

УДК 539.375

В. М. Александров, И. И. Кудиш

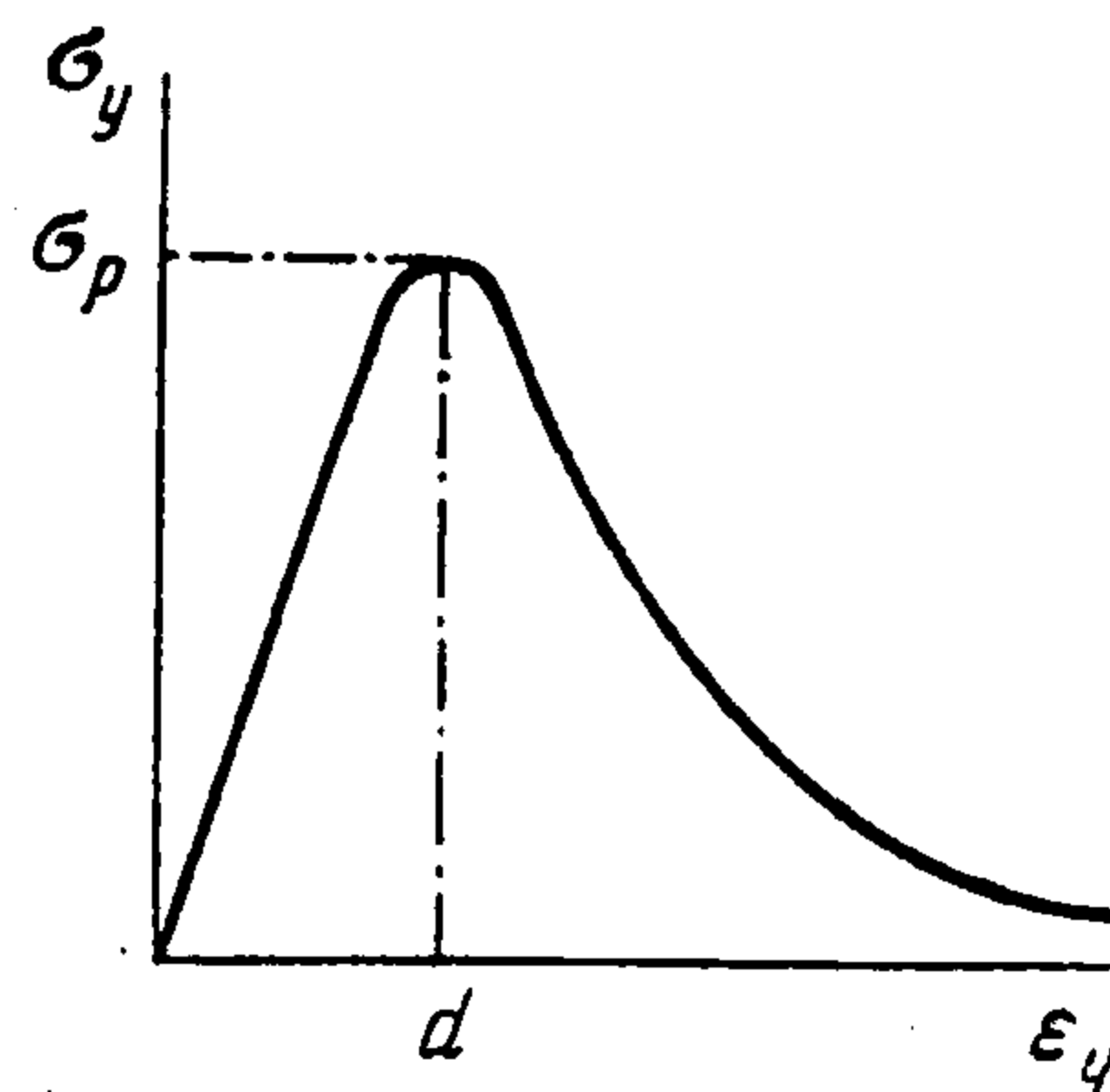
### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ГРИФФИТСА

Рассматривается задача о трещине в упругой плоскости, растягиваемой на бесконечности, при достаточно детальном учете действия сил межатомного сцепления между берегами трещины. Относительно функции, характеризующей раскрытие трещины, задача приводится к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению, содержащему два безразмерных параметра. При помощи асимптотических методов (регулярных и сращиваемых асимптотических разложений) показано, что это уравнение кроме тривиального решения имеет еще два. Они соответствуют трещинам относительно малого и большого раскрытия. С использованием условия плавного смыкания берегов трещины получены критерии разрушения.

