УДК 539.375

В. Э. Садыхов

О НАПРЯЖЕНИЯХ В БИУПРУГОМ СЛОЕ С КРАЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ СДВИГА

Изучается распределение смещений и напряжений в биупругом слое конечной толщины, когда один монослой полностью разорван краевой трещиной продольного сдвига, перпендикулярной границе слоя, с вершиной, лежащей на границе раздела двух сред. На берегах трещины заданы произвольные симметрично распределенные напряжения, поверхность биупругого слоя свободна от внешних нагрузок. На бесконечности внутри слоя смещения и напряжения отсутствуют. Вся структура симметрична относительно плоскости трещины, и в этой плоскости вне трещины смещение предполагается равным нулю. Получена асимптотика поля напряжений вблизи вершины трещины и найдено выражение коэффициента k_{III} интенсивности напряжений через вспомогательную неизвестную функцию, для которой установлен характер сингулярности и получено интегральное уравнение с выделенной сингулярной частью. При решении вспомогательных краевых задач использован метод Келдыша — Седова [1].

1. Постановка задачи и способ решения. Пусть две упругие однородные изотропные полосы Π_1: $0<x<h_1$, $|y|<\infty$ и Π_2: $h_1<x<h_1+h_2=H$, $|y|<\infty$ составлены из двух, вообще говоря, различных материалов с модулями сдвига соответственно μ_1 и μ_2, причем полоса Π_1 полностью разорвана краевой трещиной продольного сдвига γ: $y=0$, $0\leqslant x\leqslant h_1$. Компоненты векторов смещений в полосах Π_j в рассматриваемом случае антиплоской деформации имеют вид

$$W_x^{(j)}=W_y^{(j)}=0,\ W_z^{(j)}=W(x,\ y)\ \ (j=1,\ 2)$$

Компоненты тензоров напряжений даются формулами

$$\sigma_x^{(j)}=\sigma_y^{(j)}=\sigma_z^{(j)}=\tau_{xy}^{(j)}=0,\quad \tau_{xz}^{(j)}=\mu_j\frac{\partial W^{(j)}}{\partial x},\quad \tau_{yz}^{(j)}=\mu_j\frac{\partial W^{(j)}}{\partial y}$$

Будем считать, что к берегам разреза γ приложены симметрично распределенные напряжения

$$\mu_1\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y}(x,\pm 0)=-\sigma_1(x)\quad (0\leqslant x\leqslant h_1)$$

где заданная функция $\sigma_1(x)$ непрерывна на отрезке $0\leqslant x\leqslant h_1$ и в точке $x=h_1-0$ удовлетворяет условию Липшица сколь угодно малого положительного порядка.

Вдоль общей границы $x=h_1$, $|y|<\infty$ полосы Π_1, Π_2 жестко сцеплены:

$$W^{(1)}(h_1-0,\ y)=W^{(2)}(h_1+0,\ y)\ \ (|y|<\infty) \tag{1.1}$$

$$\mu_1\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}(h_1-0,\ y)=\mu_2\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}(h_1=0,\ y)\quad (|y|<\infty) \tag{1.2}$$

а граница $\partial\Pi$ биупругой полосы $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$ свободна от внешних нагрузок, т. е.

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}(+0,y)=\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}(H-0,y)=0\quad (|y|<\infty)$$

