Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 532.526

О. В. Титов

О ЗОНАХ ВЛИЯНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассматривается модельная нелинейная система уравнений, отличающаяся от системы уравнений пространственного пограничного слоя несжимаемой жидкости лишь тем, что в уравнениях движения вместо составляющей v вектора скорости по нормали к телу берется ε-усреднение этой функции в некоторой области диаметром не более чем 2ε по пространственным координатам. Поскольку пределом усреднения при $\varepsilon \to 0$ является функция v, можно надеяться, что при достаточно малых ε решение исследуемой системы уравнений будет сколь угодно мало отличаться от решения системы уравнений пространственного пограничного слоя (вопрос о сходимости к этому решению не исследуется).

Показано, что при отрицательных компонентах градиента давления и при условии прилипания или отсоса на поверхности тела исследуемая модельная система уравнений при любых $\varepsilon > 0$ обладает не более чем одним решением и действительно имеет зоны влияния и зависимости, которые без должного математического обоснования приписываются погранслойным течениям на основании физических соображений или расчетов [1, 2]. Кроме того, приводится не зависящая от ε явная оценка расположения указанных зон в зависимости от начальных и граничных возмущений течения.

1. Постановка задачи. Пусть $G \subset \mathbf{R}^4(x, y, z, t)$ — область, определяемая условиями $0 < x < X$, $0 < y < Y$, $0 < z < Z$, $0 < t < T$. Рассмотрим в G систему уравнений с граничными условиями

$$\begin{gathered}\nu u_{yy} - uu_x - vu_y - wu_z - u_t = p_x/\rho \\ \nu w_{yy} - uw_x - vw_y - ww_z - w_t = p_z/\rho \\ u_x + v_y + w_z = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}u = w = 0, \quad v = V(x, z, t) \text{ при } y = 0 \\ u = U, \quad w = W\end{gathered} \tag{1.2}$$

на $\partial G \cap [\{x = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \{y = Y\}]$, причем $U > 0$, $W > 0$ при $y > 0$ $\partial U/\partial y > 0$, $\partial W/\partial y > 0$ при $y > 0$. Функции p_x/ρ, p_z/ρ считаются заданными и отрицательными; согласования $p/\rho + (U^2 + W^2)/2 = \text{const}$ во внешнем потоке, вообще говоря, не предполагается.

Система уравнений (1.1) является классической системой уравнений ламинарного пространственного пограничного слоя (например, [3]) с условиями прилипания или отсоса на поверхности тела. Физические координаты x, y, z выбраны так, что оси X и Z расположены параллельно, а ось Y — перпендикулярно к поверхности обтекаемого тела; u, v, w — компоненты вектора скорости вдоль осей X, Y и Z соответственно. В дальнейшем использованы следующие обозначения: $r = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3(x, y, z)$ — точка в трехмерном пространстве, $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $dr = dxdydz$ — элемент объема в $\mathbf{R}^3(x, y, z)$, $dV = dxdydzdt$ — элемент объема в $\mathbf{R}^4(x, y, z, t)$, $B(r; a)$ — шар радиуса a в $\mathbf{R}^3(x, y, z)$ с центром в точке r, $G(x, y, z) =]0; X[\times]0; Y[\times]0; Z[\subset \mathbf{R}^3(x, y, z)$ $(z \to t,\ Z \to T;\ x, y, z \to y, z, t;\ X, Y, Z \to Y, Z, T)$.

Для модификации системы уравнений (1.1) введем операцию усреднения. Пусть $\omega(x, y, z)$ — сглаживающая функция, т. е. неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, такая, что ее носитель $\operatorname{supp}\omega$ содержится в шаре $B(0; 1)$ и $\int\limits_{\operatorname{supp}\omega} \omega(r)\,dr = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(r, t)$, определенной на $\mathbf{R}^3(x,$

$y, z) \times]\,0;\ T\,[$ и локально суммируемой по переменным x, y, z, положим

$$f_{(\varepsilon)}(r,t)=\int\limits_{\operatorname{supp}\omega_{r,\varepsilon}} f(r_1,t)\,\omega_{r_1,\varepsilon}(r_1)\,dr_1,\qquad \omega_{r,\varepsilon}(r_1)=\frac{1}{\varepsilon^3}\,\omega\left(\frac{r_1-r}{\varepsilon}\right)$$

Функция $f_{(\varepsilon)}$ называется ε-усреднением функции f по пространственным координатам. Известно [4], что для непрерывной функции f всюду $\lim f_{(\varepsilon)}=f$ при $\varepsilon\to 0$, операция усреднения перестановочна с операцией дифференцирования и

$$\nabla f_{(\varepsilon)}=-\int\limits_{\operatorname{supp}\omega_{r,\varepsilon}} f(r_1,t)\,\nabla\omega_{r_1,\varepsilon}(r_1)\,dr_1 \tag{1.3}$$

(градиент берется по пространственным переменным).