1. Пусть бесконечное упругое тело с правильной атомной решеткой нагружено в условиях плоской деформации равномерными усилиями  $\sigma_y = \text{const} \neq 0$ ,  $\sigma_x = 0$ , тогда можно убедиться с учетом закона Гука, что

$$\sigma_y = 2\theta\varepsilon_y, \quad \theta = G(1 - \nu)^{-1} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon_y$  — относительное удлинение в направлении оси  $y$ ,  $G$  и  $\nu$  — упругие постоянные. При указанном нагружении тела расстояние между рядами атомов в кристаллической решетке будет в направлении оси  $y$  несколько превышать нормальное межатомное  $b$ , именно оно будет равно  $b + \Delta b_y$ , т. е. можно считать, что  $\varepsilon_y = \Delta b_y/b$ . Если далее раздвигать ряды атомов, т. е. увеличивать  $\varepsilon_y$ , то вначале  $\sigma_y$  будет пропорционально возрастать по закону (1.1), затем при достаточно больших  $\varepsilon_y$  линейная связь перейдет в нелинейную,  $\sigma_y$  достигнет некоторого максимального значения  $\sigma_p$  — теоретического предела прочности и начнет быстро падать. Такой характер зависимости  $\sigma_y$  от  $\varepsilon_y$  типичен и соответствует потенциалам межатомного взаимодействия Леннарда — Джонса, Морзе, Месси и др. и приведен на фиг. 1. После достижения усилием  $\sigma_y$  значения  $\sigma_p$  нужно считать, что сплошность тела нарушается. Заметим, что описанная зависимость  $\sigma_y$  от  $\varepsilon_y$  будет иметь такой же качественный характер и для аморфных тел [1].



Фиг. 1

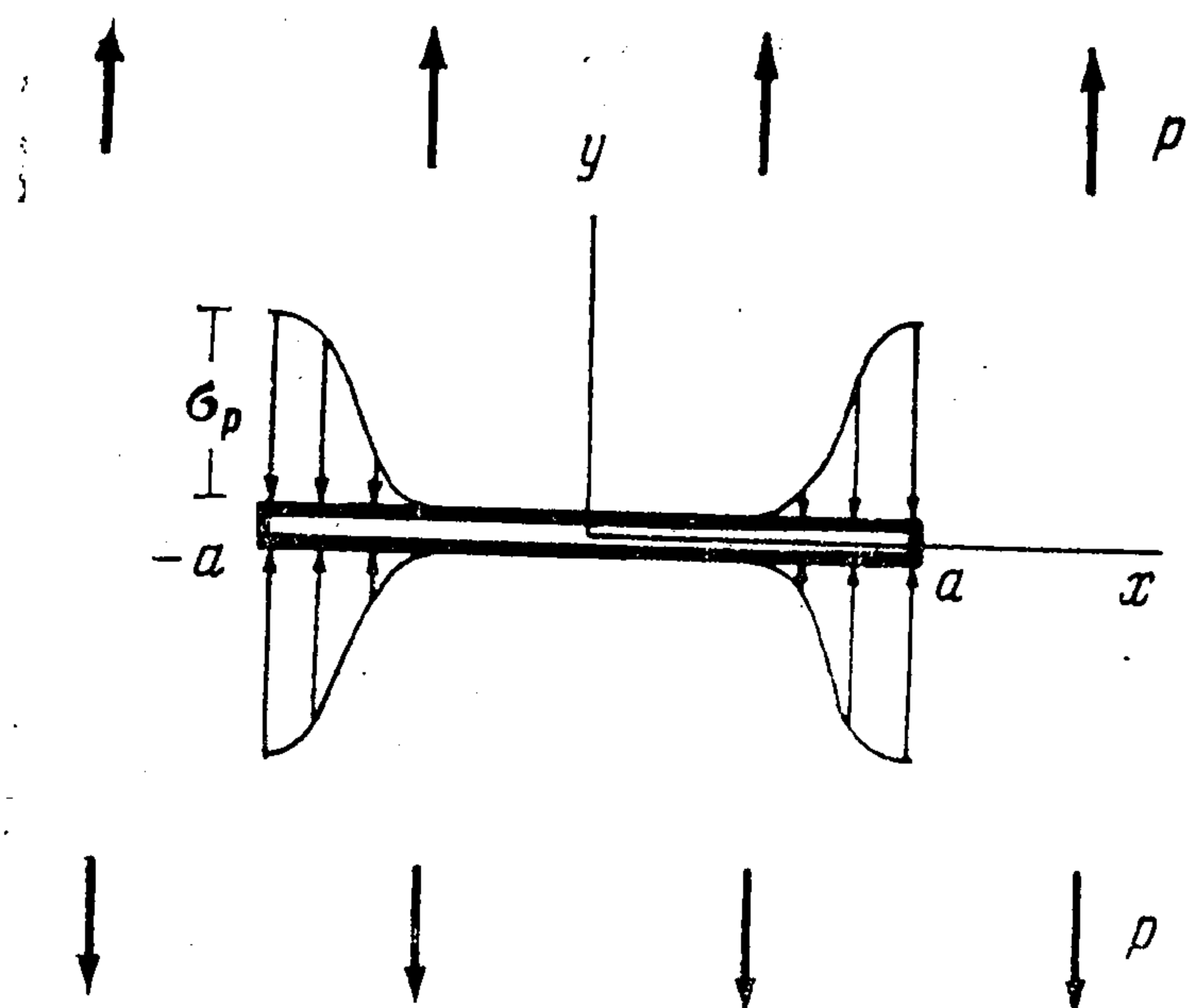
С учетом (1.1) зависимость, изображенную на фиг. 1, опишем выражением