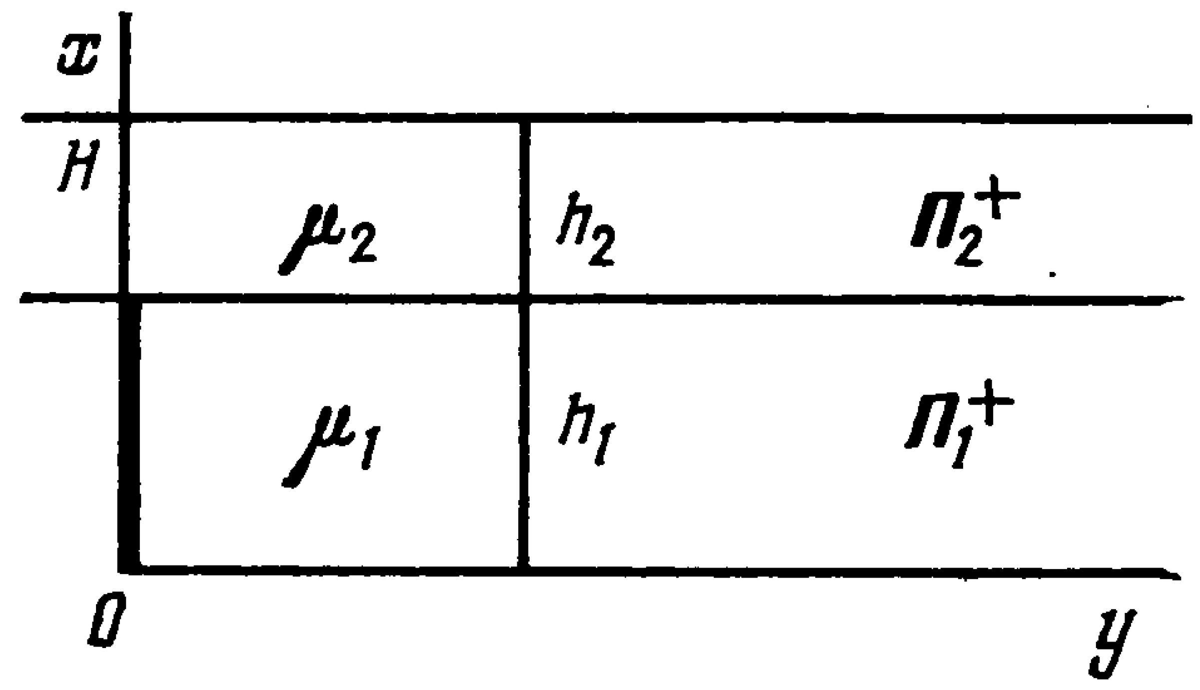
В силу имеющейся симметрии относительно оси $y = 0$ вместо полос Π_j можно рассматривать лишь соответствующие полуполосы

$$\Pi_1^+ : 0 < x < h_1, \ y > 0; \ \Pi_2^+ : h_1 < x < h_1 + h_2 = H, \ y > 0$$

и положить

$$W^{(2)}(x, +0) = 0 \ (h_1 \leqslant x \leqslant H)$$

Также предположим, что функции $W^{(j)}(x, y)$ непрерывны вместе с первыми частными производными вплоть до границ $\partial\Pi_j^+$ соответствующих полуполос Π_j^+ всюду, за исключением вершины $(h_1, 0)$ трещины γ, где эти производные могут иметь интегрируемую особенность. На бесконечности в соответствующих полуполосах функции $W^{(j)}(x, y)$ вместе со своими первыми частными производными обращаются в нуль (фиг. 1).



Фиг. 1

Для разыскания целевой функции

$$\sigma(x) = \tau_{yz}^{(2)}(x, +0) = \mu_2 \frac{\partial W^{(2)}}{\partial y}(x, +0) \quad (h_1 < x \leqslant H) \tag{1.3}$$

введем с учетом (1.2) вспомогательную неизвестную функцию

$$\varphi(y) = \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}(h_1 - 0, y) = \frac{1}{\omega}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}(h_1 + 0, y) \quad (y > 0), \ \omega = \mu_1/\mu_2 \tag{1.4}$$

которая по условию непрерывна при $0 < y < \infty$. Дополнительно предположим, что

$$\varphi(y) = O(y^{-2-\varepsilon}) \ (y \to +\infty), \ \varepsilon > 0 \tag{1.5}$$

$$\exists\alpha \in]0, 1[, \quad \exists y_0 > 0 : \varphi(y) = y^{\alpha-1}(a_0 + a_1 y + \ldots) + (b_0 + b_1 y + \ldots)$$
$$(0 < y \leqslant y_0)$$

Тем самым, в частности

$$\varphi(y) = O(1) \quad (y \geqslant y_0), \ \int_0^\infty |\varphi(t)|\,dt < \infty, \ \int_0^\infty t\,|\varphi(t)|\,dt < \infty \tag{1.6}$$

