 + 4u\theta)^{-1/2}. \quad (2.5)$$

то переменная Y будет удовлетворять уравнению Абеля

$$dY/d\tau + Y(1 - Y)[(\alpha + \beta)Y + \alpha] = 0 \quad (2.6)$$

$$\tau = \ln g, \quad 2\alpha = d \ln u/d\tau + 1 - u, \quad \beta = 3u \quad (2.7)$$

Полученная из (2.5) и первого соотношения (2.4) формула

$$w = 2uY/(1 + Y) \quad (2.8)$$

позволяет переформулировать условия (2.3)

$$Y_s = 1/3, \quad u(g_s) = 2g_1/(g_s - g_1) \quad (2.9)$$

Два тривиальных решения уравнения (2.6): $Y \equiv 0$, $Y \equiv 1$ — не удовлетворяют первому из условий (2.9). Если для заданной функции $u(g)$ (или $\varphi(g)$ — см. (2.1)) удастся найти решение задачи (2.6), (2.9) в виде $g = g(Y)$, $Y \in (0; 1)$, то можно получить и параметрические зависимости λ , h , f от Y

$$\begin{aligned} \lambda^3 &= 2C_a \chi \varphi^2 (1 - Y)Y^{-2} (1 + Y)^{-2} [1 + (1 + 2/(g\varphi))Y]^3 \\ h &= \lambda^2 \varphi^{-1} Y (1 - Y)^{-1} (1 + Y)^2 [1 + (1 + 2/(g\varphi))Y]^{-2} \\ f &= \lambda (1 + Y) [1 + (1 + 2/(g\varphi))Y]^{-1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

исходя из интегралов (1.5), (1.6) и формул $f = \lambda F$, (2.1), (2.8).

3. Легко увидеть простой случай интегрируемости уравнения (2.6).

Пусть

$$\alpha = k\beta, \quad k = \text{const} \quad (3.1)$$

Ясно, что переменные в (2.6) в этом случае разделяются. В силу (2.7) соотношение (3.1) (являющееся дифференциальным уравнением Бернулли) определяет множество функций

$$u = (a + bg)^{-1}, \quad a = 6k + 1, \quad b = \text{const} \quad (3.2)$$

для которых возможно интегрирование уравнения (2.6).

Решение задачи (2.6), (2.9) для функций (3.2) зависит от постоянных a , b и g_1 , но, не теряя общности рассуждений, в данном случае можно положить $g_1 = 1$. Решение с ударной волной задачи о сильном взрыве может существовать (см. (1.3)) лишь при выполнении условий

$$g_s > 1, \quad u(g) > 0 \quad (3.3)$$

на решении, накладывающих ограничения на значения a и b . Ниже будут рассматриваться только допустимые условиями (3.3) области параметров a и b . Рассмотрим сначала случай $a = 0$, тогда $u = (bg)^{-1}$ или $\varphi = b$. Задача о сильном взрыве в такой среде ранее исследовалась численно для $\nu = 3$ [1]. Решение задачи (2.6), (2.9), имеющее вид