Применим операцию усреднения к последнему уравнению (1.1), предварительно продолжив функции u, v, w с области G нулями на всю область $\mathbf{R}^3(x,y,z)\times]\,0;\ T\,[$. Тогда во всех точках $(r,t)\in G(x,y,z)\times]\,0;\ T\,[$, таких, что точка r удалена от $\partial G(x, y, z)$ не менее чем на ε, будем иметь

$$v_{(\varepsilon)}(r,t)=v(x,\varepsilon,z,t)-\int\limits_{\varepsilon}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}u_{(\varepsilon)}+\frac{\partial}{\partial z}w_{(\varepsilon)}\right]dy$$

что дает основание приблизить в первых двух уравнениях (1.1) функцию v функцией

$$v^{(\varepsilon)}=V(x,z,t)-\bar v,\qquad \bar v=\int\limits_{0}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}u_{(\varepsilon)}+\frac{\partial}{\partial z}w_{(\varepsilon)}\right]dy,\qquad \forall\,(\mathbf{r},t)\in G$$

(функции u и w предполагаются продолженными нулями на всю область $\mathbf{R}^3(x,y,z)\times$ $\times]\,0;\ T\,[$ вне G) и рассмотреть в области G систему уравнений, отличающуюся от первых двух уравнений (1.1) заменой v на $v^{(\varepsilon)}$, с уже описанными выше граничными условиями (1.2) для функций u, w с теми же допущениями относительно U, W, p_x/ρ, p_z/ρ.

Соответствующая краевая задача, коротко называемая ниже модельной задачей, будет рассмотрена при любых сглаживающих функциях ω и при любых $\varepsilon>0$. Лишь при описании зон влияния и зависимости будут наложены дополнительные требования на расположение в шаре $B\,(0;\ 1)$ носителя сглаживающей функции $\operatorname{supp}\omega$.

2. Некоторые свойства решения модельной системы уравнений и теорема единственности. Рассуждения работы [5], где был установлен ряд свойств решений точной краевой задачи (1.1), (1.2), применимы и к модельной задаче. С их помощью может быть доказана

Теорема 2.1. Пусть u, w — решение класса $C^2(\bar G)$ модельной задачи. Тогда при любом $\varepsilon>0$ всюду в $\bar G$ имеем

$$0\leqslant u\leqslant \max U+t\max(-p_x/\rho)\quad (u\to w,\ \ U\to W,\ \ x\to z) \tag{2.1}$$

причем равенства $u=0$, $w=0$ достигаются лишь при $y=0$ и, кроме того, всюду внутри области

$$A\leqslant w/u\leqslant B \tag{2.2}$$

$$A=\min\left\{\inf_{y>0}\frac{W}{U};\ \min_{\bar G}\frac{p_z}{p_x}\right\},\qquad B=\max\left\{\sup_{y>0}\frac{W}{U};\ \max_{\bar G}\frac{p_z}{p_x}\right\}$$

Оценки (2.1) используются ниже при доказательстве теоремы 2.2 единственности, а оценка (2.2) позволяет дать явное описание зон влияния и зависимости.

Теорема 2.2. При любом $\varepsilon>0$ модельная краевая задача имеет не более одного решения $u, w\in C^2(\bar G)$.

Доказательство. Если существуют два решения u_1, w_1 и u_2, w_2 модельной задачи, положим

$$\varphi=(u_1-u_2)\,e^{-\lambda t},\quad \psi=(w_1-w_2)\,e^{-\lambda t} \tag{2.3}$$

где достаточно большое значение положительного параметра λ будет указано позже. Функции φ, ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\nu\varphi_{yy}-u_1\varphi_x-v_1^{(\varepsilon)}\varphi_y-w_1\varphi_z-\varphi_t-\lambda\varphi-u_{2x}\varphi-u_{2z}\psi+u_{2y}I=0 \tag{2.4}$$

$$\nu\psi_{yy}-u_1\psi_x-v_1^{(\varepsilon)}\psi_y-w_1\psi_z-\psi_t-\lambda\psi-w_{2x}\varphi-w_{2z}\psi+w_{2y}I=0 \tag{2.5}$$

$$I=\int\limits_{0}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{(\varepsilon)}+\frac{\partial}{\partial z}\psi_{(\varepsilon)}\right]dy$$