Теперь для функций $W^{(j)}(x, y)$ имеем краевые задачи

$$\nabla_{xy}^2 W^{(1)} = 0, \ ((x, y) \in \Pi_1^+)$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}(+0, y) = 0, \ \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}(h_1 - 0, y) = \varphi(y) \quad (y > 0) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y}(x, +0) = -\left(\frac{1}{\mu_1}\right)\sigma_1(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant h_1)$$

$$|W^{(1)}| + |\operatorname{grad} W^{(1)}| = o(1) \quad ((x, y) \to \infty, \ (x, y) \in \Pi_1^+) \tag{1.8}$$

$$\nabla_{xy}^2 W^{(2)} = 0, \quad ((x, y) \in \Pi_2^+)$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}(h_1 + 0, y) = \varphi(y), \quad \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}(H - 0, y) = 0 \quad (y > 0), \ \omega = \mu_1/\mu_2 \tag{1.9}$$

$$W^{(2)}(x, +0) = 0 \quad (h_1 \leqslant x \leqslant H)$$

$$|W^{(2)}| + |\operatorname{grad} W^{(2)}| = o(1) \ ((x, y) \to \infty, \ (x, y) \in \Pi_2^+) \tag{1.10}$$

Решив эти задачи, найдем по формуле (1.3) целевую функцию $\sigma(x)$, а при помощи тождества (1.1) получим интегральное уравнение для вспомогательной неизвестной функции $\varphi(y)$.

2. Решение краевой задачи (1.7), (1.8). Пусть $S(x, y)$ — какое-либо решение задачи (1.7), (1.8) Тогда по (1.7) найдется функция $T(x, y$

такая, что

$$f(z) = S(x, y) + iT(x, y) \in A(\Pi_1^+) \quad (z = x + iy)$$

т. е. функция $f(z)$ регулярна в области Π_1^+ комплексной плоскости C_z. Рассмотрим функцию $w(z) = -\cos(\pi z/h_1)$. Область Π_1^+ эта функция однолистно и конформно отображает на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ комплексной плоскости C_w. Обозначив еще $F(w) = f(z(w))$ $(\operatorname{Im} w > 0)$, в силу условия (1.8) и первой из оценок (1.4) найдем

$$|F'(w)| = |f'(z(w))| \frac{1}{|w'(z)|} = \frac{h_1}{\pi} |\operatorname{grad} S| \, |w^2 - 1|^{-1/2} = o\left(\frac{1}{w}\right) = o(1)$$

$$(w \to \infty, \ \operatorname{Im} w \geqslant 0)$$

Отсюда по методу Келдыша — Седова [1] получаем формулу

$$F'(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(F'(\lambda))}{\lambda - w} d\lambda \quad (\operatorname{Im} w > 0)$$

Разбивая промежуток интегрирования на промежутки $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ и $]1, \infty[$, используя краевые условия в (1.8) и выполняя в каждом из полученных интегралов соответствующую замену переменной интегрирования, придем к тождеству

$$F'(w) = -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{h_1} \frac{\sigma_1(t)}{w + \cos t_1} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{w - \operatorname{ch} t_1} dt \quad (\operatorname{Im} w > 0) \tag{2.1}$$

$$t_1 = \pi t/h_1$$

после чего, интегрируя по w в верхней полуплоскости, найдем

$$F(w) = -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{h_1} \ln(w + \cos t_1)\sigma_1(t)\, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln(w - \operatorname{ch} t_1)\varphi(t)\, dt +$$

$$+ C\left(\int_0^{h_1} \sigma_1(t)\, dt + \mu_1 \int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt\right) \quad (\operatorname{Im} w > 0) \tag{2.2}$$

где C — произвольная постоянная, а для логарифмов фиксируется любая ветвь, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$.

Но из краевых условий в (1.7) и оценки (1.8) с учетом оценок (1.5) и условия непрерывности напряжений по известному свойству гармонических функций найдем (нормаль внешняя)

$$\int_0^{h_1} \sigma_1(t)\, dt + \mu_1 \int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt = \mu_1 \int_{\partial\Pi_1^+} \frac{\partial S}{\partial n} dl = 0$$

Поэтому, взяв для удобства $C = -\ln 2/(\pi\mu_1)$ и подставив $w = w(z)$, из формул (2.1) и (2.2) получим

$$S(x, y) = \operatorname{Re} F(w(z)) = W^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{h_1} \ln|2(\cos t_1 - \cos z_1)|\sigma_1(t)\, dt -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln|2(\operatorname{ch} t_1 + \cos z_1)|\varphi(t)\, dt \tag{2.3}$$

$$F'(w(z))w'(z) = \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} - i\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{h_1} \sin z_1 \left[-\frac{1}{\mu_1} \int_0^{h_1} \frac{\sigma_1(t)}{\cos t - \cos z_1} dt + \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch} t_1 + \cos z_1} dt\right] \tag{2.4}$$