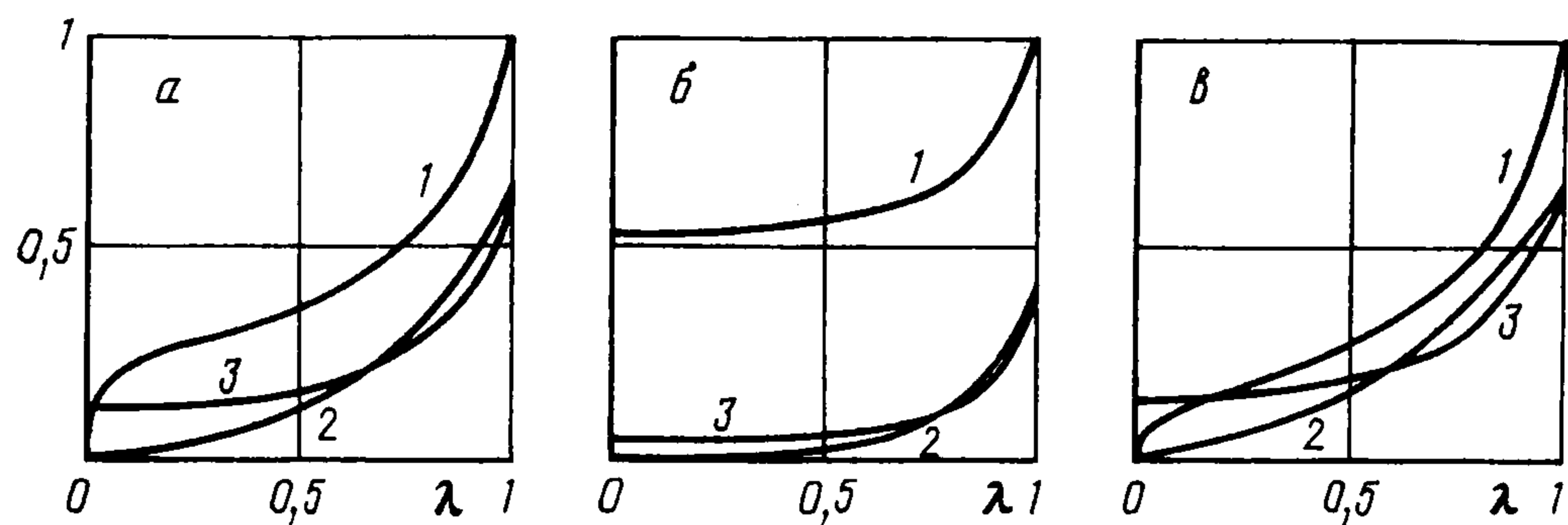
$$\frac{1}{g} = 1 - 2b - \frac{b}{2} \ln \frac{(1 - Y)(2Y)^4}{(5Y - 1)^5} \quad (3.4)$$

при значениях параметра Y , лежащих в полуинтервале $[1/3; 1)$, дает вместе с (2.10) точное параметрическое решение задачи о сильном взрыве при $\nu = 1$. Из условий (3.3) следует, что $0 < b < 1/2$. Решение (3.4), (2.10) продолжимо до плоскости симметрии ($Y = 1$) и в ее окрестности ведет себя следующим образом: $\lambda \sim -\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon$, $g \sim -(\ln \varepsilon)^{-1}$, $h \sim 1$, $f \sim \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \equiv 1 - Y \ll 1$. Продолжимость решения означает выполнение условия (1.4).