$$\sigma_y = 2\theta\varepsilon_y g(\varepsilon_y/d) \quad (1.2)$$

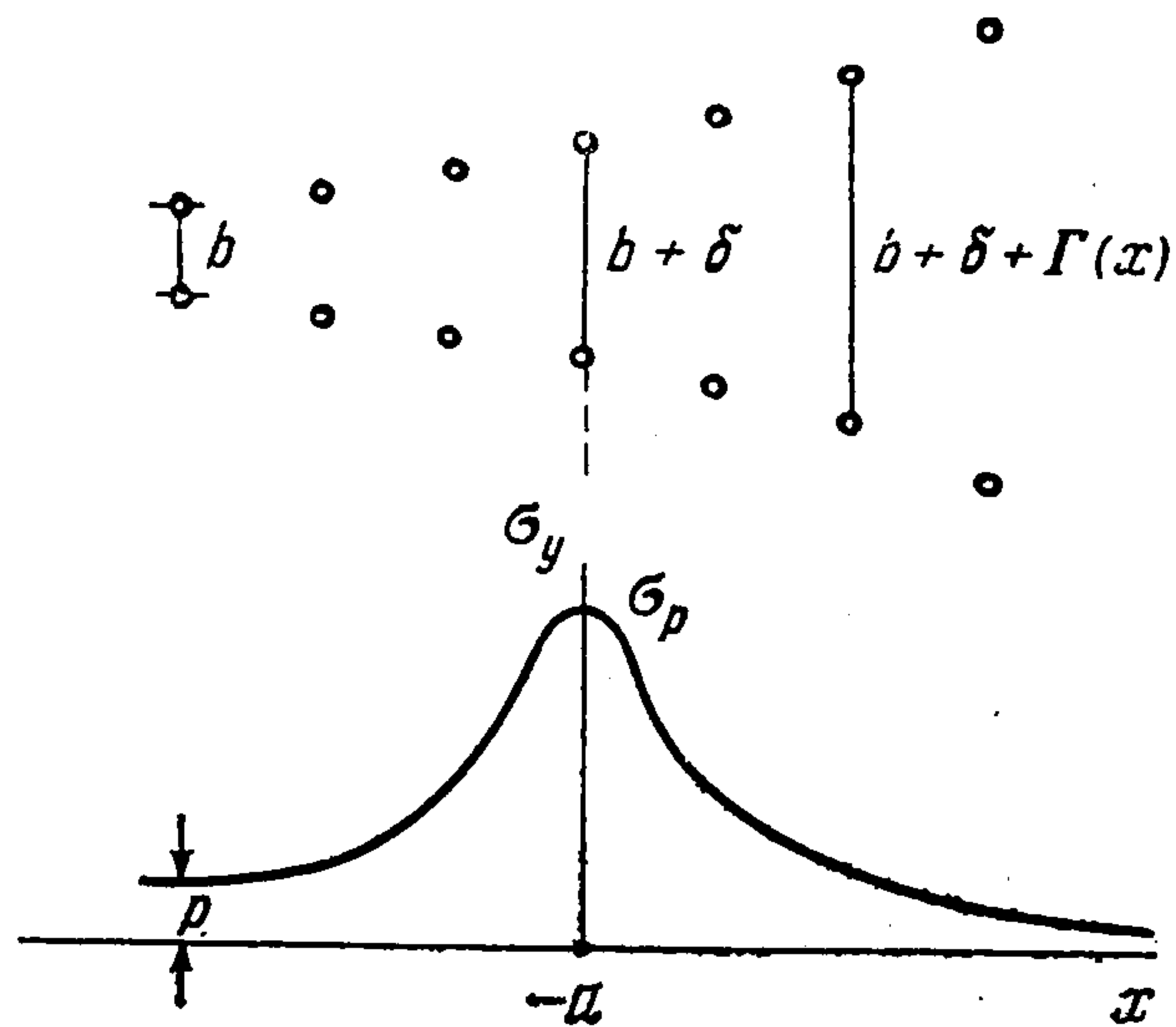
где функция  $g(x)$  с ростом  $x$  монотонно убывает от значения  $g(0) = 1$  до значения  $g(\infty) = 0$  не медленнее, чем  $x^{-\alpha}$  ( $\alpha > 2$ ), величина  $d$  соответствует деформации  $\varepsilon_y$ , при которой  $\sigma_y$  достигает максимального значения  $\sigma_p$ . Это означает, что имеют место соотношения

$$g(1) + g'(1) = 0, \quad d = \sigma_p [2\theta g(1)]^{-1} = \delta/b \quad (1.3)$$