$$t_1 = \pi t/h_1, \ z_1 = \pi z/h_1$$

Таким образом, если существует решение $W^{(1)}(x, y)$ задачи (1.7), (1.8), то оно дается формулой (2.3), а его первые частные производные определяются из равенства (2.4). С другой стороны, как видно из этих формул, функция $W^{(1)}(x, y)$, очевидно, гармоническая в полуполосе Π_1^+ и непрерывна вместе с первыми частными производными вплоть до границы $\partial\Pi_1^+$ этой полуполосы всюду, за исключением (для производных) точки $(h_1 - 0, +0)$. Предельный переход в (2.4) к границе $\partial\Pi_1^+$ полуполосы Π_1^+ показывает, что $W^{(1)}(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям в (1.7). При этом

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y}(h_1 - 0, y) = \frac{1}{h_1}\operatorname{sh} y_1\left(\int_0^\infty \frac{\varphi(t) - \varphi(y)}{\operatorname{ch} t_1 - \operatorname{ch} y_1}\,dt - \frac{1}{\mu_1}\int_0^{h_1}\frac{\sigma_1(h_1 - t)\,dt}{\operatorname{ch} y_1 - \cos t_1}\right) - $$

$$- \frac{y}{h_1}\varphi(y), \quad y_1 = \frac{\pi y}{h_1} \tag{2.5}$$

Из тех же соотношений (2.3) и (2.4) вытекают асимптотические формулы

$$h_1 W^{(1)}(x, y) = -\frac{y}{\mu_1}\left(\int_0^{h_1}\sigma_1(t)\,dt + \mu_1\int_0^\infty \varphi(t)\,dt\right) +$$

$$+ \int_0^\infty t\varphi(t)\,dt - \int_y^\infty (t - y)\,\varphi(t)\,dt + o(1)$$

$$h_1\left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} - i\,\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y}\right) = \frac{1}{i\mu_1}\left(\int_0^{h_1}\sigma_1(t)\,dt + \mu_1\int_0^\infty \varphi(t)\,dt\right) + o(1)$$

$$((x, y) \to \infty, \ (x, y) \in \Pi_1^+)$$

Таким образом, при дополнительных условиях

$$\int_0^{h_1}\sigma_1(t)\,dt + \mu_1\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 0, \qquad \int_0^\infty t\varphi(t)\,dt = 0 \tag{2.6}$$

и при абсолютной сходимости второго интеграла в (2.6) решение краевой задачи (1.7), (1.8) существует, единственно и дается формулой (2.3).

3. Решение краевой задачи (1.9), (1.10). Пусть $S(x, y)$ — какое-либо решение этой задачи. В силу сделанных выше предположений о непрерывности его частных производных наряду с последним из краевых условий в (1.9) будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, +0) = 0 \quad (h_1 < x \leqslant H) \tag{3.1}$$

Заменив указанное условие в (1.9) на (3.1), решим полученную краевую задачу методом Келдыша — Седова [1]. Как и в п. 2, введем функции

$$\begin{gathered} f(z) = S(x, y) + iT(x, y) \in A(\Pi_2^+) \quad (z = x + iy) \\ z_2 = \pi(z - h_1)/h_2, \quad w(z) = \cos z_2, \quad F(w) = f(z(w)) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Функция $w = w(z)$ однолистно и конформно отображает область Π_2^+ комплексной плоскости C_z на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ комплексной плоскости C_w; $z = z(w)$ — соответствующая обратная функция.

Далее рассмотрим функцию

$$g(w) \in \{\sqrt{w^2 - 1}\}; \ g(w) \in A\ (w \notin [-1, 1]); \ g(w) \sim w \ (w \to \infty) \tag{3.3}$$

существование и единственность которой очевидны [2]. Как и в п. 2, имеем

$$g(w)F'(w)=o(1)\quad (w\to\infty,\ \operatorname{Im} w>0)$$

откуда

$$F'(w)=\frac{1}{\pi g(w)}\int\limits_{-\infty+i0}^{\infty+i0}\frac{\operatorname{Im}[F'(\lambda)g(\lambda)]}{\lambda-w}\,d\lambda\quad (\operatorname{Im} w>0) \tag{3.4}$$