с граничными условиями $\varphi = \psi = 0$ на множестве

$$M = \partial G \cap [\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \{y = Y\}]$$

Умножая обе части уравнения (2.4) на φ и интегрируя по области G, представим результат в виде

$$\nu \int\limits_G \varphi_y^2\, dV + \frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_{G(y,z,t)} u_1\varphi^2\, dy\, dz\, dt + \int\limits_{G(x,y,t)} w_1\varphi^2\, dx\, dy\, dt + \int\limits_{G(x,y,z)} \varphi^2\, dx\, dy\, dz\Bigg] + \int\limits_G F\, dV = 0,$$

$$F = \left(\lambda + u_{2x} - \frac{1}{2} u_{1x} - \frac{1}{2} v_{1y}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{2} w_{1z}\right)\varphi^2 + u_{2z}\varphi\psi - u_{2y}\varphi I \tag{2.6}$$

Поскольку в силу (2.1) все слагаемые в левой части (2.6), кроме, может быть, последнего, неотрицательны, справедливо неравенство

$$\int\limits_G F\, dV \leqslant 0 \tag{2.7}$$

Получим аналогичное неравенство при помощи (2.5) и сложим его почленно с неравенством (2.7), а затем оценим ряд слагаемых при помощи (1.3) и неравенства Шварца. Будем иметь (максимум берется по $\bar{G}$)

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T e^{-2\lambda t}\Bigg[\Bigg(\lambda - \max\left|u_{2x} - \frac{1}{2} u_{1x} - \frac{1}{2} v_{1y}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{2} w_{1z}\right| - C_1 \max|u_{2y}| - \\ - \frac{1}{2}\max|u_{2z} + w_{2x}| - \frac{1}{2} C_1 \max|w_{2y}| - \frac{1}{2} C_2 \max|u_{2y}|\Bigg) \int\limits_{G(x,y,z)} \Phi^2(r,t)\, dr + \\ + \Bigg(\lambda - \max\left|w_{2z} - \frac{1}{2} u_{1x} - \frac{1}{2} v_{1y}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{2} w_{1z}\right| - C_2 \max|w_{2y}| - \\ - \frac{1}{2}\max|u_{2z} + w_{2x}| - \frac{1}{2} C_1 \max|w_{2y}| - \frac{1}{2} C_2 \max|u_{2y}|\Bigg) \int\limits_{G(x,y,z)} \Psi^2(r,t)\, dr\Bigg]\, dt \leqslant 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\Phi = u_1 - u_2, \quad \Psi = w_1 - w_2, \quad C_1 = Y\sqrt{XYZ}\, \| \partial\omega_{0,\varepsilon}/\partial x \|_{L^2}$$

(постоянная C_2 получается из C_1 путем замены $\partial/\partial x$ на $\partial/\partial z$). Поскольку при достаточно большом λ интеграл в левой части неравенства (2.8) становится неотрицательным, противоречия можно избежать лишь в случае, когда $\Phi = \Psi = 0$ в области G. Теорема 2.2 доказана.

3. Зоны влияния и зависимости. В отличие от случая двумерного пограничного слоя, возмущение, образующееся в некоторой точке пространственного пограничного слоя, распространяется не на всю область течения, а только на район влияния данной точки. Области влияния и зависимости определяются двумя поверхностями, образованными нормалями к телу и проходящими через предельную линию тока на поверхности тела и линию тока внешнего течения. Это обстоятельство, упомянутое во многих работах, не имеет строгого математического обоснования. Ниже будет показано, что при любом $\varepsilon > 0$ модельная система уравнений действительно имеет зоны влияния и зависимости, близкие к описанным.

Пусть u_1, w_1 — решение модельной задачи, в u_2, w_2 — решение системы уравнений, получающейся из модельной системы после замены функции $v^{(\varepsilon)}$ на функцию $V(x, z, t) - \Delta V(x, z, t) - \bar{v}$ и функций p_x/ρ, p_z/ρ на функции $p_x/\rho - \Delta(p_x/\rho)$ и $p_z/\rho - \Delta(p_z/\rho)$ соответственно с граничными условиями $u_2 = U - \Delta U$, $w_2 = W - \Delta W$ на множестве M.