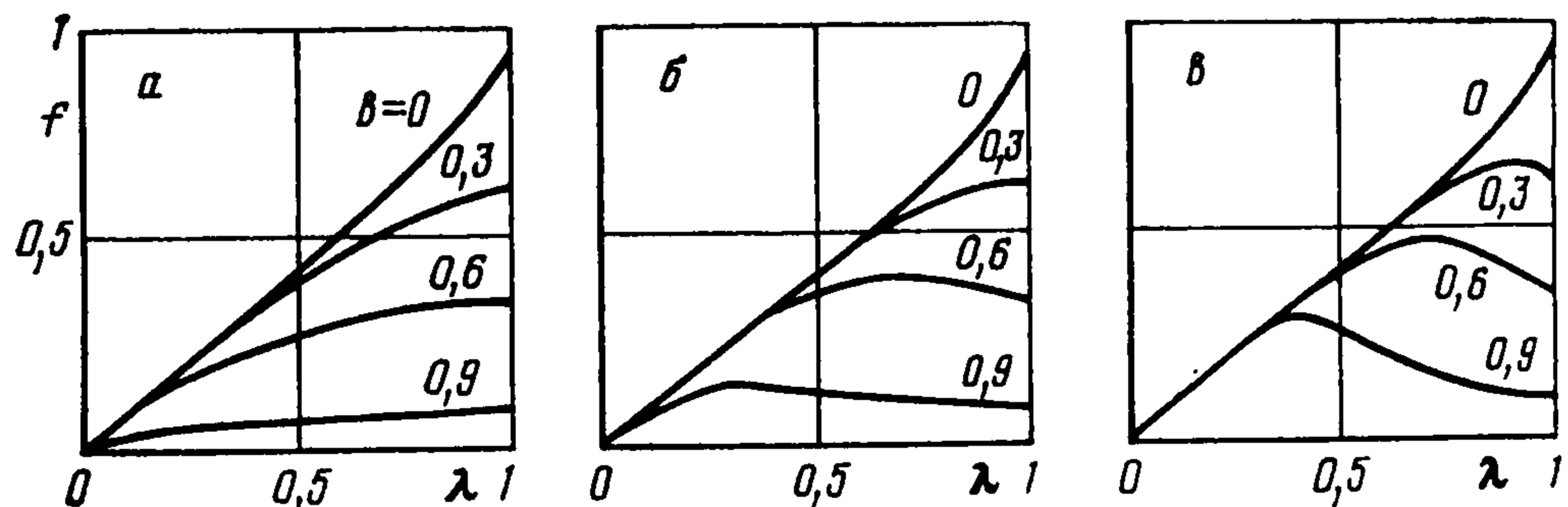
При рассмотрении случая $a \neq 0$ удобно ввести новые постоянные: $\gamma = 1 + 1/a$ и $B = -b/a$, тогда $u = (\gamma - 1)/(1 - Bg)$ или $g\varphi = (1 - Bg)/(\gamma - 1)$. Из условий (3.3) и общего свойства решений для произвольных $\varphi(g)$ [1], заключающегося в том, что плотность за ударной волной не может везде быть больше начальной, следует необходимость рассмотрения лишь двух областей параметров γ и B : либо $\gamma > 1$ и $(1 - \gamma)/2 < B < 1$, либо $\gamma < -1$ и $1 < B < (1 - \gamma)/2$. Пусть