где  $\delta$  — такое превышение нормального межатомного расстояния, что при  $\Delta b_y > \delta$  взаимодействие между рядами атомов начинает падать. На



Фиг. 2



Фиг. 3

основании (1.2) найдем, что работа, необходимая для образования единицы свободной поверхности, равна [1, 2]

$$\gamma = \frac{b}{2} \int_a^\infty \sigma_y d\varepsilon_y = \frac{\delta \sigma_p I}{2g(1)} \quad \left( I = \int_1^\infty xg(x) dx \right) \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь классическую задачу о растяжении плоскости с трещиной длины  $2a$  (плоская деформация) равномерными усилиями интенсивности  $p$ , приложенными на бесконечности (фиг. 2). Введем раскрытие трещины  $\Gamma(x) = -2v(x, 0)$  ( $|x| < a$ ), где  $v(x, 0)$  — перемещения точек нижней грани трещины. Если «взглянуть в микроскоп» на край трещины  $x = -a$ , то обнаружим раздвинутые ряды атомов (фиг. 3). Очевидно, нужно считать, что трещина начинается там, где расстояние между рядами атомов достигает величины  $b + \delta$ , а сила сцепления между атомами начинает спадать. Таким образом, при движении вдоль плоскости трещины от  $x = -\infty$  до  $x = -a$  усилие  $\sigma_y$  монотонно возрастает, достигая в сечении  $x = -a$  максимального значения  $\sigma_p$ , а затем при дальнейшем увеличении  $x$  начинает монотонно уменьшаться (фиг. 3). Значит, в вершинах трещины  $\Gamma(\pm a) = 0$  и  $\sigma_y(\pm a, 0) = \sigma_p$ . Усилия сцепления, которые действуют по берегам трещины при  $|x| \leq a$  (фиг. 2), нужно считать внешними усилиями по отношению к деформируемой среде и вводить их в краевые условия.

Итак, граничные условия задачи с учетом (1.2) и (1.3) будут иметь вид

$$y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (|x| < \infty), \quad v = 0 \quad (|x| > a) \quad (1.5)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_p}{g(1)} \left( 1 + \frac{\Gamma}{\delta} \right) g \left( 1 + \frac{\Gamma}{\delta} \right) \quad (|x| \leq a)$$

причем на бесконечности  $\sigma_y = p$ . Если пренебречь тем обстоятельством, что в малых зонах вблизи вершин трещины задача в силу (1.2) физически нелинейна и считать всюду в упругой плоскости вне трещины справедливыми уравнения линейной теории упругости, то при помощи интегрального преобразования Фурье проблема нахождения решения уравнений Ламе при смешанных граничных условиях (1.5) может быть сведена к следующему нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению (ИДУ):

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{1}{g(1)} (1 + \Gamma) g(1 + \Gamma) - p \quad (|x| \leq 1, \Gamma(\pm 1) = 0) \quad (1.6)$$

Здесь введены безразмерные величины и обозначения:

$$\Gamma_* = \frac{\Gamma}{\delta}, \quad p_* = \frac{p}{\sigma_p}, \quad x_* = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{b}{4g(1)a}$$

Звездочки в (1.6) и ниже опускаем.

Для определения критического значения усилия  $p$ , при котором произойдет удлинение трещины, будем использовать условие плавного смыкания берегов трещины в ее вершинах [3]:

$$\Gamma'(\pm 1) = 0 \quad (1.7)$$

2. Нелинейное уравнение (1.6) при условии (1.7) и любом значении  $\lambda$  имеет тривиальное решение  $\Gamma = 0$ ,  $p = 1$ , соответствующее случаю отсутствия раскрытия трещины и, как следствие, разрушению тела по достижении теоретического предела прочности. Покажем, что такое решение реализуется в действительности лишь при достаточно больших значениях параметра  $\lambda$ .