Вычисляя значения $g(\lambda)$ на промежутках $-\infty<\lambda<-1$ и $1<\lambda<\infty$, значения $g(\lambda+i0)$ на промежутке $-1<\lambda<1$, используя первые два краевых условия в (1.9) и соотношение (3.1), выполнив замену переменной интегрирования $\lambda=-\operatorname{ch}(\pi t/h_2)$, получим

$$F'(w)=-\frac{\omega}{\pi g(w)}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(t)\operatorname{sh} t_2}{w+\operatorname{ch} t_2}\,dt\quad (\operatorname{Im} w>0),\quad t_2=\frac{\pi t}{h_2} \tag{3.5}$$

Интегрируя в верхней полуплоскости от ∞ до w, будем иметь

$$F(w)=\frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^\infty\ln\left(\frac{w+g(w)+\exp t_2}{w+g(w)+\exp(-t_2)}\right)\varphi(t)\,dt\quad (\operatorname{Im} w>0) \tag{3.6}$$

Здесь регулярная ветвь подынтегральной функции в полуплоскости $\operatorname{Im} w>0$ фиксируется условием обращения в нуль на бесконечности.

Видно, что по указанному в (3.3) способу выбора регулярной ветви $g(w)$ аналитической функции $\{\sqrt{w^2-1}\}$ будет

$$g(w(z))=g(-\cos z_2)=i\sin z_2\quad (z\in\Pi_2^+)$$

Стало быть, согласно формулам (3.2), (3.6) и (3.5)

$$S(x,y)=\operatorname{Re} F(w(z))=W^{(2)}(x,y)=\frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^\infty\ln\left|\frac{\exp t_2-\exp(-iz_2)}{\exp(-t_2)-\exp(-iz_2)}\right|\varphi(t)\,dt \tag{3.7}$$

$$F'(w(z))w'(z)=\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}-i\frac{\partial W^{(2)}}{\partial y}=\frac{i\omega}{h_2}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(t)\operatorname{sh} t_2}{\operatorname{ch} t_2-\cos z_2}\,dt \tag{3.8}$$

Итак, если существует решение $W^{(2)}(x,y)$ краевой задачи (1.9), (1.10), то оно единственно, дается формулой (3.7), а его первые частные производные определяются из равенства (3.8). С другой стороны, эта функция, очевидно, гармоническая в Π_2^+ и удовлетворяет указанным в п. 1 условиям непрерывности. Предельным переходом к $\partial\Pi_2^+$ в тождестве (3.8) проверяется выполнение первых двух краевых условий в (1.9). При этом $(y>0)$

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial y}(h_1+0,y)=-\frac{\omega}{h_2}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(t)\operatorname{sh} t_2-\varphi(y)\operatorname{sh} y_2}{\operatorname{ch} t_2-\operatorname{ch} y_2}\,dt+\frac{\omega}{h_2}y\varphi(y),\quad y_2=\frac{\pi y}{h_2} \tag{3.9}$$

Используя формулы (1.5), (3.7) и (3.8), нетрудно установить, что имеет место и оценка (1.10). Наконец, положив в (3.7) $z_2=\pi(x-h_1)/h_2$, найдем

$$W^{(2)}(x,0)=\frac{\omega}{h_2}\int\limits_0^\infty t\varphi(t)\,dt\quad (h_1\leqslant x\leqslant H)$$

Таким образом, при дополнительном условии, что справедливо второе из равенств (2.6), решение краевой задачи (1.9), (1.10) существует, единственно и дается формулой (3.7), а ее первые частные производные определяются из равенства (3.8). Отсюда и из (1.3) получим выражение целевой функции $\sigma(x)$ через вспомогательную неизвестную функцию $\varphi(y)$:

$$\sigma(x) = -\frac{\mu_1}{h_2}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\operatorname{sh} t_2}{\operatorname{ch} t_2 - \cos x_2}\,dt \quad (h_1 < x \leqslant H), \quad x_2 = \pi(x - h_1)/h_2 \quad (3.10)$$

4. Интегральное уравнение для вспомогательной неизвестной функции. Характеристический показатель. Асимптотика целевой функции. Заключительные замечания. Дифференцируя тождество (1.1) и пользуясь формулами (2.5), (3.9), получим для функции $\varphi(y)$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{h_1}\operatorname{sh} y_1 \int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(y)}{\operatorname{ch} t_1 - \operatorname{ch} y_1}\,dt + \frac{\omega}{h_2}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\operatorname{sh} t_2 - \varphi(y)\operatorname{sh} y_2}{\operatorname{ch} t_2 - \operatorname{ch} y_2}\,dt -$$

$$-\left(\frac{1}{h_1}+\frac{\omega}{h_2}\right) y\varphi(y) = \frac{1}{\mu_1 h_1}\operatorname{sh} y_1 \int_0^{h_1} \frac{\sigma_1(h_1 - t)}{\operatorname{ch} y_1 - \cos t_1}\,dt \quad (0 < y < \infty) \quad (4.1)$$