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)(1 - B)} (2Y)^{2/(\gamma - 2)} (1 - Y)^{1/(2\gamma - 1)} \left[\frac{5\gamma - 4}{\gamma + 1} Y + \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1} \right]^\Gamma, & |\gamma| > 1, \quad \gamma \neq 2 \\ \frac{3}{1 - B} (2Y)^{-1/3} (1 - Y)^{1/3} \exp [1/(3Y) - 1], & \gamma = 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

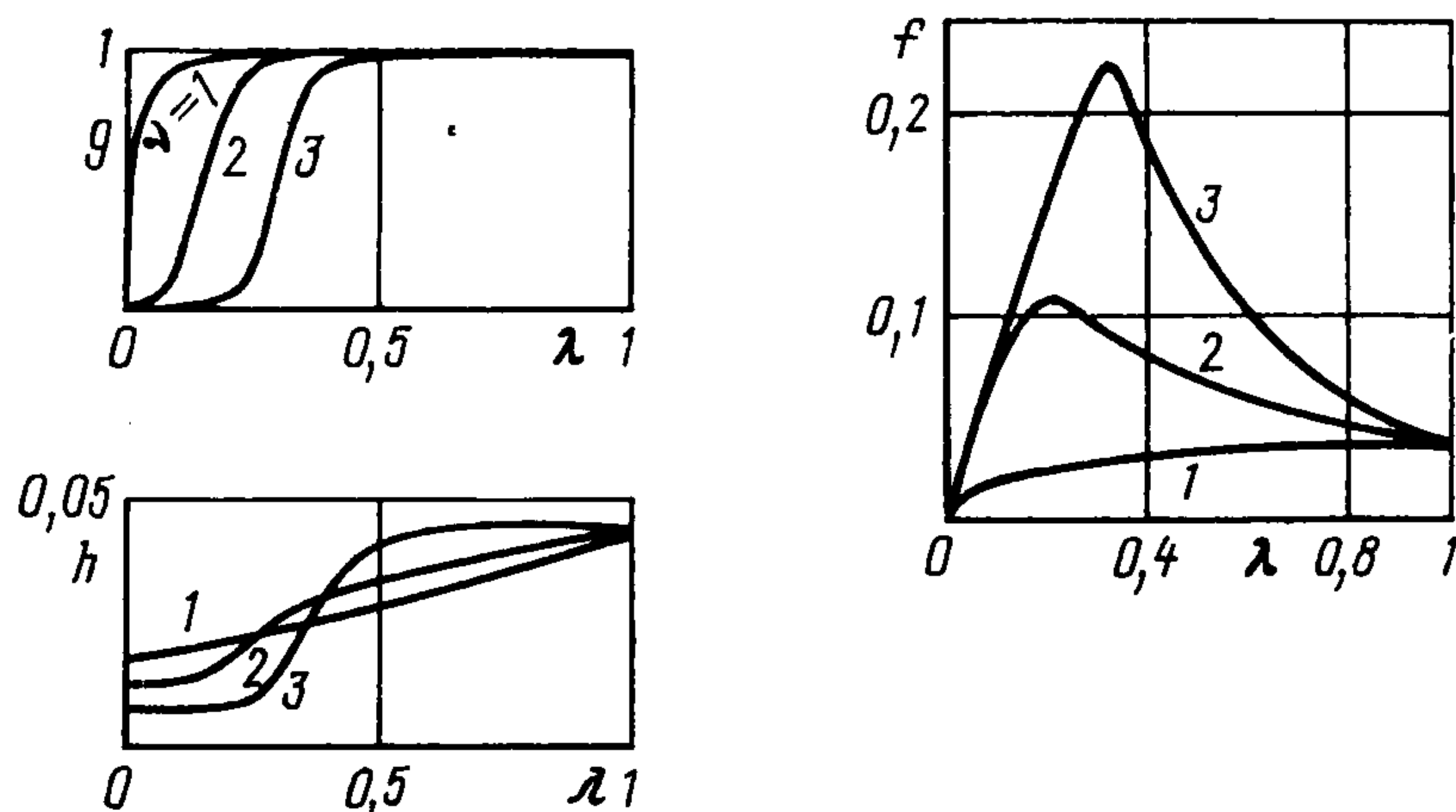
($\Gamma = (4 - 5\gamma)/[(\gamma - 2)(2\gamma - 1)]$).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение задачи (2.6), (2.9), имеющее вид

$$g = \Phi (1 + B\Phi)^{-1} \quad (3.6)$$

при $Y \in [1/3; 1)$ дает вместе с (2.10) точное параметрическое решение задачи о сильном взрыве для $|\gamma| > 1$ при $\nu = 1$, продолжимое до плоскости симметрии. Асимптотическое поведение решения в окрестности плоскости симметрии для $\gamma > 1$ совпадает с известным поведением решения для совершенного газа при $\nu = 1$: (параметр Y можно исключить) $g \sim \lambda^{1/(\gamma-1)}$, $h \sim 1$, $f \sim \lambda$ при $\lambda \ll 1$; а для $\gamma < -1$ $g \sim 1$, $h \sim 1$, $f \sim \sim \lambda^{(\gamma-1)/\gamma}$, причем плотность g при $\lambda = 0$ равна $1/B$.

Замечания. 1°. Внутренняя энергия двухфазной дисперсной среды, в которой одна фаза несжимаема, а вторая — совершенный газ, при условии равновесия фаз по скоростям и температурам задается функцией $g\phi = (1 - Bg)/(\gamma - 1)$, где $\gamma > 1$ — эффективный показатель адиабаты (меньший, чем у газа), B — постоянная, равная при $g_1 = 1$ объемной доле несжимаемой фазы перед ударной волной ($0 < B < 1$). Примерами таких сред, которые для краткости будем называть просто дисперсными, могут служить запыленный газ, смесь газа с капельками жидкости, пузырьковая жидкость.

Была сделана попытка [3] решить задачу о сильном взрыве в такой дисперсной среде (при $0 < B < 1$) при помощи преобразований переменных, исходя из известного решения [2] для совершенного газа ($B = 0$). Предложенные [3] преобразования оказались точными лишь в случае $\nu = 1$.

Выше для $\nu = 1$ было приведено (полученное другим способом) параметрическое решение для дисперсных сред, а также три других решения ($\gamma > 1$ и $(1 - \gamma)/2 < < B < 0$; $\gamma < -1$ и $1 < B < (1 - \gamma)/2$; $\phi \equiv b$ при $0 < b < 1/2$), когда параметры γ и B не несут конкретного физического смысла.