Обращая сингулярный интегральный оператор, стоящий в левой части (1.6), при условиях  $\Gamma(\pm 1) = \Gamma'(\pm 1) = 0$  приходим к ИДУ:

$$\Gamma'(x) = -\frac{1}{\pi\lambda} \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} = A\Gamma \quad (|x| \leq 1, \Gamma(\pm 1) = 0) \quad (2.1)$$

эквивалентному (1.6) при условии

$$p = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad f(\Gamma) = \frac{1}{g(1)} (1 + \Gamma) g(1 + \Gamma) \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.1) с учетом условия  $\Gamma(\pm 1) = 0$ , найдем

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^x \sqrt{1-\xi^2} d\xi \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-\xi)} = B\Gamma \quad (|x| \leq 1) \quad (2.3)$$

Предполагая теперь, что  $\Gamma(x) \in C_1(-1, 1)$ , произведем оценку

$$\begin{aligned} \|A\Gamma\|_C &\leq \frac{1}{\pi\lambda} \max_x \left| \int_{-1}^1 \frac{\{f[\Gamma(t)] - f[\Gamma(x)]\} [\Gamma(t) - \Gamma(x)]}{[\Gamma(t) - \Gamma(x)] \sqrt{1-t^2}(t-x)} dt \right| < \\ &< \frac{1}{\lambda} \max_{\Gamma} |f'(\Gamma)| \|\Gamma\|_{C_1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогично имеем

$$\|B\Gamma\|_C < \frac{1}{2}\pi\lambda^{-1} \max_{\Gamma} |f'(\Gamma)| \|\Gamma\|_{C_1} \quad (2.5)$$

Таким образом, в силу (2.4) и (2.5)

$$\|B\Gamma\|_{C_1} < \lambda^{-1} (1 + \frac{1}{2}\pi) \max_{\Gamma} |f'(\Gamma)| \|\Gamma\|_{C_1} \quad (2.6)$$

и оператор  $B$  является в  $C_1(-1, 1)$  при достаточно больших  $\lambda$  оператором сжатия. В этом случае решение интегрального уравнения (2.3) единственно в  $C_1(-1, 1)$  и может быть получено методом последовательных приближений. Однако одно решение  $\Gamma = 0$  известно и, следовательно, оно является единственным, при этом из условия (2.2) имеем  $p = 1$ .

Дальнейшая задача состоит в отыскании нетривиальных решений уравнения (1.6) при условии (1.7) для значений  $\lambda$  таких, что

$$\lambda < (1 + \frac{1}{2}\pi) \max_{\Gamma} |f'(\Gamma)| \quad (2.7)$$

Отмечалось [4], что математические трудности превращают полное рассмотрение уравнения (1.6), (1.7) в чрезвычайно сложную задачу, однако некоторых результатов можно достичь асимптотическими методами.

3. Изучим случай трещин относительно малого раскрытия. Для этого положим в (1.6) и (1.7)

$$\Gamma = \lambda \Gamma^{\circ}, \quad 1 - p = A \lambda^2 \quad (3.1)$$

и будем искать функцию  $\Gamma^{\circ}(x)$  и постоянную  $A$  в виде следующих регулярных разложений по степеням малого параметра  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^{\circ}(x) &= \Gamma_0(x) + \lambda \Gamma_1(x) + \lambda^2 \Gamma_2(x) + O(\lambda^3) \\ A &= A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя теперь (3.1) в (1.6) и (1.7), используя малость  $\lambda$  и первое соотношение (1.3), получим с точностью до членов порядка  $\lambda^3$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma^{\circ'(\xi)} d\xi}{\xi - x} = A - B(\Gamma^{\circ})^2 + \lambda C(\Gamma^{\circ})^3 + \lambda^2 D(\Gamma^{\circ})^4 \quad (3.3)$$

$$(|x| \leq 1, \quad \Gamma^{\circ}(\pm 1) = \Gamma^{\circ'(\pm 1)} = 0)$$

$$B = 1 - \frac{g''(1)}{2g(1)}, \quad C = \frac{g''(1) + 1/3g'''(1)}{2g(1)}, \quad D = \frac{g'''(1) + 1/4g^{IV}(1)}{6g(1)}$$

С учетом описанных выше свойств функции  $g(x)$  можно показать, что  $B > 0$ . Подставляя далее в (3.3) разложения (3.2) и приравнявая члены справа и слева при одинаковых степенях параметра  $\lambda$  (до  $\lambda^2$  включительно), придем относительно функций  $\Gamma_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) к уравнениям

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0'(\xi) d\xi}{\xi - x} = A_0 - B\Gamma_0^2(x) \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_1'(\xi) d\xi}{\xi - x} = A_1 - 2B\Gamma_0(x)\Gamma_1(x) + C\Gamma_0^3(x) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_2'(\xi) d\xi}{\xi - x} = A_2 - 2B\Gamma_0(x)\Gamma_2(x) - B\Gamma_1^2(x) + 3C\Gamma_0^2(x)\Gamma_1(x) + D\Gamma_0^4(x) \quad (3.6)$$

$$(|x| \leq 1, \quad \Gamma_i(\pm 1) = \Gamma_i'(\pm 1) = 0)$$

Приближенное решение нелинейного ИДУ (3.4) может быть найдено, например, методом дискретных вихрей [5] в сочетании с процессом квазилинеаризации [6]. Интегродифференциальные уравнения (3.5) и (3.6) являются уравнениями Прандтля. Их приближенные решения могут быть построены одним из методов, описанных в [5, 7]. При этом из условий  $\Gamma_i'(\pm 1) = 0$ , эквивалентных соотношениям (ср. с (2.2))