при дополнительных ограничениях (2.6). Математический смысл этих ограничений для каждой из вспомогательных краевых задач отмечен выше. Механический смысл естественно формулировать в терминах всей биупругой полосы $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Из (2.6) и (3.10) имеем

$$\int_0^{h_1} (-\sigma_1(x))\,dx + \int_{h_1}^{H} \sigma(x)\,dx = 0$$

В сочетании с краевыми условиями в (1.7), (1.9), не содержащими $\varphi(y)$, и условиями на бесконечности (1.8), (1.10) это дает

$$\int_{\partial\Pi^+} \frac{\partial W}{\partial n}\,dl = 0, \quad W = \begin{cases} W^{(1)}(x, y), & (x, y) \in \Pi_1^+ \\ W^{(2)}(x, y), & (x, y) \in \Pi_2^+ \end{cases}$$

Другими словами, биупругая полуполоса $\Pi^+ = \Pi_1^+ \cup \Pi_2^+$, а с ней по симметрии и полуполоса Π^- являются самоуравновешенными системами.

Аналогично, из (2.6) и (3.7) выводим

$$\int_0^{h_1} W^{(1)}(x, \pm 0)\,dx = 0$$

т. е. трещина γ в биупругой полосе Π не испытывает смещения в целом. Учтя последнее краевое условие в (1.9) то же самое можем сказать о плоскости симметрии всей системы Π.

Теперь из предписанного общего вида асимптотики (1.5) функции $\varphi(y)$ при $y \to +0$ при помощи соотношений (4.1) и (2.6) найдем характеристический показатель α и условия на коэффициенты a_0, b_0, a_1. Обозначим $\Phi(y)$, $\Psi(y)$, $\Pi(y)$ слагаемые с интегралами, входящие в (4.1), в порядке их следования. Применяя элементарные методы асимптотических оценок определенных интегралов [3, 4], получим

$$\Phi(y) = -a_0\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) y^{\alpha-1} + \left(\frac{a_0}{h_1} + a_1 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) y^\alpha + O(y^\gamma)$$

$$\frac{1}{\omega}\Psi(y) = a_0\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) y^{\alpha-1} + \frac{2}{\pi} b_0 \ln\frac{1}{y} + C(h_2, \varphi) +$$

$$+\left(\frac{a_0}{h_2} - a_1\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) y^\alpha + O(y^\gamma) \quad (y \to +0), \quad \gamma = \frac{\alpha+1}{2}$$

с постоянной $C(h_2, \varphi)$, зависящей и от h_1 через функцию $\varphi(y)$. Налагая на функцию $\sigma_1(x)$ дополнительное условие дифференцируемости в точке $x = h_1 - 0$, будем иметь

$$\Pi(y) = \sigma_1(h_1) + O(y \ln y) = \sigma_1(h_1) + O(y^\gamma) \quad (y \to +0)$$

Наконец, непосредственно из разложения (1.5) найдем

$$\left(\frac{1}{h_1} + \frac{\omega}{h_2}\right) y\varphi(y) = a_0\left(\frac{1}{h_1} + \frac{\omega}{h_2}\right) y^\alpha + O(y^\gamma) \quad (y \to +0)$$

Подставив эти выражения в тождество (4.1), придем к соотношениям

$$\begin{gathered} a_0\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2} + \omega \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) = 0, \quad b_0 = 0 \\ C(h_2, \varphi) = \frac{\mu_2}{\mu_1^2}\sigma_1(h_1), \quad a_1\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} - \omega \operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

С другой стороны, теми же приемами элементарных асимптотических оценок из (3.10) получим

$$\sigma(x) = K_0(x - h_1)^{\alpha-1} - K_1 + K_2(x - h_1)^\alpha + O((x - h_1)^\gamma) \quad (x \to h_1 + 0) \tag{4.3}$$

$$K_0 = -\mu_1 a_0/\cos {}^1/_2\,\pi\alpha, \quad K_1 = \mu_1 C(h_2, \varphi), \quad K_2 = -\mu_1 a_1/\sin {}^1/_2\pi\alpha$$