2°. Полученные результаты позволяют точно решать задачу о сильном взрыве на плоской границе двух разных идеальных сжимаемых сред, для каждой из которых известно точное решение. Распределение энергии взрыва между двумя полупространствами находится из условия равенства (размерных) давлений на границе раздела сред.

Ранее было известно лишь одно точное решение — для задачи со взрывом на границе двух совершенных газов (подробнее о подобных задачах см. [8], гл. 5).

4. На фиг. 1—3 представлены иллюстрации полученных выше точных решений, а также некоторые результаты численного решения методом Рунге — Кутты задачи (1.2)—(1.4) при всех значениях ν для функций $\varphi = b$ и $g\varphi = (1 - Bg)/(\gamma - 1)$.

Иллюстрация точных решений при $\nu = 1$ для сред, не являющихся дисперсными, дана на фиг. 1 в виде графиков зависимостей g/g_s (кривая 1), f (2), h (3) от λ при $b = 0,3$ (а); $\gamma = -2$ и $B = 1,2$ (б); $\gamma = 5$ и $B = -1$ (в). Численный расчет этих же вариантов при $\nu = 2; 3$ показал лишь незначительную деформацию графиков, но в варианте б при $\nu = 3$ образуется полость с ненулевой плотностью ($h(\lambda) = 0$ при $\lambda \leq 0,17$).

Модель дисперсных сред еще до публикации [3] численно исследовалась при $\nu = 1$ [5] и $\nu = 2$ [6]. Поэтому ниже предлагаются лишь те результаты численного анализа, которые не освещались в упомянутых работах.

На фиг. 2 для $\gamma = 1,3$ представлены графики зависимостей $f(\lambda)$ при $\nu = 1$ (а), $\nu = 2$ (б), $\nu = 3$ (в) с разными значениями B (0; 0,3; 0,6; 0,9). Видна немонотонность функции $f(\lambda)$ при $\nu = 2; 3$ для $B > B_*$ ($B_* \approx 0,2$ при $\nu = 3$; $B_* \approx 0,3$ при $\nu = 2$), причем в случае сферической симметрии это свойство выражено сильнее. Свойство немонотонности $f(\lambda)$ не было обнаружено в [6], так как в этой работе $B \leq 0,04$.

При значениях B , близких к единице, дисперсная среда ведет себя как несжимаемая. Этот эффект продемонстрирован для $\gamma = 1,3$ и $B = 0,95$ на фиг. 3, где приведены графики зависимости g, f, h от λ при $\nu = 1; 2; 3$. Заметим, что в цилиндрическом и сферическом случаях образование участков почти постоянной плотности возможно лишь при достаточно сильной немонотонности скорости. Можно показать [1], что при $\nu = 3$ предельным решением ($B = 1$) для дисперсных сред будет известное решение [2] для несжимаемой жидкости с расширяющейся из центра взрыва полостью (каверной).

Автор благодарит В. П. Коробейникова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. 332 с.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
3. Кудинов В. М., Паламарчук Б. И., Вахненко В. А. Затухание сильной ударной волны в двухфазной среде // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1080—1083.
4. Сидоркина С. И. О некоторых движениях аэрозоля // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 3. С. 398—399.
5. Pai S. I., Menon S., Fan Z. Q. Similarity solutions of a strong shock wave propagation in a mixture of a gas and dusty particles // Intern. J. Engng. Sci. 1980. V. 18. No. 12. P. 1365—1373.
6. Higashino F., Suzuki T. The effect of particles in blast waves in a dusty gas // Z. Naturforsch. 1980. Bd. 35a. H. 12. S. 1330—1336.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
8. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VI.1988

УДК 539.3

В. А. Мисюра

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается контактная задача взаимодействия массивного тела, содержащего полости, с упругими оболочечными подкреплениями этих полостей. Она заменяется некоторой другой только для массивного тела с неклассическими краевыми условиями на границах полостей, которые асимптотически точно описывают взаимодействие в исходной контактной задаче. Строятся оценки погрешности такой замены в норме L_2 .