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0^2(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{2B\Gamma_0(t)\Gamma_1(t) - C\Gamma_0^3(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ A_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{2B\Gamma_0(t)\Gamma_2(t) + B\Gamma_1^2(t) - 3C\Gamma_0^2(t)\Gamma_1(t) - D\Gamma_0^4(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

будут определены постоянные  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Таким образом, асимптотическое при малых  $\lambda$  решение уравнения (1.6), (1.7) в форме (3.1), (3.2) может быть реально построено. Критическое усилие  $p$  найдем из второго соотношения (3.1).

4. Изучим случай трещин относительно большого раскрытия. Для этого обозначим  $\lambda/p = \mu$  и положим  $\Gamma^1 = \mu\Gamma$ . Тогда уравнения (1.6) с условием

(4.7) примут вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\mu}{\lambda g(1)} \left(1 + \frac{\Gamma}{\mu}\right) g\left(1 + \frac{\Gamma}{\mu}\right) - 1 \quad (4.1)$$

( $|x| \leq 1$ ,  $\Gamma(\pm 1) = \Gamma'(\pm 1) = 0$ )

В (4.1) и далее верхний индекс 1 у  $\Gamma$  опускаем. Уравнение (4.1) можно также привести к ИДУ

$$\Gamma'(x) = -\frac{\mu}{\pi\lambda} \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma/\mu) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} \quad (|x| \leq 1, \Gamma(\pm 1) = 0) \quad (4.2)$$

эквивалентному (4.1) при условии

$$1 = \frac{\mu}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{f(\Gamma/\mu) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad f\left(\frac{\Gamma}{\mu}\right) = \frac{1}{g(1)} \left(1 + \frac{\Gamma}{\mu}\right) g\left(1 + \frac{\Gamma}{\mu}\right) \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3), очевидно, аналогичны (2.1) и (2.2).

Для исследования уравнения (4.1) (уравнения (4.2), (4.3)) при малых значениях параметра  $\mu$  применим метод срачиваемых асимптотических разложений [8, 9]. В зоне изменения  $x$ , вне малых окрестностей точек  $x = \pm 1$ , где  $\Gamma(x) \sim 1$  из (4.1) при  $\mu \ll 1$  в силу свойств функции  $g(x)$  имеем в главном уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0'(\xi)}{\xi - x} d\xi = -1 \quad (|x| \leq 1, \Gamma_0(\pm 1) = 0) \quad (4.4)$$

служащее для определения внешнего (проникающего) решения

$$\Gamma_0(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (4.5)$$

Рассмотрим теперь  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x = -1$  и произведем ее растяжение введением новой переменной  $r = (x + 1)/\varepsilon$ . При подходе к границе  $\varepsilon$ -окрестности, т. е. при  $r \sim 1$ , внешнее решение (4.5) имеет порядок  $\varepsilon^{1/2}$ . Поэтому в  $\varepsilon$ -окрестности будем искать функцию  $\Gamma(x)$  в виде

$$\Gamma(x) = \varepsilon^{1/2} q(r) + o(\varepsilon^{1/2}) (r \sim 1) \quad (4.6)$$

Аналогично в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x = 1$

$$\Gamma(x) = \varepsilon^{1/2} q(s) + o(\varepsilon^{1/2}) (s = (1-x)/\varepsilon \sim 1) \quad (4.7)$$

Здесь  $q(r)$  — внутреннее решение или пограничный слой.

Подставив выражение (4.6) и (4.7) в уравнение (4.2), получим в окрестности  $x = -1$

$$\varepsilon^{-1/2} q'(r) = -\frac{\mu\varepsilon^{1/2}}{\pi\lambda} \sqrt{2r} \left( \int_{-1}^{-1+\eta} + \int_{-1+\eta}^{1-\eta} + \int_{1-\eta}^1 \right) \frac{f(\Gamma/\mu) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} \quad (\varepsilon \ll \eta \ll 1) \quad (4.8)$$

В (4.8) интеграл от  $-1 + \eta$  до  $1 - \eta$  мал, ибо функция  $f(\Gamma/\mu) \ll O(\mu^{\alpha-1})$  при  $\Gamma \sim 1$  и  $\mu \ll 1$ . Кроме того, видно, что третьим интегралом в (4.8) по сравнению с первым также можно пренебречь (в силу того, что  $\varepsilon \ll 1$ ).