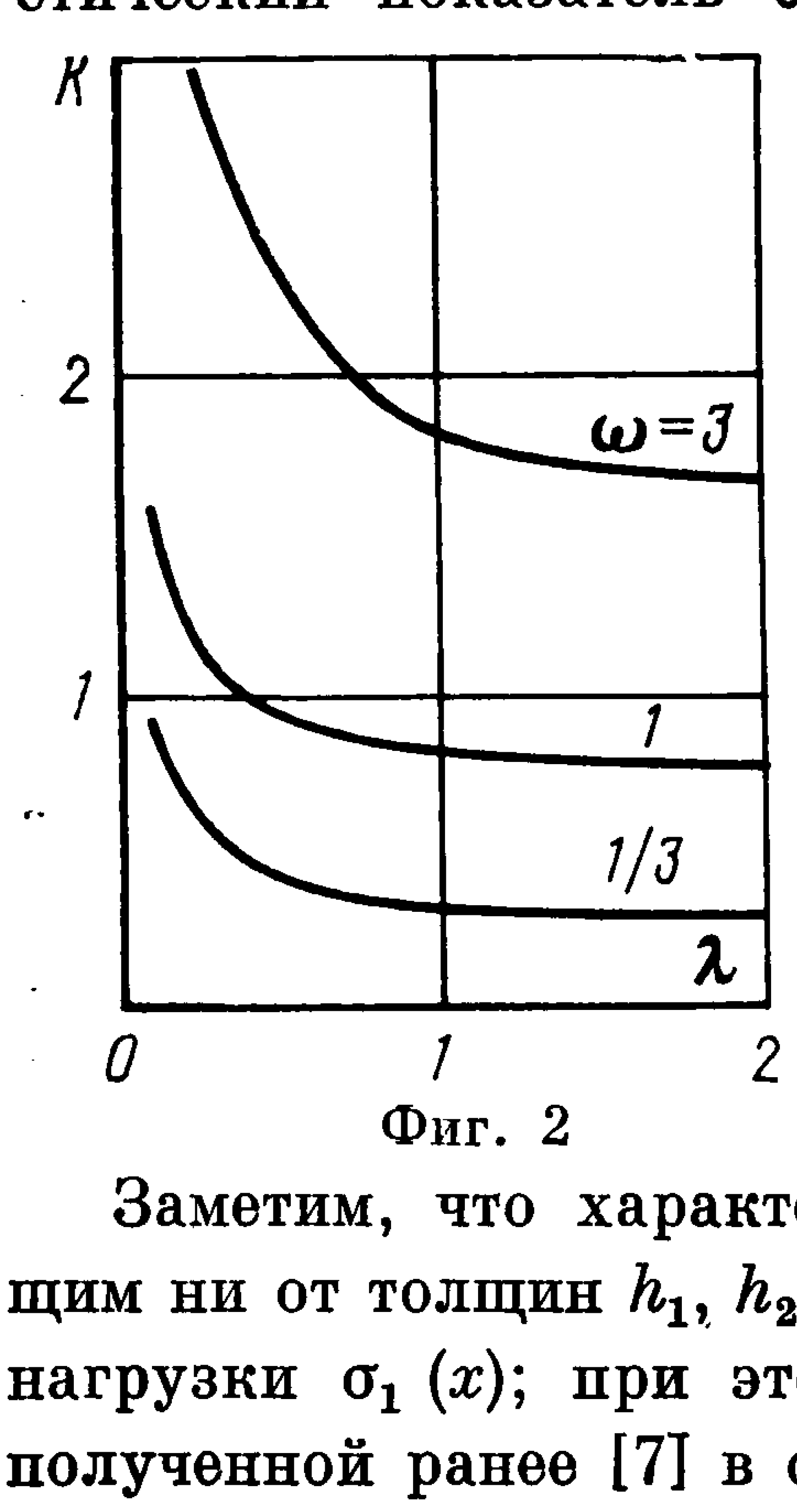
Известно [5, 6], что при $\mu_1 = \mu_2$, т. е. при $\alpha = {}^1/_2$, коэффициент интенсивности напряжений $k_{\text{III}} = \sqrt{2\pi}K_0$ в случае равномерно распределенной нагрузки $\sigma_1(x) = \tau = \text{const}$ отличен от нуля. Интегральное уравнение (4.1) непрерывно зависит от $\sigma_1(x)$ и $\omega = \mu_1/\mu_2$. Поэтому можно считать, что, вообще говоря, $a_0 = 0$. В этом случае и при условии $\alpha > 0$ из (4.2) и (4.3) будем иметь ($\mu_1 \neq \mu_2$):