Кроме необходимых предположений, связанных с непрерывностью и дифференцируемостью соответственное число раз, никаких ограничений на возмущения ΔU, ΔV, ΔW, $\Delta(p_x/\rho)$, $\Delta(p_z/\rho)$ не накладывается. Однако в то время как при доказательстве теоремы единственности носитель supp ω мог быть произвольно расположен в $B(0; 1)$, здесь потребуем, чтобы он располагался внутри части шара $B(0; 1)$, проектирующейся вдоль оси Y на сектор единичного круга $x^2 + z^2 \leqslant 1$, такой, что $x \leqslant 0$, $z \leqslant 0$ и

$$A \leqslant z/x \leqslant B \tag{3.1}$$

(иными словами, усреднение берется «вверх по потоку»). Для любого $t_0 \in [0; T]$ через $\Delta(t_0)$ обозначим объединение проекций вдоль оси Y на прямоугольник $[0; X] \times [0; Z] \subset \subset \mathbf{R}^2(x, z)$ того подмножества из

$$\partial G \cap [\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{y = Y\} \cup \{t = t_0\}]$$

на котором хотя бы одно из возмущений ΔU, ΔW отлично от нуля, и того подмножества из $G(x, y, z) \times \{t = t_0\}$, на котором отлично от нуля хотя бы одно из возмущений ΔV, $\Delta(p_x/\rho)$, $\Delta(p_z/\rho)$. Далее, через Δ обозначим множество точек, заметаемых в прямоугольнике $[0; X] \times [0; Z]$ всеми лучами, направленными «вниз по потоку», имеющими начало в некоторой точке множества $\bigcup \Delta(t_0)$, $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ и наклоненными к оси X под углом α, таким, что

$$A \leqslant \operatorname{tg} \alpha \leqslant B \tag{3.2}$$

Пусть, наконец, $\Omega = ((]0; X[\times]0; Z[) \setminus \Delta) \times]0; Y[\times]0; T[$ (отметим, что как область Δ, так и область Ω не зависят от ε).

Теорема 3.1. В области Ω заведомо $u_1 = u_2$, $w_1 = w_2$, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ цилиндр $\Delta \times]0; Y[\times]0; T[$ содержит в себе зону влияния возмущений ΔU, ΔV, ΔW, $\Delta(p_x/\rho)$, $\Delta(p_z/\rho)$.

Доказательство. Как и выше, рассмотрим функции (2.3). Функция φ удовлетворяет в области G уравнению, отличающемуся от (2.4) тем, что в правой части стоит величина $g = [\Delta(p_x/\rho) + u_{2y}\Delta V]\, e^{-\lambda t}$ с граничным условием $\varphi = \Delta U e^{-\lambda t}$ на множестве M.

Умножив обе части этого уравнения на φ, проинтегрируем по области Ω. Результат можно представить в виде

$$\nu \int_{\Omega} \varphi_y{}^2\, dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (u_1 n_x + v_1^{(\varepsilon)} n_y + w_1 n_z + n_t)\, \varphi^2\, d\sigma +$$

$$+ \nu \int_{\partial\Omega} \varphi\varphi_y n_y\, d\sigma + \int_{\Omega} (F + \varphi g)\, dV = 0 \tag{3.3}$$

($\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z, n_t)$ — вектор внешней нормали на границе $\partial\Omega$ (там, где он определен), $d\sigma$ — элемент поверхности на $\partial\Omega$).

В области Ω возмущения ΔV, $\Delta(p_x/\rho)$, $\Delta(p_z/\rho)$ равны нулю; кроме того, произведение φn_y на $\partial\Omega$ также равно нулю либо в силу равенства $\varphi = 0$ при $y = 0$ и при $y = Y$, либо в силу равенства $n_y = 0$ при $0 < y < Y$. Функция $(u_1 n_x + w_1 n_z + n_t)\, \varphi^2$ на $\partial\Omega$ тоже неотрицательна, ибо там, где, быть может, функция φ отлична от нуля, на основании (2.1), (2.2) и предположения (3.2) неотрицательна сумма $u_1 n_x + w_1 n_z + n_t$ (если $0 < t < T$, то $n_t = 0$, а угол между векторами (n_x, n_z) и (u_1, w_1) не может быть тупым в силу построения области Ω). С учетом сказанного из (3.3) следует, что функция φ удовлетворяет неравенству (2.7) при замене области интегрирования G на Ω.