Для обеспечения срачивания внешнего и внутреннего решений положим  $\varepsilon^{1/2} = \mu$ . При этом уравнение (4.8) для  $q(r)$  примет окончательный вид

$$q'(r) = -\frac{\kappa}{\pi} \sqrt{2r} \int_0^\infty \frac{f(q) d\xi}{\sqrt{2\xi} (\xi - r)} \quad (0 \leq r < \infty, q(0) = 0) \quad (4.9)$$

$\kappa = \mu^2/\lambda \sim 1$

Такое же уравнение получится, если рассматривать  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x = 1$ .

Интегральное условие (4.3) путем аналогичных рассуждений можно переписать следующим образом:

$$1 = \frac{2\kappa}{\pi} J, \quad J = \int_0^{\infty} \frac{f(q) d\zeta}{\sqrt{2\zeta}} \quad (4.10)$$

Отсюда найдем критическое усилие

$$p = \sqrt{2J\lambda/\pi} \quad (4.11)$$

Видно, что оно в основном определяется силами молекулярного взаимодействия, проявляющими себя в  $\varepsilon$ -окрестностях вершин трещин.

5. Заметим, что условие (4.11), очевидно, в точности должно совпасть с условием разрушения Гриффитса (энергетическим критерием разрушения), которое в размерных величинах имеет вид [2]  $p = 2\sqrt{\theta\gamma/(\pi a)}$ . С учетом формул (1.3), (1.4), (1.7) в указанных ранее безразмерных величинах это соотношение можно записать так:

$$p = 2\sqrt{I\lambda/(\pi g(1))} \quad (5.1)$$

Сравнивая (4.11) с (5.1), видим, что должно выполняться соотношение

$$J = 2I/g(1) \quad (5.2)$$

накладывающее ограничение на возможный вид функции  $g(x)$ , входящей в исходную зависимость (1.2). Таким образом, микромеханизм разрушения, описываемый формулой (1.2), оказывается связанным с макромеханизмом разрушения (5.1).

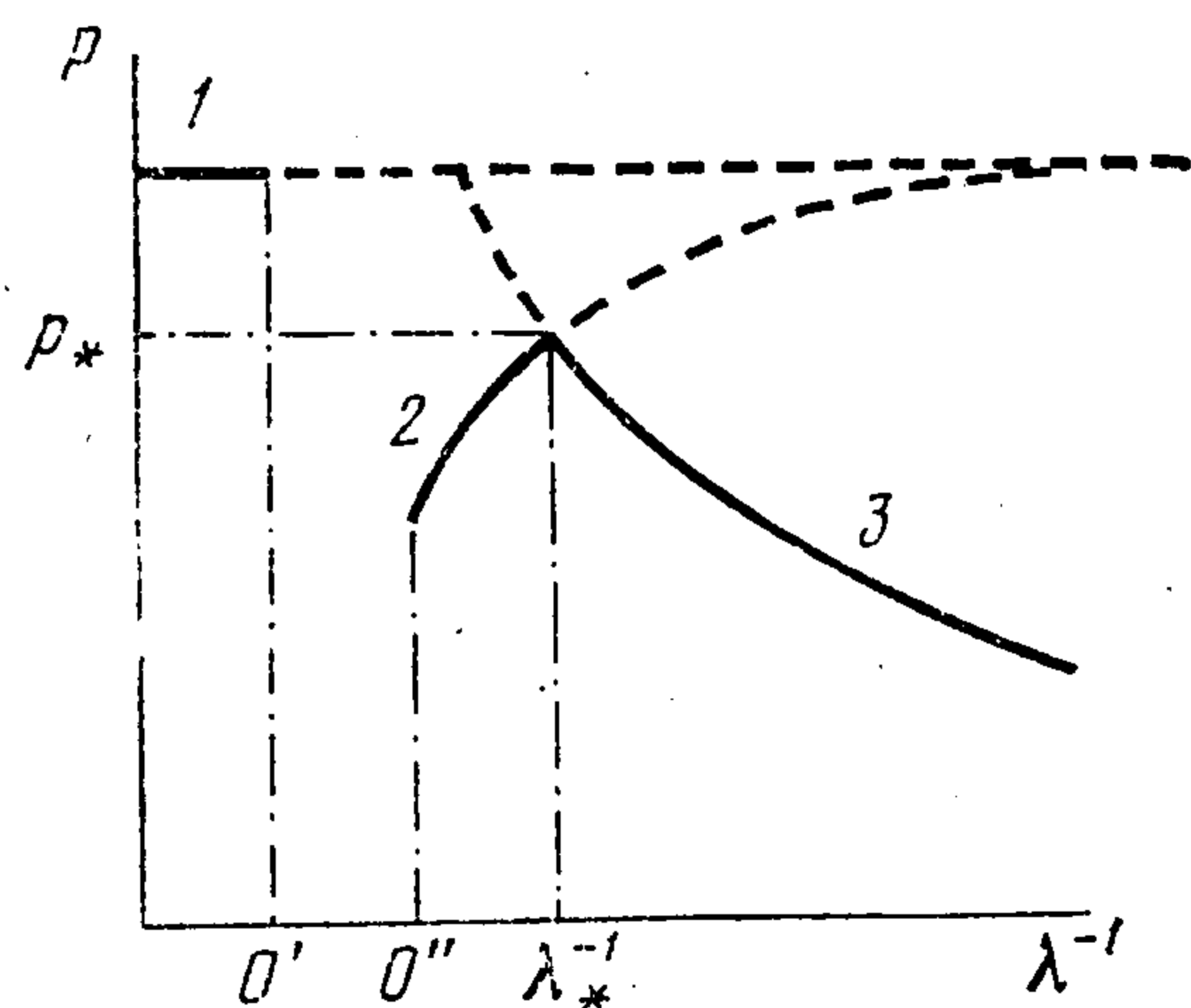
Допустим, что функция  $g(x)$  в (1.2) выбрана так, что соотношение (5.2) приблизительно выполняется, и перейдем к вопросу о построении приближенного решения нелинейного ИДУ (4.9). При больших значениях аргумента функция  $q(r)$  должна стремиться к внешнему решению, т. е. согласно (4.5) и (4.6)  $q(r) = \sqrt{2r}$  ( $r \rightarrow \infty$ ). В то же время в окрестности нуля  $q(0) = q'(0) = 0$ . В соответствии с этим представим приближенное решение уравнения (4.9) в форме