$$\alpha = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} \sqrt{{}^1/\omega} \; (\omega = \mu_1/\mu_2), \quad \varphi(y) = a_0 y^{\alpha-1} + O(y^{(\alpha+1)/2}) \quad (y \to +0)$$

$$\sigma(x) = -(\mu_1 a_0/\cos {}^1/_2\pi\alpha)\,(x - h_1)^{\alpha-1} - \sigma_1(h_1)/\omega + O((x - h_1)^{(\alpha+1)/2}) \quad (x \to h_1 - 0)$$

При $\mu_1 = \mu_2$ оценки остаточных членов ухудшаются: соответствующий показатель будет равен ${}^1/_2$.

Итак, коэффициент интенсивности напряжений $k_{\text{III}} = -\mu_1\sqrt{2\pi}a_0/\cos {}^1/_2\pi\alpha$ явно выражен через коэффициент a_0 разложения (1.5), ибо характеристический показатель α теперь известен. В свою очередь величина a_0 для конкретного набора параметров может быть найдена при помощи численного решения уравнения (4.1) при условиях (2.6). Определенные трудности возникают лишь при $h_2 \gg h_1$ и особенно при $h_2 \ll h_1$. В этих ситуациях были бы полезны приближенные формулы для k_{III}.



Фиг. 2

Некоторые результаты численного расчета приведены на фиг. 2, где $\sigma_1(x) = \tau = \text{const}$, $K = k_{\text{III}}/\sqrt{2\pi}h_1^{1-\alpha}\,\tau$, $\lambda = h_2/h_1$. Средняя из этих кривых с погрешностью менее 1% совпадает с графиком зависимости, известной для однородной среды [6].

Заметим, что характеристический показатель α оказался не зависящим ни от толщин h_1, h_2 монослоев, ни от конкретного вида непрерывной нагрузки $\sigma_1(x)$; при этом он совпадает с соответствующей величиной, полученной ранее [7] в однородной задаче с $h_1 = h_2 = \infty$. Следует лишь подчеркнуть, что это совпадение существенно связано с предположением об ограниченности напряжений на трещине вблизи ее вершины.

Задача о краевой трещине в биупругой полосе (или, что то же самое, о центральной трещине в симметричной триупругой полосе) рассматривалась в [8—11]. В [9] изучалась плоская деформация. В [8, 10] предполагалось, что вершины центральной трещины продольного сдвига расположены строго внутри однородной среды, так что характеристический показатель $\alpha = {}^1/_2$ (при этом $h_2 = \infty$). В заметке [11] частично приведены результаты, полученные в данной статье.

Автор благодарит В. Д. Кулиева за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л: Гостехиздат, 1950. 444 с.
2. *Ефграфов М. А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 471 с.
3. *Олвер Ф. У. Дж.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
4. *Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В. и др.* Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1969. 387 с.
5. *Садыхов В. Э.* Решения одной задачи теории упругости в случае антиплоской деформации // Материалоемкость и расчеты современных деталей машин. М.: ВЗПИ, 1987.
6. *Sin G. C.* External cracks under longitudinal Shear // J. Franklin Inst. 1965. V. 280. № 2. P. 139—149.
7. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
8. *Sin G. C., Chen E. P.* Cracks of composite materials // Mechanics of fracture. / Ed. Sih G. C. Hague: Martinus Nijhofs publ. 1981. V. 6. P. 15—81.
9. *Ming-Che Lu, Erdogan F.* Stress intensivity factors in two Bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface // Eng. Fract. Mech. 1983. V. 18. № 3. P. 491—528.
10. *Gecit M. R.* Antiplane shear in adhesively bonded semi-infinite media with transverse cracks // Int. J. Fracture. 1984. V. 24. № 3. P. 163—178.
11. *Садыхов В. Э.* К проблеме разрушения двухслойных сред с одним слоем, разорванным трещиной сдвига // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 1. С. 58—61.

Баку

Поступила в редакцию
12.IX.1988