Дальнейшее доказательство того, что $\varphi = \psi = 0$ в области Ω аналогично доказательству теоремы 2.2. Единственное различие состоит в том, что при оценке интегралов типа $\int_{\Omega} \psi I\, dV$ для произвольного носителя $\operatorname{supp} \omega_{r,\varepsilon}$ в шаре $B(r; \varepsilon)$ уже нельзя утверждать, что

$$\int_{\operatorname{supp} \omega_{r,\varepsilon}} \Phi^2(r_1, t)\, dr_1 \leqslant \int_{(([0;X]\times[0;Z])\setminus\Delta)\times[0;Y]} \Phi^2(r_1, t)\, dr_1 \tag{3.4}$$

Однако на основании предположений (3.2) и (3.1) (усреднение берется «вверх по потоку») для любой точки $r \in (([0; X] \times [0; Z]) \setminus \Delta) \times [0; Y]$ носитель $\operatorname{supp} \omega_{r,\varepsilon}$ целиком содержится в множестве $(([0; X] \times [0; Z]) \setminus \Delta) \times [0; Y]$, и неравенство (3.4) остается в силе. Теорема 3.1 доказана.

Ясно, что для построения области зависимости для некоторой подобласти $D \subseteq \subseteq G$ необходимо спроектировать D на прямоугольник $[0; X] \times [0; Z]$ и затем из всех точек этой проекции $D_{x,z}$ провести лучи «вверх по потоку», составляющие с осью X угол α, такой, что имеет место (3.2). Если Γ — область, заметаемая в $[0; X] \times \times [0; Z]$ этими лучами, то цилиндр $\Gamma \times [0; Y] \times [0; T]$ заведомо содержит в себе область зависимости для подобласти D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
2. *Wang K. C.* On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt 2. P. 397—404.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
4. *Бесов О. В., Ильин В. В., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
5. *Титов О. В.* О некоторых свойствах уравнений пространственного пограничного слоя // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 369—371.

Москва

Поступила в редакцию 1.VIII.1988

УДК 532.593 : 533.6.011.72

Н. А. Белов

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ В НЕКОТОРЫХ ИДЕАЛЬНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

Рассматривается известная автомодельная задача о сильном взрыве в идеальной сжимаемой среде, обладающей некоторым произволом в виде внутренней энергии. Постановка этой задачи была дана Л. И. Седовым. Существование двух первых интегралов сводит задачу к исследованию интегрируемости одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

В работе показано, что даже в простейшем случае плоской симметрии задачи это уравнение приводится в общем случае к неинтегрируемому в квадратурах уравнению Абеля с функциональными коэффициентами. Найден частный случай его интегрируемости, позволивший выписать аналитические решения задачи для некоторого семейства сред, включающего совершенный и запыленный (в предположении о равновесии параметров фаз) газы. Этот результат обобщает полученные ранее результаты [1—4]. Все найденные решения продолжимы до плоскости симметрии, исследовано их асимптотическое поведение вблизи нее.

Для того же семейства сред проведен численный анализ задачи в цилиндрическом и сферическом случаях. Для дисперсных сред типа пузырьковой жидкости или запыленного газа (численно исследованного ранее [5, 6]) обнаружено два новых эффекта: немонотонность скорости за ударной волной и эффект несжимаемости при достаточно малом содержании газа в смеси. В сферическом случае предельным решением задачи при уменьшении содержания газа является известное решение задачи о сильном взрыве в несжимаемой жидкости.

1. Изложим кратко постановку задачи (подробнее см. [1, 2]). Пусть плотность внутренней энергии имеет вид

$$e(p,\ \rho) = p\varphi(g)/\rho_0,\quad g = \rho/\rho_0 \tag{1.1}$$

здесь p и ρ — давление и плотность, φ — произвольная функция), тогда задача автомодельна (две независимые размерные константы — энергия взрыва и ρ_0 — постоянная с размерностью плотности), и безразмерные плотность g, скорость $f = v/x_s^{\cdot}$ и давление $h = p/(\rho_0 x_s^{\cdot 2})$ удовлетворяют системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, полученных из уравнений неразрывности, движения и сохранения энтропии в частице:

$$\begin{gathered}(\lambda - f)\, g'/g - f' - (\nu - 1)\, f/\lambda = 0,\quad h' - (\lambda - f)\, gf' - {}^1/_2\nu fg = 0 \\ (\lambda - f)\,(h'/h - g'd\ln\chi/dg) + \nu = 0;\quad \chi(g) = \varphi^{-1}\exp\int(g^2\varphi)^{-1}dg\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\lambda = x/x_s$ — безразмерная координата (штрих означает дифференцирование по λ); параметр ν равен 1, 2, 3 для плоской, цилиндрической, сферической симметрии; x_s и $x_s^{\cdot}$ — координата и скорость (предполагаемой) сильной ударной волны. Из сообра-