$$q(r) = (2r)^{3/2}(2r + D)^{-1} \quad (5.3)$$

где постоянную  $D$  подберем так, чтобы выполнилось соотношение (5.2). Далее, приняв выражение (5.3) в качестве начального приближения для решения уравнения (4.9), можно методом типа дискретных вихрей [10] найти более точное его решение и затем определить согласно (4.10) новое выражение для постоянной  $J$ . Если оно будет существенно отличаться от ранее принятого для  $J$  значения (5.2), то вид функции  $g(x)$  в (1.2) неудачен и его нужно подправить. Повторяя этот путь несколько раз, в итоге найдем вид функции  $g(x)$  (вообще говоря, не единственный), необходимый для выполнения соотношения (5.2), и приближенное решение уравнения (4.9). Таким образом, асимптотическое решение уравнения (4.1) при малых  $\mu$  в форме (4.5), (4.6), (4.9) может быть реально построено. Критическое усилие  $p$  затем найдем из условия (4.11) или (5.1).

Рассмотрим теперь плоскость  $p, \lambda^{-1}$ , где  $\lambda^{-1}$  — безразмерная длина трещины (фиг. 4). Схематично изобразим на этой плоскости полученные результаты. Сплошная часть кривой  $I$  соответствует решению  $p = 1$  (т. е. разрушению по достижении теоретического предела прочности) для трещин весьма малой относительной длины, не испытывающих раскрытия. Между

точками  $O'$  и  $O''$  оси  $\lambda^{-1}$  лежит область трещин малой относительной длины ( $\lambda \sim 1$ ), информацией о значениях критического усилия  $p$ , для которых может быть получена лишь путем прямого численного решения уравнения (1.6), (1.7). Сплошная часть кривой 2 соответствует второму соотношению (3.1) (учтено, что  $A_0 > 0$ , а следующие члены в разложении (3.2) для  $A(\lambda)$  малы при малых  $\lambda$ ). Это трещины средней относительной длины и относительно малого раскрытия. Сплошная часть кривой 3 соответствует зависимости (5.1). Это трещины большой относительной длины и относительно большого раскрытия. По характеру зависимостей (3.1) и (5.1) видно, что кривые 2 и 3 должны пересекаться в некоторой точке  $\lambda_*^{-1}$ . Таким образом, трещины средней относительной длины устойчиво подрастают с увеличением действующей на тело нагрузки, но по достижении некоторой критической длины  $\lambda_*^{-1}$  при нагрузке  $p_*$ , меньшей теоретического предела прочности  $p = 1$ , они начинают неустойчиво развиваться согласно механизму Гриффитса, как трещины относительно большой длины. Штрихами на фиг. 4 изображены нереализуемые в действительности участки зависимостей  $p = 1$ , а также (3.1) и (5.1).



Фиг. 4

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
2. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3—41.
4. Билби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения. Разрушение. М.: Мир, 1973. Т. 1. С. 112—203.
5. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.
7. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
8. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
9. Кудиш И. И. Взаимодействие накладки, находящейся в условиях установившейся нелинейной ползучести, с упругой полуплоскостью // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1979. Т. 32. № 2. С. 38—52.
10. Кудиш И. И. Численные методы решения одного класса нелинейных интегральных и интегродифференциальных уравнений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 10. С. 1493—1511.

Москва

Поступила в редакцию  
24.VI.1988